
3 1761 07550537 0

# COURS COMPLET

DE

# MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C[ie],
Quai des Grands-Augustins, 55.
61418-21

# COURS COMPLET

DE

# MATHÉMATIQUES SPÉCIALES


Par J. HAAG,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND,
EXAMINATEUR SUPPLÉANT D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.


---

TOME II.

GÉOMÉTRIE.







PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1921

# PRÉFACE.

Ce Livre est la suite du Cours complet de Mathématiques spéciales, dont le Tome I (*Algèbre et Analyse*) a paru en 1914.

Je dois tout d'abord m'excuser auprès des lecteurs de mon premier Ouvrage de leur avoir fait attendre le second pendant près de six ans. La Guerre a été la seule cause de ce retard excessif.

Malgré cette longue interruption dans la rédaction de mon Cours, j'espère lui avoir laissé toute l'homogénéité que j'escomptais au moment de l'entreprendre. Le but que je poursuis est toujours le même dont j'ai exposé les grandes lignes dans la Préface du Tome I.

J'ai intitulé ce Tome II : « *Géométrie* » et non pas « *Géométrie analytique* », parce que, quoique le calcul ait été mon principal instrument, je n'ai pas hésité, toutes les fois que cela me semblait plus simple ou plus fécond, à employer exclusivement le raisonnement géométrique ou bien à le combiner avec la méthode analytique. J'estime qu'il faut habituer les élèves à savoir discerner, dans leur arsenal, les armes les plus puissantes, *celles qui doivent les conduire au but avec le moins de peine*. Cela n'empêche pas de leur faire traiter quelquefois, par un calcul très long, une question qu'un raisonnement résout en quelques lignes ou, inversement, de leur faire découvrir une solution géométrique subtile, alors que la solution analytique est évidente. Mais, de tels exercices doivent être considérés comme une pure gymnastique, dont l'utilité est très soutenable.

*J'ai mené de front la Géométrie plane et la Géométrie dans l'espace*, la séparation qu'on établit généralement entre elles me paraissant trop artificielle, surtout en Géométrie analytique, où, la plupart du temps, il suffit de supprimer une coordonnée pour tomber de l'espace dans le plan. Je n'ai fait exception que pour quelques

Chapitres (tels que Droite et Plan, Cercle et Sphère), dans le seul but de les rendre moins longs.

*J'ai divisé l'Ouvrage en deux Parties.* Dans la première, j'expose les théories générales et, dans la seconde, je les applique à l'étude des courbes et surfaces classiques (exception faite pour la droite, le plan, le cercle et la sphère, dont l'usage est indispensable dès le début).

J'ai réduit, autant que j'ai pu, *la théorie des courbes et surfaces du second degré*, tout en exposant néanmoins, dans leurs grandes lignes, les principales questions qui en font l'habituel objet. Certains lecteurs estimeront peut-être que j'ai trop condensé ces jolis développements, qui, pendant de nombreuses années, ont constitué presque exclusivement l'enseignement de la Géométrie en Mathématiques spéciales. D'autres, au contraire, inclinant aux tendances nouvelles, me trouveront réactionnaire et jugeront inutiles des Chapitres entiers.

Je suis resté entre les deux camps, ce qui est, sans nul doute, la meilleure position pour recevoir des critiques de part et d'autre. En voici la raison.

L'utilité pratique des coniques et des quadriques me semble très limitée ; c'est pourquoi je n'ai pas voulu écrire un Livre qui leur soit consacré en majeure partie, comme l'ont été tant de Traités de Géométrie analytique. Les lecteurs que ces lignes et surfaces intéresseraient particulièrement pourront se les rendre familières en traitant les nombreux exercices que j'ai proposés à leur sujet.

Par contre, je considère comme désirable, bien que cela ne soit plus guère de mode, que le goût de la Géométrie persiste chez les futurs mathématiciens et la théorie des coniques et quadriques me paraît éminemment propre à le leur donner. C'est pourquoi je n'ai pu me résoudre à sacrifier certaines questions, dont quelques-unes ne font même plus partie des programmes, mais qui m'ont paru susceptibles d'intéresser, malgré tout, les élèves d'élite. Les lecteurs pour qui ces questions n'auraient aucun attrait pourront, sans inconvénient, les laisser de côté.

Dans un ordre d'idées opposé, j'ai donné aux *problèmes de Géo-*

*métrie infinitésimale* tout le développement qui m'a paru compatible avec les connaissances que doit posséder le lecteur de mon Tome I en Calcul différentiel et intégral. Je n'ai pas craint d'esquisser certaines théories, telles que lignes asymptotiques, lignes de courbure, congruences, etc., qui ne sont pas encore au programme de la classe de Mathématiques spéciales, mais qui me paraissent aussi faciles à assimiler que bien des calculs de pure Géométrie analytique.

J'ai fait grand usage *des points à l'infini et des éléments imaginaires*, car ils permettent de voir clair dans bien des questions, qu'on traite, au contraire, avec peine, quand on n'est pas familiarisé avec ces notions.

Dans les exercices, j'ai envisagé souvent des *applications numériques*, avec des données prises au hasard, afin que le lecteur puisse juger de la valeur pratique des méthodes qui lui sont offertes, point de vue laissé trop souvent de côté, semble-t-il, par les mathématiciens. Par contre, la précision de la règle à calculs m'a toujours paru suffisante et c'est uniquement avec cet instrument que j'ai traité les exercices numériques résolus.

J. Haag.

Clermont-Ferrand, 30 décembre 1919.

# COURS COMPLET

DE

# MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

---

## LIVRE I.

## CHAPITRE I (¹).

### HOMOGÉNÉITÉ. CONSTRUCTION DES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES.

---

### I. — HOMOGÉNÉITÉ.

1. En Géométrie, surtout en Géométrie analytique, il y a constamment lieu d'introduire les *mesures* de certaines grandeurs (lignes, surfaces ou volumes), entre lesquelles on établit des relations. Cela suppose nécessairement l'existence d'une *unité de longueur*, d'où dérivent, comme on sait, les unités de surface et de volume.

Dans les applications numériques, cette unité est généralement fixée (mètre, centimètre, etc.); ou bien, on se la fixe soi-même par un certain segment tracé sur la figure.

Dans les questions théoriques, au contraire, *on ne s'occupe généralement pas du choix de l'unité de longueur* et les équations sont établies indépendamment de ce choix. C'est alors qu'il y a lieu d'appliquer le *principe de l'homogénéité*.

2. Rappelons d'abord un théorème évident d'Arithmétique : *Si*,

---

(¹) Ce Chapitre n'est pas indispensable pour la compréhension des Chapitres suivants. Néanmoins, le lecteur fera bien d'avoir constamment présent à l'esprit le principe de l'homogénéité, qui donne lieu à d'utiles vérifications dans les calculs de Géométrie analytique.

*pour mesurer une même grandeur, on prend successivement deux unités différentes* U *et* U′, *de rapport* $\frac{U}{U'} = k$, *les deux mesures correspondantes* $m$ *et* $m'$ *sont dans le rapport inverse* $\frac{m}{m'} = \frac{1}{k}$.

Cela posé, imaginons qu'entre les mesures de différentes longueurs d'une même figure on ait établi une certaine relation, *indépendamment de tout choix d'unité*. D'après le théorème ci-dessus, ces mesures ne sont définies qu'à un facteur arbitraire près; puisque, si l'on vient à changer d'unité (ce qui est permis, parce que celle-ci n'est pas fixée), toutes les mesures sont multipliées par le même nombre. Ces dernières sont dès lors nécessairement représentées par des lettres $a, b, c, \ldots, l$, qu'on est en droit de faire varier proportionnellement autant qu'on le veut. Il suit de là que la *relation établie*

$$f(a, b, c, \ldots, l) = 0 \tag{1}$$

*ne doit pas changer quand on multiplie toutes les lettres* $a$, $b$, ... *par un même facteur arbitraire*. C'est ce qu'on exprime en disant que *la relation est homogène*.

En théorie, il ne s'ensuit pas nécessairement que la fonction $f$ soit homogène (t. I, n° 133) [1]. En pratique, cela a toujours lieu.

3. Si, dans une question, *les données ne sont pas homogènes*, ce qui arrive, en particulier, si certaines sont purement numériques, *cela implique le choix d'une unité de longueur*.

Mais, si, *partant de données homogènes, on se trouve, à un certain moment, en présence d'une équation non homogène, il faut en conclure qu'on s'est trompé*. Il est donc utile, dans ces conditions, de faire souvent des vérifications d'homogénéité. Une faute d'homogénéité est toujours considérée comme une faute grossière, sautant aux yeux et qu'on ne doit jamais laisser passer.

*Remarques*. — I. Il est à peine besoin de faire remarquer que,

---

[1] La fonction $f$ pourrait, par exemple, être une somme de fonctions homogènes nulles séparément.

dans l'évaluation des degrés, une surface a le degré 2, un volume a le degré 3, une ligne trigonométrique, un angle, un arc du cercle trigonométrique ont le degré o.

II. Dans le cas de données non homogènes, il est toujours possible, et c'est quelquefois utile, de rendre homogène une relation qui ne l'est pas. Supposons, par exemple, qu'il en soit ainsi de l'équation (1). Imaginons qu'à l'unité implicitement ou explicitement imposée on en substitue une autre arbitraire, et soit $u$ la mesure de l'ancienne au moyen de la nouvelle. Les mesures $a$, $b$, $c$, ..., $l$ deviennent $a' = au$, $b' = bu$, ..., $l' = lu$ et la relation (1) s'écrit

$$f\left(\frac{a'}{u}, \frac{b'}{u}, \frac{c'}{u}, \ldots, \frac{l'}{u}\right) = 0, \tag{2}$$

ce qui est une équation homogène en $a'$, $b'$, ..., $l'$, $u$.

En résumé, *on rend homogène la relation proposée par la simple introduction d'une variable d'homogénéité* (t. I, n° 227), *qui représente l'unité de longueur.*

## II. — CONSTRUCTION DES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES.

4. Soit à construire une longueur dont la mesure $x$ est donnée, en fonction des mesures $a$, $b$, ..., $l$ d'autres longueurs supposées connues, par la formule

$$x = f(a, b, \ldots, l), \tag{3}$$

où $f$ représente une certaine fonction algébrique des variables $a$, $b$, ..., $l$.

Observons tout de suite que, si l'unité de longueur doit demeurer arbitraire, cette fonction doit être homogène et de degré 1 (n° 2). S'il n'en est pas ainsi, on est obligé de choisir une certaine longueur pour unité, qui, représentée par une lettre $u$, permet de rendre la formule (3) homogène (n° 3, remarque II).

Nous pouvons donc nous borner à examiner les cas où la fonction $f$ est homogène et de degré 1. Hâtons-nous de dire d'ailleurs que le problème posé n'est pas toujours possible dans le sens que nous envisageons ici, c'est-à-dire *à la règle et au compas* [1]. Sans

---

[1] On entend par là que, pour avoir la longueur demandée, il doit suffire d'effec-

chercher à approfondir cette question de possibilité, nous allons simplement passer en revue les principaux cas admettant une solution.

5. Expressions rationnelles. — Si la fonction $f$ est rationnelle (t. I, n° 75), le problème est toujours possible, la construction pouvant même se faire entièrement à la règle.

*Premier cas : Construction d'un monome.* — Tout monome du premier degré est de la forme

$$x_p = \frac{a_1 a_2 \ldots a_p}{b_1 b_2 \ldots b_{p-1}}. \tag{4}$$

Quand $p = 2$, on est ramené à la construction bien connue d'une *quatrième proportionnelle*.

D'autre part, l'égalité

$$x_{p+1} = x_p \frac{a_{p+1}}{b_p} \tag{5}$$

montre que la même construction permet de passer d'un monome $x_p$ à un monome $x_{p+1}$. Par suite, il suffira de $p-1$ constructions de quatrième proportionnelle pour obtenir $x_p$, en passant, de proche en proche, par les monomes $x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}$.

*Deuxième cas : Construction d'un polynome.* — On construit séparément chaque terme. On n'a plus ensuite qu'à ajouter ou retrancher des longueurs, ce qui ne souffre pas de difficulté.

*Troisième cas : Construction d'une fraction.* — Soit

$$x = \frac{P}{Q}, \tag{6}$$

les polynomes P et Q étant homogènes et de degrés respectifs $p$ et $p-1$, de façon que $x$ soit homogène et de degré 1.

On choisit arbitrairement une longueur $\lambda$. Puis l'on construit des

---

tuer un nombre *limité* de constructions faisant appel uniquement à la règle et au compas. Ce point de vue offre d'ailleurs un intérêt *plus théorique que pratique*. Si l'on a, en effet, à construire la longueur $x$ dans un cas concret, le plus simple est de mesurer les longueurs $a, b, \ldots, l$, de calculer ensuite $x$ par la formule (3), où la fonction $f$ peut alors être quelconque, et enfin de construire la longueur, qui a pour mesure $x$.

longueurs $y$ et $z$ définies par

(7) $$P = \lambda^{p-1} y, \qquad Q = \lambda^{p-2} z,$$

constructions rentrant visiblement dans le deuxième cas. On a alors

(8) $$x = \frac{\lambda y}{z};$$

et l'on est ramené à une quatrième proportionnelle.

6. Expressions irrationnelles. — Nous envisagerons seulement les longueurs définies par la formule générale

(9) $$x = \sqrt[2^m]{X_m},$$

où $X_m$ désigne une expression rationnelle, homogène et de degré $2^m$, $m$ étant d'autre part un nombre naturel.

D'abord, lorsque $m = 1$, on choisit arbitrairement une longueur $\lambda$ et l'on construit $y$ telle que

(10) $$X_1 = \lambda y \qquad (\text{n}^\circ\ 5).$$

On a ensuite

(11) $$x = \sqrt{\lambda y};$$

on est conduit à la construction bien connue d'une *moyenne proportionnelle*.

Si $m$ a une valeur quelconque, on construit (cas précédent)

(12) $$y = \sqrt{\frac{X_m}{\lambda^{2^m-2}}}.$$

Puis, on a

(13) $$x = \sqrt[2^m]{\lambda^{2^m-2} y^2} = \sqrt[2^{m-1}]{\lambda^{2^{m-1}-1} y}.$$

On est ramené à une expression de même forme, mais où le nombre $m$ est diminué d'une unité. On conçoit, dès lors, de proche en proche, la possibilité d'avoir $x$, par $m$ constructions de moyenne proportionnelle.

7. Dans certains cas rentrant dans les précédents, on peut quelquefois trouver des constructions plus rapides que celles auxquelles conduit la méthode générale. C'est ainsi que les longueurs $\sqrt{a^2 + b^2}$

et $\sqrt{a^2 - b^2}$ sont obtenues par la construction évidente d'un triangle rectangle.

De même, on sait construire les racines d'une équation du second degré, sans se servir des formules classiques de résolution, qui donneraient lieu à une solution compliquée.

Soit encore à construire les racines d'une équation bicarrée. Choisissant une longueur arbitraire $\lambda$, posons

$$x^2 = \lambda y. \tag{14}$$

Nous obtenons une équation du second degré en $y$, dont nous construisons la ou les racines positives, s'il y a lieu. Une moyenne proportionnelle nous donne ensuite $x = \pm\sqrt{\lambda y}$.

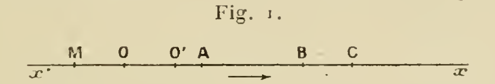
# CHAPITRE II (¹).

## GRANDEURS ORIENTÉES. PROJECTIONS.

### I. — GRANDEURS ORIENTÉES.

8. Droite orientée. — Soit une droite indéfinie $x'x$ (*fig.* 1). On

Fig. 1.




peut distinguer sur elle deux sens de parcours. Choisissons arbitrairement l'un d'eux et convenons de l'appeler *sens positif*, l'autre sens étant appelé *sens négatif*. (Le sens positif sera, par exemple, celui qui est indiqué par une flèche sur la figure.) Nous disons alors que notre droite est *orientée*. Une droite orientée s'appelle aussi un *axe*.

Prenons, sur $x'x$, deux points quelconques A et B. Ils déterminent un morceau de droite ou *segment*. Convenons maintenant de faire jouer aux deux points des rôles différents : appelons l'un *origine* et l'autre *extrémité*. Notre segment devient un *vecteur*. Le *sens du vecteur* est celui d'un mobile qui irait de l'origine vers l'extrémité.

On énonce un vecteur en nommant d'abord l'origine, puis l'extrémité. Ainsi, si l'origine est A et l'extrémité B, on énonce « vecteur AB ». On écrit $\overrightarrow{AB}$. (En supprimant la flèche, on désignerait seulement le segment AB.)

Le segment AB donne naissance à deux vecteurs de sens différents, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur $\overrightarrow{BA}$. Ces deux vecteurs sont dits *opposés*.

*Mesure algébrique d'un vecteur. — La mesure algébrique d'un*

(¹) Nous considérons ce Chapitre comme tout à fait fondamental et conseillons au lecteur de se l'assimiler de façon complète.

*vecteur porté par un axe est un nombre relatif, dont la valeur absolue égale la mesure de la longueur* [1] *du segment d'où provient le vecteur et dont le signe est + ou —, suivant que le sens du vecteur coïncide avec le sens positif ou avec le sens négatif de l'axe.*

La mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se représente par la notation $\overline{AB}$; tandis que la longueur du segment AB (ou BA) se représente simplement par AB (ou BA). Sur la figure 1, on a

$$\overline{AB} = + AB, \qquad \overline{BA} = - AB.$$

On voit que

(1) $$\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

On appelle *vecteur unitaire* de l'axe $x'x$ tout vecteur de cet axe qui a pour mesure algébrique + 1.

9. Formule de Chasles. — Prenons, sur $x'x$, un troisième point C. Je dis que l'on a

(2) $$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

En effet, dans le cas de la figure 1, on a

$$\overline{AB} = AB, \qquad \overline{BC} = BC, \qquad \overline{CA} = - AC.$$

En ajoutant et remarquant l'égalité évidente AC = AB + BC, on obtient bien l'équation (2).

Il existe cinq autres cas de figure, suivant l'ordre dans lequel se présentent, de gauche à droite, les trois points sur l'axe. Mais, ils se ramènent tous au précédent, par l'application de la formule (1). Par exemple, si les points se présentent dans l'ordre ACB, on a, d'après le cas déjà étudié,

$$\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BA} = 0$$

ou

$$- \overline{CA} - \overline{BC} - \overline{AB} = 0,$$

ce qui est l'égalité (2).

Nous laissons au lecteur le soin d'examiner les quatre autre cas : CAB, BAC, BCA, CBA.

---

[1] On suppose implicitement l'existence d'une certaine unité de longueur.

La formule (2) est *tout à fait fondamentale* en Géométrie analytique (¹). Elle pose le nom de *formule* ou *relation de Chasles*.

On peut encore l'écrire, par exemple,

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}. \tag{3}$$

*Extension de la formule de Chasles.* — Au lieu de trois points, prenons-en un nombre quelconque $n$, tous sur $x'x$, que nous appellerons $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Je dis que l'on a

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1} = 0. \tag{4}$$

Nous le savons déjà pour $n = 2$ et 3 [formules (1) et (2)].

Dès lors, raisonnons par induction : admettant l'équation (4), établissons la suivante :

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_{n+1}} + \overline{A_{n+1}A_1} = 0. \tag{5}$$

En retranchant (4) de (5), nous sommes ramenés à prouver

$$\overline{A_nA_{n+1}} + \overline{A_{n+1}A_1} - \overline{A_nA_1} = 0, \tag{6}$$

ce qui résulte de (1) et (2).

La formule (4) est donc générale. Elle peut encore s'écrire

$$\overline{A_1A_n} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n}. \tag{7}$$

10. Abscisses. — Quand on veut étudier des figures tracées sur une droite, il est commode de se servir d'*abscisses*.

On commence par orienter la droite. Puis, on y choisit un point fixe O, qu'on appelle *origine des abscisses*, ou simplement *origine*. A chaque point M de la droite, on fait alors correspondre le nombre relatif

$$x = \overline{OM},$$

qui est dit son *abscisse*. Ce procédé établit manifestement une correspondance parfaite (²) entre l'ensemble des points de $x'x$ et l'ensemble des nombres relatifs. Il permet de substituer les seconds aux premiers, ce qui est le fondement de la Géométrie analytique.

---

(¹) Il faut la connaître par cœur, sous les formes (2), (3) et (9), sans aucune hésitation. Elle dispense complètement de regarder la figure.

(²) Cf. : *Cours*, t. I, p. 22, note 1.

Problème. — *Connaissant les abscisses $x_A$ et $x_B$ des points* A *et* B, *calculer* $\overline{AB}$.

La solution est une conséquence immédiate de la formule de Chasles. Si, en effet, on applique celle-ci aux trois points O, A, B, on peut écrire

$$\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BO} = 0$$

ou

$$x_A + \overline{AB} - x_B = 0;$$

d'où l'on tire

(8) $$\overline{AB} = x_B - x_A.$$

Ce qu'on énonce :

*La mesure algébrique d'un vecteur égale l'abscisse de l'extrémité moins l'abscisse de l'origine.*

Nous ferons un usage excessivement fréquent de cette proposition qui, au fond, ne diffère pas de la formule de Chasles.

*Changement d'origine.* — Supposons qu'à l'origine O, on substitue une nouvelle origine O′, définie par son abscisse $x_0 = \overline{OO'}$. Si $x'$ désigne la nouvelle abscisse de M, on a, d'après (8),

(9) $$x' = \overline{O'M} = x - x_0$$

ou

(10) $$x = x_0 + x'.$$

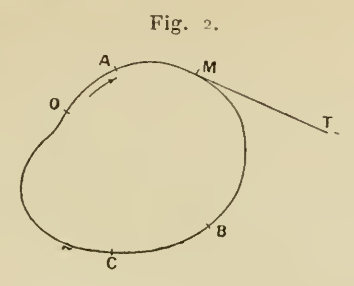
On a, de la sorte, indifféremment la nouvelle abscisse en fonction de l'ancienne ou l'ancienne en fonction de la nouvelle.

11. Courbe orientée. — Étant donnée une ligne courbe quelconque, on peut l'orienter, tout comme une ligne droite, par le choix d'un certain sens de parcours comme *sens positif*.

*On oriente du même coup toutes ses tangentes* par la convention suivante. La tangente en M (*fig.* 2) sera orientée dans un sens tel que deux mobiles partant de M et se déplaçant dans le sens positif, l'un sur la courbe, l'autre sur la tangente, se trouvent du même côté de la normale en M dès qu'ils ont quitté ce point. La demi-droite

directrice MT (n° 15) de la tangente ainsi orientée sera appelée la *demi-tangente positive en* M.

Fig. 2.




Nous allons voir à présent ce que deviennent les considérations exposées plus haut, quand on remplace l'axe $x'x$ par une courbe orientée.

Deux cas sont à distinguer :

*Premier cas : Courbe ouverte.* — On a absolument les mêmes définitions et les mêmes formules que sur la ligne droite, avec cette seule différence que les vecteurs sont remplacés par des *arcs orientés*. La mesure algébrique d'un arc d'origine A et d'extrémité B se représente par $\overset{\frown}{AB}$.

Si l'on choisit, sur la courbe, une *origine des arcs*, chaque point M est déterminé par son *abscisse curviligne* $s = \overset{\frown}{OM}$.

*Deuxième cas : Courbe fermée.* — Soit une courbe fermée (*fig.* 2), sur laquelle nous choisissons un sens positif, indiqué par la flèche. Prenons deux points A et B et proposons-nous de définir la mesure algébrique $\overset{\frown}{AB}$. On éprouve tout de suite des difficultés, parce qu'il y a deux arcs d'origine A et d'extrémité B, ce qui n'avait pas lieu pour la courbe ouverte. Il y a même *une infinité d'arcs commençant en* A *et se terminant en* B, si l'on admet qu'un arc puisse s'enrouler indéfiniment sur lui-même, dans un sens ou dans l'autre. Voici, dès lors, la définition que nous adopterons :

*On représentera par le symbole* $\overset{\frown}{AB}$ *tout nombre relatif $\alpha$ obtenu de la manière suivante. Imaginons qu'un mobile parte de* A, *se déplace sur la courbe dans un sens quelconque, sans jamais rebrousser chemin, traverse le point* B *autant de fois qu'il lui*

*plaît, mais s'arrête finalement en ce point. Il aura parcouru une longueur de courbe dont la mesure sera la valeur absolue de* $\alpha$. *De plus, s'il a tourné dans le sens positif,* $\alpha$ *sera positif; s'il a tourné dans le sens négatif,* $\alpha$ *sera négatif.*

D'après cela, le symbole $\widehat{AB}$ représente une infinité de nombres, qui sont appelés *ses différentes déterminations*. Ces nombres sont liés les uns aux autres de manière très simple. Considérons d'abord les déterminations positives. Elles sont obtenues lorsque le mobile va dans le sens positif. Si $\alpha_k$ désigne celle qu'on obtient en arrêtant ce dernier au moment où il arrive pour la $(k+1)^{\text{ième}}$ fois en B, on a évidemment

$$\alpha_k = \alpha_0 + kL, \tag{11}$$

en appelant L la longueur totale de la courbe fermée. De même, si $\beta_k$ désigne la $(k+1)^{\text{ième}}$ détermination négative, on a

$$\beta_k = \beta_0 - kL. \tag{12}$$

De plus, il est évident, sur la figure, que

$$\alpha_0 + |\beta_0| = L$$

ou

$$\alpha_0 - \beta_0 = L, \qquad \beta_0 = \alpha_0 - L. \tag{13}$$

De la comparaison des formules (11), (12), (13), résulte que *toutes les déterminations sont comprises dans la formule générale*

$$\alpha = \alpha_0 + kL,$$

où $k$ désigne un nombre entier quelconque, positif, négatif ou nul.

**12.** Les formules (1), (2), (3), (4) sont encore vraies dans le cas actuel, à condition d'ajouter $kL$ aux seconds membres, le nombre entier $k$ dépendant du choix des déterminations des différents arcs figurant dans les relations. Démontrons, par exemple, la formule de Chasles pour trois points :

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA} = kL. \tag{14}$$

Supposons d'abord qu'en tournant dans le sens positif, on ren-

contre les points dans l'ordre ABC (*fig.* 2). Si $\widehat{AB}_0$, $\widehat{BC}_0$, $\widehat{CA}_0$ désignent les plus petites déterminations positives, la figure montre qu'on a

$$\widehat{AB}_0 + \widehat{BC}_0 + \widehat{CA}_0 = L.$$

Comme on a les déterminations générales $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, en ajoutant aux précédentes des multiples entiers de L, le premier membre de (14) ne saurait être qu'un multiple entier de L.

Si les points se présentent dans l'ordre ACB, on a

$$\widehat{AC} + \widehat{CB} + \widehat{BA} = kL,$$

ce qui revient à (14) en changeant tous les signes.

Sur une courbe fermée, on définit encore l'*abscisse curviligne* du point M par $s = \widehat{OM}$. Mais, il n'y a plus de correspondance parfaite entre les points et les nombres. Si l'on se donne $s$, on en déduit bien un seul point M. Mais, à un point M donné, correspondent une infinité de valeurs pour $s$.

La formule (8) devient ici

(15) $$\widehat{AB} = s_B - s_A + kL.$$

De même, les formules (9) et (10) deviennent

(16) $$s' = s - s_0 + kL,$$

(17) $$s = s_0 + s' + kL.$$

13. Angles. — Définissons d'abord ce qu'on appelle *plan orienté*.

Un point fixe O étant pris dans un plan, une droite peut pivoter dans le plan et autour du point dans deux sens différents. Si l'on convient de choisir l'un de ces sens comme *sens positif de rotation*, on dit que *le plan est orienté*.

Le choix du sens positif est évidemment indépendant du point O. On peut, par exemple, prendre comme terme de comparaison le sens des aiguilles d'une montre.

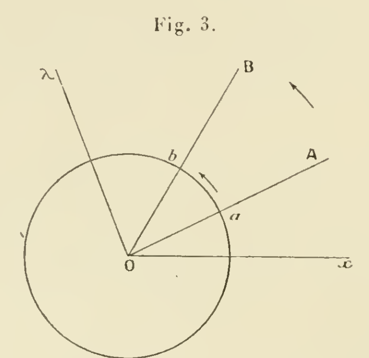
Quand une courbe fermée *convexe* est tracée dans un plan orienté, on peut *l'orienter dans le sens du plan*. Voici ce que nous entendons par là. Prenons le point fixe O à l'intérieur de la courbe. Faisons tourner la demi-droite Oλ dans le sens positif. Le point M

où elle rencontre la courbe décrit celle-ci dans un sens qui est, par définition, le sens positif.

Inversement, quand, dans un plan, on a orienté une courbe fermée convexe, on peut *orienter le plan dans le sens de la courbe.*

14. Cela posé, prenons, dans un plan orienté, deux *demi-droites* issues du même point, OA et OB (*fig.* 3). Elles déterminent un

Fig. 3.




angle, au sens élémentaire du mot. Mais, si nous convenons de leur faire jouer des rôles différents, appelant par exemple OA *côté origine* et OB *côté extrémité*, nous obtenons un *angle orienté.* Nous le représenterons par le symbole (OA, OB) [énoncez : *angle de* OA *avec* OB, en nommant le premier le côté origine].

Nous allons définir la *mesure algébrique de cet angle* dans le plan orienté. A cet effet, du point O comme centre, traçons un cercle de rayon 1. Orientons ce cercle dans le sens du plan (n° 13). Nous obtenons le *cercle trigonométrique.* Soient $a$ et $b$ ses points de rencontre avec OA et OB. Par définition, *la mesure algébrique de l'angle* (OA, OB) *est la mesure algébrique de l'arc* $\widehat{ab}$ sur le cercle orienté. On la représente par la notation $\left(\widehat{OA, OB}\right)$.

Si l'on se reporte au n° 11, on voit qu'il existe *une infinité de déterminations différant entre elles de multiples entiers de* $2\pi$, car la longueur L du cercle trigonométrique est égale à $2\pi$. Si $\alpha$ désigne l'une d'elles, on a

$$\left(\widehat{OA, OB}\right) = \alpha + 2k\pi.$$

Quel que soit $k$, *les lignes trigonométriques de* $(\widehat{OA, OB})$ *sont entièrement déterminées.*

La *formule de Chasles* s'applique encore et s'écrit, par exemple,

$$(\widehat{OA, OB}) + (\widehat{OB, OC}) + (\widehat{OC, OA}) = 2k\pi. \tag{18}$$

*Angle polaire d'une demi-droite.* — Choisissons une demi-droite fixe issue du point O, soit $Ox$, que nous appellerons l'*axe polaire*. Nous appellerons *angle polaire* d'une demi-droite quelconque $O\lambda$, l'angle de $Ox$ avec $O\lambda$, soit $\omega = (\widehat{Ox, O\lambda})$. Il n'est déterminé qu'à $2k\pi$ près. Mais, inversement, sa connaissance détermine complètement $O\lambda$.

Si $\omega_A$ et $\omega_B$ désignent les angles polaires de OA et OB, on a

$$(\widehat{OA, OB}) = \omega_B - \omega_A + 2k\pi; \tag{19}$$

ce qui s'énonce (*cf.* n° 10) :

*La mesure algébrique d'un angle égale l'angle polaire de l'extrémité moins l'angle polaire de l'origine, à $2k\pi$ près.*

Les formules du changement d'axe polaire sont

$$\omega' = \omega - \omega_0 + 2k\pi, \tag{20}$$
$$\omega = \omega' + \omega_0 + 2k\pi. \tag{21}$$

*Remarque.* — Si l'on a seulement besoin des lignes trigonométriques de $(\widehat{OA, OB})$ ou de ses multiples, on peut négliger, dans la formule (19), le terme $2k\pi$, qui n'a aucune influence. Il n'en serait plus de même si l'on voulait calculer les lignes trigonométriques des sous-multiples de $(\widehat{OA, OB})$.

15. *Extensions diverses.* — Les considérations précédentes s'appliquent immédiatement à des *demi-droites tracées dans un plan orienté à partir de points différents de ce plan*. Il suffit de leur substituer, pour toute question d'angle, les demi-droites parallèles et de même sens [1] issues du point fixe O.

---

[1] Par analogie avec la théorie des vecteurs (n° 99), nous qualifierons d'*équipollentes* des demi-droites parallèles et de même sens.

De même, on peut considérer des *axes* ou des *vecteurs tracés n'importe où dans le plan orienté*. On substitue à chacun d'eux ce que nous appellerons *sa demi-droite directrice*, c'est-à-dire une demi-droite issue de O, parallèle à l'axe ou au vecteur et dirigée dans le sens positif de l'axe ou du vecteur.

Soient maintenant *deux droites non orientées* D *et* D' *tracées dans un plan orienté*. Nous appellerons $(\widehat{D, D'})$ [énoncez : angle de D avec D'] l'un quelconque des angles obtenus en orientant arbitrairement les deux droites. Si l'on observe que le fait de remplacer l'une ou l'autre des demi-droites OA et OB par la demi-droite opposée a pour unique conséquence d'augmenter ou de diminuer de $\pi$ chacune des déterminations de $(\widehat{OA, OB})$, on voit que $(\widehat{D, D'})$ est déterminé à un multiple quelconque de $\pi$ près. On peut écrire

$$(\widehat{D, D'}) = \alpha + k\pi.$$

Parmi les lignes trigonométriques de $(\widehat{D, D'})$, *la tangente est seule déterminée sans ambiguïté de signe.*

La formule de Chasles s'applique encore, mais à $k\pi$ près.

Imaginons à présent *deux demi-droites* (*ou deux axes*) *dans un plan non orienté*. Leur angle sera défini en orientant arbitrairement le plan et choisissant arbitrairement le côté origine et le côté extrémité. Si l'on observe que le changement d'orientation du plan, ainsi que l'échange du côté origine avec le côté extrémité, ont pour seul effet de modifier le signe des différentes déterminations, on voit que l'angle V de nos deux demi-droites est donné par une relation de la forme

$$V = 2k\pi \pm \alpha.$$

Parmi ses lignes trigonométriques, *le cosinus est seul déterminé sans ambiguïté de signe.*

*Remarques.* — I. Dans le cas actuel, les deux demi-droites (ou axes) jouent le même rôle. Aussi, peut-on dire « l'angle de ces deux demi-droites », sans énoncer l'une avant l'autre, comme il est nécessaire dans un plan orienté.

II. Lorsqu'on a affaire à deux demi-droites (ou axes) tracées dans l'espace et non dans un même plan, on mène les demi-droites équi-

pollentes (ou directrices) à partir d'un point fixe O. Ces dernières déterminent alors un plan qui, en général, n'est pas orienté. On se trouve donc dans les conditions qui viennent d'être examinées.

On pourrait enfin envisager deux droites non orientées dans un plan non orienté. On serait conduit à des déterminations de la forme $k\pi \pm \alpha$. Les lignes trigonométriques ne seraient plus déterminées qu'en valeur absolue. Un tel cas est sans intérêt pour nous.

## II. — PROJECTIONS.

16. Projections sur un axe. — Soient un axe $x'x$ et un plan P non parallèle à cet axe. On appelle *projection d'un point quelconque* M *de l'espace sur* $x'x$ *parallèlement à* P, le point $m$ où $x'x$ rencontre le plan parallèle à P mené par M. *La projection d'un vecteur* $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{ab}$, qui a pour origine la projection de l'origine et pour extrémité la projection de l'extrémité de $\overrightarrow{AB}$. Ce vecteur projection étant porté par un axe, il y aura lieu de considérer sa mesure algébrique $\overline{ab}$. Nous emploierons souvent, pour abréger, le mot *projection* pour désigner cette mesure algébrique.

Les projections d'un même vecteur sur deux axes parallèles [1] et parallèlement à un même plan ont manifestement même mesure algébrique.

Les projections de deux vecteurs équipollents (nº 99) sur un même axe et parallèlement à un même plan ont encore même mesure algébrique.

Si l'on a l'égalité géométrique (nº 100)

$$\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}, \tag{22}$$

on a, en projetant toujours sur le même axe parallèlement au même plan,

$$\overline{a'b'} = m\overline{ab}. \tag{23}$$

(Les valeurs absolues des deux membres sont égales en vertu des

[1] Quand nous dirons que deux axes sont *parallèles*, il sera entendu qu'ils ont même sens positif. Sinon, ils seront dits *opposés*.

propriétés de proportionnalité bien connues des segments interceptés sur deux droites par des plans parallèles. Quant aux signes, ils sont les mêmes parce que, si deux vecteurs parallèles ont même sens, il en est de même de leurs projections et inversement.)

*L'égalité algébrique* (23) sera dite *la projection de l'égalité géométrique* (22).

17. Imaginons maintenant un deuxième axe $y'y$ tracé n'importe où dans l'espace. Considérons un vecteur $\overrightarrow{AB}$ porté par cet axe et projetons-le en $\overrightarrow{ab}$ sur $x'x$. Nous allons démontrer le théorème suivant, qui a une importance capitale et que, pour cette raison, nous appellerons :

Théorème fondamental. — *La mesure algébrique de la projection $\overrightarrow{ab}$ est égale à la mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$ sur $y'y$ multipliée par la projection du vecteur unitaire de $y'y$ sur $x'x$.*

En effet, soit $m = \overline{AB}$. Soient, d'autre part, $\overrightarrow{OU}$ le vecteur unitaire de $y'y$ (n° 8) et $\overrightarrow{ou}$ sa projection sur $x'x$. On a manifestement l'égalité géométrique

$$\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{OU}.$$

En la projetant sur $x'x$, on obtient l'égalité algébrique (n° 16)

$$\overline{ab} = m\,\overline{ou}$$

ou

(24) $$\overline{ab} = \overline{AB}\,\overline{ou}.$$

C. Q. F. D.

Au lieu de supposer $\overrightarrow{AB}$ sur $y'y$, on pourrait évidemment le supposer seulement parallèle à $y'y$.

Si un vecteur n'est parallèle à aucun axe, on peut encore lui appliquer le théorème fondamental, en imaginant cet axe et lui donnant, par exemple, le sens du vecteur, auquel cas $\overline{AB}$ est simplement la longueur du vecteur.

Si l'on a à projeter plusieurs vecteurs parallèles, il y a avantage à introduire, s'il n'existe pas déjà, un axe parallèle à la direction commune de tous ces vecteurs.

18. Théorème des projections. — *Étant donnés plusieurs vecteurs, la projection de leur somme géométrique* (n° 101) *est la somme algébrique de leurs projections.*

Soient les vecteurs $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, ..., $\overrightarrow{A_nB_n}$, de somme géométrique $\overrightarrow{AB}$. On a donc

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n}. \tag{25}$$

Projetons tous ces vecteurs sur $x'x$; je dis que l'on a [1]

$$\overline{ab} = \overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + \ldots + \overline{a_nb_n}. \tag{26}$$

En effet, construisons le contour polygonal $OP_1P_2\ldots P_n$, dont les côtés consécutifs sont équipollents à $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, ..., $\overrightarrow{A_nB_n}$. Par définition (n° 101), $\overrightarrow{OP_n}$ est équipollent à $\overrightarrow{AB}$. Il nous suffit, dès lors, de démontrer l'égalité

$$\overline{op_n} = \overline{op_1} + \overline{p_1p_2} + \ldots + \overline{p_{n-1}p_n}.$$

Mais, cela n'est autre que la formule (7).

Le théorème des projections est, lui aussi, extrêmement important et nous en ferons un fréquent usage dans la suite.

L'égalité algébrique (26) est dite la projection de l'égalité géométrique (25) sur $x'x$.

19. Projections orthogonales. — Lorsque le plan P est perpendiculaire à $x'x$, on dit que la projection est *orthogonale*. Voici, dans ce cas, ce qu'il y a à ajouter aux considérations précédentes.

Reprenons les deux axes $x'x$ et $y'y$ du n° 17, pour nous occuper de la projection sur $x'x$ du vecteur unitaire OU de $y'y$. Menons par O un axe parallèle à $x'x$, soit X'OX. Projetons orthogonalement le point U en U' sur cet axe. On sait que $\overline{ou} = \overline{OU'}$. D'autre part, si, dans le plan XOy, nous traçons le cercle trigonométrique de centre O, en l'orientant arbitrairement et prenant l'origine des arcs

[1] D'une manière générale, nous désignons par des petites lettres les projections des points désignés par les grandes lettres correspondantes.

sur la demi-droite OX (directrice de X'X), nous savons que $\overline{OU'}$ est, par définition, le cosinus de l'angle $(\widehat{OX, Oy})$. Mais, cet angle est une des déterminations de l'angle V des deux axes $x'x$ et $y'y$ (n° 15). Comme toutes ces déterminations ont le même cosinus (n° 15), on peut énoncer la proposition suivante :

*Étant donnés deux axes dans l'espace, la projection orthogonale du vecteur unitaire de chacun d'eux sur l'autre est égale au cosinus de leur angle.*

Dès lors, le théorème fondamental (n° 17) devient, dans le cas de la projection orthogonale, qui est le plus fréquent dans la pratique :

Théorème fondamental. — *Étant donné un vecteur porté par un axe $y'y$ ou parallèle à cet axe, sa projection orthogonale sur un autre axe $x'x$ est égale à sa mesure algébrique sur $y'y$ multipliée par le cosinus de l'angle des deux axes.*

Si aucun axe n'est parallèle au vecteur, il suffit (n° 17) de multiplier *la longueur du vecteur* par le cosinus de l'angle que fait sa direction positive avec $x'x$.

# CHAPITRE III.

## COORDONNÉES.

20. Notion de coordonnées. — Nous avons vu, au Chapitre précédent, comment on peut déterminer chaque point d'une droite ou d'une courbe par un nombre relatif, appelé *abscisse du point*. On peut étendre cette notion à tous les points d'un plan, ou d'une surface quelconque, ou de l'espace.

S'il s'agit des points d'un plan ou d'une surface, à chacun d'eux on fait correspondre deux nombres $x$ et $y$, qui sont dits ses *coordonnées*. S'il s'agit des points de l'espace, à chacun d'eux on fait correspondre trois nombres $x$, $y$, $z$, qui sont encore dits ses *coordonnées*. De plus, *la correspondance entre les points et les groupes de* (2 *ou* 3) *nombres doit être parfaite*, tout au moins pour une certaine région (du plan, de la surface ou de l'espace).

C'est sur cette notion que repose toute la *Géométrie analytique*. On conçoit, en effet, que, permettant de substituer à chaque point un groupe de nombres, elle permette aussi de substituer aux relations entre points, c'est-à-dire aux propriétés de la Géométrie, des relations entre nombres, lesquelles rentrent dans le domaine de l'Analyse. Un lien étroit est, dès lors, établi entre ces deux sciences, qui constitue la Géométrie analytique et la Géométrie infinitésimale.

Rien ne s'est révélé plus fécond que cette fusion entre deux sciences au premier abord très différentes. Chacune d'elles rend service à l'autre et le géomètre moderne doit être également apte à saisir les raisonnements de la *Géométrie pure* et à transformer les équations de la Géométrie analytique. Là où les premiers sont impuissants ou compliqués, les secondes seront un instrument certain et simple de réussite. Dans d'autres circonstances, au contraire, quelques déductions géométriques remplaceront avantageusement des calculs impraticables. Il faut savoir allier à propos les deux méthodes et les contrôler l'une par l'autre.

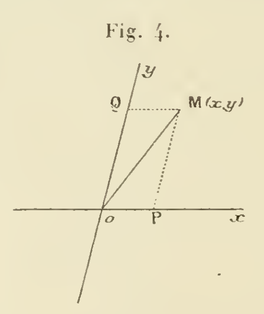
La notion de coordonnées est très générale, en ce sens que la correspondance sur laquelle elle repose présente un grand degré d'indétermination. Suivant le choix qu'on en fait, on obtient tel ou tel *système de coordonnées*.

Un système étant défini, on peut obtenir tous les autres par un simple changement de variables (t. I, n° 139) sur les coordonnées qui le constituent. Dans cet Ouvrage, nous envisagerons rarement ce point de vue général et nous utiliserons presque exclusivement des systèmes de définition géométrique simple, que nous allons d'ailleurs exposer dans ce Chapitre.

21. Coordonnées cartésiennes ou rectilignes. — Les coordonnées que nous emploierons le plus souvent sont les *coordonnées cartésiennes* ou *rectilignes*. Elles ont été inventées par Descartes, qui est regardé, pour cette raison, comme le fondateur de la Géométrie analytique.

*Coordonnées dans le plan.* — Choisissons arbitrairement deux axes $Ox$ et $Oy$, se coupant au point O (*fig.* 4).

Fig. 4.




On appelle *abscisse* du point M la projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur $Ox$ parallèlement à $Oy$. On appelle *ordonnée* du même point la projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur $Oy$ parallèlement à $Ox$.

Si donc on mène MP parallèle à $Oy$ et MQ parallèle à $Ox$, l'abscisse est $\overline{OP}$, l'ordonnée est $\overline{OQ}$. On les représente ordinairement par les lettres respectives $x$ et $y$. En tout cas, on nomme toujours l'*abscisse* la première.

Les deux nombres $x$ et $y$ constituent les *coordonnées du point* M. Ils répondent bien à la notion du numéro précédent, car si la cor-

naissance de M entraîne évidemment celle de $x$ et $y$, il n'est pas moins visible que se donner $x$ et $y$ équivaut à se donner M. Il suffit, en effet, pour obtenir ce point, de porter $\overline{OP} = x$ sur $Ox$, $\overline{OQ} = y$ sur $Oy$, puis de mener par P une parallèle à $Oy$ et par Q une parallèle à $Ox$; ces deux droites se coupent au point M cherché.

Les axes $Ox$ et $Oy$ sont appelés *axes de coordonnées*. Le premier se nomme aussi *axe des* $x$ et le second *axe des* $y$. Le point O est *l'origine des coordonnées* ou simplement *l'origine*.

Le contour polygonal OPM est appelé *contour des coordonnées* du point M, parce que ses côtés ont pour mesures respectives, sur $Ox$ et sur $Oy$, l'abscisse et l'ordonnée. De même, OQM est un contour des coordonnées. On a l'égalité géométrique

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}. \tag{1}$$

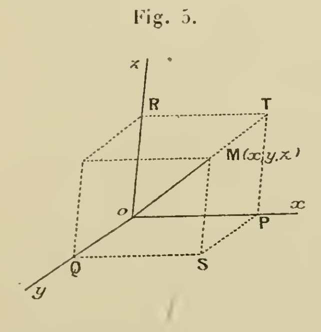
Pour cette raison, on dit souvent que *le vecteur* OM *a pour composantes* $x$ *et* $y$ *suivant les axes*, ce que nous écrirons quelquefois

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}. \tag{1 bis}$$

Les coordonnées sont dites *rectangulaires* ou *obliques*, suivant que les axes sont ou ne sont pas perpendiculaires entre eux.

**22.** Coordonnées dans l'espace. — Choisissons arbitrairement trois axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ issus du même point O et non situés dans un

Fig. 5.




même plan, ou encore, comme on dit, *formant un véritable trièdre* (*fig*. 5).

On appelle *abscisse*, *ordonnée* et *cote* du point M les projections

du vecteur $\overrightarrow{OM}$ faites respectivement sur $Ox$ parallèlement au plan $yOz$, sur $Oy$ parallèlement à $zOx$ et sur $Oz$ parallèlement à $xOy$.

Si donc on mène les plans MSP parallèle à $yOz$, MSQ parallèle à $zOx$ et MTR parallèle à $xOy$, l'abscisse est $\overline{OP}$, l'ordonnée est $\overline{OQ}$, la cote est $\overline{OR}$. On les représente ordinairement par $x$, $y$, $z$. En tout cas, on les énonce toujours dans l'ordre ci-dessus.

Les trois nombres $x$, $y$ $z$ constituent les *coordonnées du point* M. Le lecteur vérifiera, comme nous l'avons fait plus haut, que la correspondance est parfaite entre les éléments M et $(x, y, z)$.

Les trois axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ sont appelés *axes de coordonnées* ou, respectivement, *axes des $x$, des $y$, des $z$*. Les plans $yOz$, $zOx$ $xOy$ sont appelés *plans de coordonnées*, ou, respectivement, *plans des $yz$, des $zx$, des $xy$*. Le point O est l'*origine*. Le trièdre $Oxyz$ est le *trièdre de coordonnées*.

On appelle *contour des coordonnées* tout contour issu de O et dont les côtés sont équipollents à $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$. Il y en a six; exemple : OPSM. On a l'égalité géométrique

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}, \tag{2}$$

et l'on dit que $\overrightarrow{OM}$ *a pour composantes $x$, $y$, $z$ suivant les axes*, ce que nous écrirons encore

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}. \tag{2 bis}$$

Les coordonnées sont *rectangulaires* si les axes sont deux à deux perpendiculaires, auquel cas le trièdre $Oxyz$ est dit *trirectangle*. Dans l'hypothèse contraire, les coordonnées sont *obliques*.

23. Applications. — I. *Projections d'un vecteur.* — Soit le vecteur $\overrightarrow{MM'}$, défini par les coordonnées $x$, $y$, $z$ de son origine et $x'$, $y'$, $z'$ de son extrémité. Cherchons sa projection sur $Ox$ parallèlement à $yOz$. Il suffit d'appliquer la formule de Chasles [nº 10, formule (8)] pour trouver que cette projection est $x'-x$, *abscisse de l'extrémité moins abscisse de l'origine*. De même, les projections sur $Oy$ et $Oz$ sont $y'-y$ et $z'-z$.

II. *Centre des distances proportionnelles.* — Soient $n$ points

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ [1], $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n, z_n)$. A chacun d'eux $M_i$, affectons un certain coefficient positif ou négatif $m_i$. Cela posé, nous appellerons *centre des distances proportionnelles* des points $M_i$ affectés des coefficients $m_i$ le point M défini par l'égalité géométrique

$$(3) \qquad m_1\overrightarrow{MM_1} + m_2\overrightarrow{MM_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{MM_n} = 0.$$

Nous prouverons l'existence d'un tel point et nous aurons du même coup ses coordonnées en projetant (3) sur chacun des axes de coordonnées parallèlement au plan de coordonnées opposé. Projetons, par exemple, sur $Ox$ parallèlement à $yOz$; nous avons

$$(4) \qquad m_1(x_1 - x) + m_2(x_2 - x) + \ldots + m_n(x_n - x) = 0;$$

d'où, en supposant $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \neq 0$;

$$(5) \qquad x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

*Si donc la somme des coefficients n'est pas nulle* [2], il y a un point et un seul répondant à la question; ses coordonnées sont

$$(6) \qquad x = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}, \qquad y = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}, \qquad z = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i}.$$

Théorème. — *On ne change pas le point* M *si l'on remplace plusieurs des points* $M_i$ *par leur centre de distances proportionnelles affecté d'un coefficient égal à la somme de leurs coefficients.*

En effet, remplaçons, par exemple, $M_1$, $M_2$, ..., $M_p$ par leur centre de distances proportionnelles $M'(x', y', z')$ affecté du coefficient

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = m'.$$

Le centre $M''$ relatif aux points $M'$, $M_{p+1}$, ..., $M_n$ a des coordonnées

---

[1] Cette notation, très employée, signifie que les coordonnées du point $M_1$ sont $x_1, y_1, z_1$.

[2] Lorsque $\Sigma m_i$ est nul, les sommes $\Sigma m_i x_i$, $\Sigma m_i y_i$, $\Sigma m_i z_i$ ne l'étant pas toutes, *il n'y a pas de centre des distances proportionnelles*. Si toutes ces sommes sont nulles, il est, au contraire, *indéterminé* : tout point M de l'espace vérifie (3).

telles que

(7) $$x'' = \frac{m'x' + m_{p+1}x_{p+1} + \ldots + m_n x_n}{m' + m_{p+1} + \ldots + m_n}.$$

Mais on a, outre $m' = m_1 + m_2 + \ldots + m_p$,

(8) $$m'x' = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_p x_p.$$

En remplaçant $m'$ et $m'x'$ par ces valeurs dans $x''$, on retrouve $x$. Même chose pour $y''$ et $z''$. Donc, $M''$ coïncide avec M. C. Q. F. D.

*Corollaire.* — On peut déduire de là *la construction suivante du point* M, qu'on donne souvent comme définition du centre des distances proportionnelles : *On construit* $P_1$ *tel que* $\dfrac{\overrightarrow{P_1M_1}}{\overrightarrow{P_2M_2}} = -\dfrac{m_2}{m_1}$, *puis* $P_2$ *tel que* $\dfrac{\overrightarrow{P_2P_1}}{\overrightarrow{P_2M_3}} = \dfrac{-m_3}{m_1+m_2}$, *puis* $P_3$ *tel que* $\dfrac{\overrightarrow{P_3P_2}}{\overrightarrow{P_3M_4}} = \dfrac{-m_4}{m_1+m_2+m_3}$, *et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les* $M_i$. *Le dernier point* $P_{n-1}$ *obtenu est le centre des distances proportionnelles cherché.*

En effet, nous remplaçons d'abord $M_1$ et $M_2$ par leur centre de distances proportionnelles $P_1$ affecté du coefficient $p_1 = m_1 + m_2$, puis $P_1$ et $M_3$ par leur centre $P_2$ affecté du coefficient

$$p_2 = p_1 + m_3 = m_1 + m_2 + m_3,$$

et ainsi de suite. Or, nous savons que toutes ces opérations laissent le point M invariable.

Ceci nous prouve du même coup que, quel que soit l'ordre dans lequel on prend les $M_i$, la construction précédente conduit toujours au même point final.

*Remarque.* — Dans le cas de $n = 2$, le centre des distances proportionnelles est le point qui divise $M_1M_2$ dans le rapport $\dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = -\dfrac{m_2}{m_1}$. Si l'on prend $m_1 = 1$, $m_2 = \lambda$, on voit que les coordonnées du point qui divise $M_1M_2$ dans le rapport $\dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = -\lambda$ sont

(9) $$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

*Centre des moyennes distances.* — Il est obtenu en supposant *tous les coefficients $m_i$ égaux*. Ses coordonnées sont, d'après (5),

$$(10)\qquad \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},\quad \frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n},\quad \frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n},$$

c'est-à-dire les moyennes arithmétiques des coordonnées des points proposés.

Si $n=2$, on a le *milieu du segment* $M_1M_2$

$$(11)\qquad \frac{x_1+x_2}{2},\quad \frac{y_1+y_2}{2},\quad \frac{z_1+z_2}{2}.$$

Si $n=3$, on a le *centre de gravité du triangle* $M_1M_2M_3$ [1]

$$(12)\qquad \frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\quad \frac{z_1+z_2+z_3}{3}.$$

Pour $n=4$, on aurait de même le centre de gravité d'un tétraèdre.

24. Détermination d'une direction. — Les coordonnées cartésiennes se prêtent aussi très bien à la détermination des directions.

Étant donné un axe ou une demi-droite, nous appellerons *point directeur* de cet axe ou de cette demi-droite l'extrémité U du vecteur qui a pour origine l'origine des coordonnées, pour longueur 1 et pour direction et sens les direction et sens de l'axe ou de la demi-droite. Les coordonnées de ce point seront appelées les *paramètres directeurs* de l'axe ou de la demi-droite. *Leur connaissance* entraîne celle du point U et *détermine par suite complètement la direction et le sens de l'axe ou de la demi-droite*.

Les paramètres directeurs sont au nombre de deux en Géométrie plane et de trois en Géométrie dans l'espace. Mais, en aucun cas, ils ne sont indépendants; *ils sont liés par une relation* [2] qu'on peut obtenir en exprimant que la distance OU est égale à l'unité. *Nous ne*

---

[1] On peut le voir en s'appuyant sur la construction donnée plus haut, ou bien en vérifiant l'égalité géométrique $\overrightarrow{GM_1}+\overrightarrow{GM_2}+\overrightarrow{GM_3}=0$.

[2] C'est facile à prévoir, car il suffit d'un angle, dans le plan, de deux angles, dans l'espace (nos 29 et 30), pour déterminer une direction. Les paramètres directeurs sont donc en nombre surabondant d'une unité.

*nous en occuperons que dans le cas des axes rectangulaires* [1], hypothèse dans laquelle elle est fort simple.

Soient d'abord deux axes rectangulaires $Oxy$ et le point directeur U, de coordonnées $(a, b)$. Le contour des coordonnées OAU constitue un triangle rectangle, pour lequel le théorème de Pythagore donne

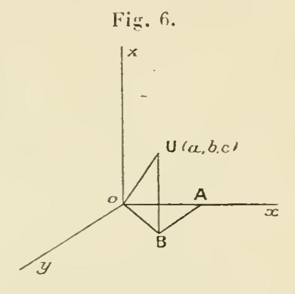
$$\overline{OA}^2 + \overline{AU}^2 = \overline{OU}^2, \tag{13}$$

c'est-à-dire

$$a^2 + b^2 = 1. \tag{14}$$

Si maintenant nous considérons le trièdre trirectangle $Oxyz$ et le

Fig. 6.




contour OABU des coordonnées du point U (*fig.* 6), nous avons, dans les triangles OBU et OAB [2],

$$\overline{OU}^2 = \overline{BU}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{BU}^2 + \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 \tag{15}$$

ou

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1. \tag{16}$$

Lorsque les coordonnées sont rectangulaires, les paramètres directeurs d'une direction sont les projections orthogonales du vecteur unitaire de cette direction sur les axes. Ce sont donc les cosinus des angles que fait la direction avec les axes (nº 19). C'est pourquoi ils portent, dans ce cas, le nom de *cosinus directeurs*.

25. Lorsqu'on veut seulement déterminer la *direction d'une*

---

[1] Pour les axes obliques, voir NIEWENGLOWSKI, *Cours de Géométrie analytique* (Gauthier-Villars), t. I, nºs 47 à 51; t. III, nºs 15 à 18. Nous désignerons dorénavant cet Ouvrage sous la rubrique $N_I$, $N_{II}$, $N_{III}$, suivant qu'il s'agira des Tomes I, II ou III.

[2] On peut aussi se servir d'un théorème sur la diagonale d'un parallélépipède rectangle, dont nous donnons, en somme, la démonstration.

*droite non orientée*, il suffit de se donner les projections sur les axes, parallèlement aux plans de coordonnées ([1]), d'un vecteur quelconque porté par la droite ou, ce qui est équivalent, les coordonnées ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) de l'extrémité V d'un vecteur parallèle ayant pour origine l'origine des coordonnées.

Si l'on imagine d'orienter la droite par le vecteur unitaire $\overrightarrow{OU}$, on a une égalité géométrique de la forme $\overrightarrow{OV} = \rho . \overrightarrow{OU}$, $\rho$ étant un certain nombre positif ou négatif ([2]). Par suite (n° 16), si $a$, $b$, $c$ désignent les paramètres directeurs de la droite ainsi orientée, on a

$$(17) \qquad \alpha = \rho a, \qquad \beta = \rho b, \qquad \gamma = \rho c.$$

Autrement dit, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont des *quantités proportionnelles aux paramètres directeurs*. Nous les désignerons néanmoins souvent, pour abréger, sous le nom de *paramètres directeurs*. Quand les axes seront rectangulaires, il n'y aura aucun danger de les confondre avec les cosinus directeurs. En coordonnées obliques, lorsque nous voudrons spécifier qu'il s'agit des projections du vecteur unitaire, nous dirons *paramètres directeurs unitaires*.

Connaissant les paramètres directeurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ au sens général que nous venons de définir, il est facile d'avoir les paramètres unitaires, ou, pour nous borner au cas des axes rectangulaires, qui seul est intéressant, les cosinus directeurs. Il suffit de tenir compte des équations (17) et (16). On en déduit, par un calcul élémentaire,

$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

d'où

$$(18) \qquad \rho = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Puis,

$$(19) \qquad a = \frac{\alpha}{\rho}, \qquad b = \frac{\beta}{\rho}, \qquad c = \frac{\gamma}{\rho}.$$

Suivant que, dans la formule (18), on prend le signe + ou le signe —, la droite est orientée dans le sens du vecteur $\overrightarrow{OV}$ de projections $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ou dans le sens opposé.

---

([1]) Nous considérons seulement le cas de la Géométrie dans l'espace. Dans le plan, il n'y a rien à changer, à part la suppression d'un axe et de la coordonnée correspondante.

([2]) Ce nombre $\rho$ est égal à $\overline{OV}$ sur la droite orientée.

26. Sens de rotation. — On peut aussi déterminer les directions par des angles. A cet effet, il nous faut, au préalable, définir des sens positifs de rotation.

*Orientation du plan $xOy$.* — Quand, dans un plan, on a deux axes de coordonnées $Oxy$, *on convient toujours de l'orienter de telle manière que* $(\widehat{Ox, Oy})$ *possède une détermination comprise entre* 0 *et* $\pi$. Autrement dit, le sens positif de rotation est celui dans lequel il faut faire tourner la partie positive de l'axe des $x$ pour l'amener sur la partie positive de l'axe des $y$, en ne décrivant qu'un angle inférieur à deux droits. Ce sens est évidemment déterminé sans aucune ambiguïté. Nous l'appellerons souvent, pour abréger, *le sens de $Ox$ vers $Oy$.*

*Sens positif de rotation dans les plans et autour des axes de coordonnées.* — Soit maintenant le trièdre $Oxyz$. Nous prendrons comme *sens positifs de rotation dans les plans* $xOy$, $yOz$, $zOx$, *les sens respectifs de $Ox$ vers $Oy$, de $Oy$ vers $Oz$ et de $Oz$ vers $Ox$.* Ces sens ne changent pas dans une permutation circulaire quelconque effectuée sur les axes.

Nous allons maintenant définir les *sens de rotation autour des axes*. Imaginons qu'*un plan passant par* $Oz$ tourne autour de cette droite. Il peut tourner dans deux sens différents. Nous dirons qu'il *tourne dans le sens positif si sa trace sur $xOy$ décrit ce plan dans le sens positif.* On peut encore dire que le sens positif est celui qui amènerait $zOx$ sur $zOy$ par une rotation inférieure à deux dièdres droits. C'est le *sens de $zOx$ vers $zOy$*. Les sens de rotation autour de $Ox$ et $Oy$ sont, de même, ceux de $xOy$ vers $xOz$ et de $yOz$ vers $yOx$.

27. *Sens positifs de rotation autour d'une droite orientée et dans un plan quelconque de l'espace.* — En supposant toujours l'existence des axes $Oxyz$, on peut aisément orienter, au point de vue de la rotation, un axe quelconque $\lambda'\lambda$ de l'espace. Il suffit d'imaginer qu'on déplace le trièdre $Oxyz$ de telle sorte que $Oz$ vienne se placer sur $\lambda'\lambda$ et dans le même sens. Le sens positif de rotation autour de $Oz$ ne cesse pas, dans ce déplacement, d'être constamment

déterminé. Il l'est donc encore quand $Oz$ est sur $\lambda'\lambda$ et constitue alors *le sens positif de rotation autour de* $\lambda'\lambda$ (¹).

On définit de même le *sens positif de rotation autour d'une demi-droite ou d'un vecteur.*

Il est aisé de se rendre compte que le sens positif de rotation change quand on remplace l'axe (ou la demi-droite, ou le vecteur) par un axe (ou une demi-droite, ou un vecteur) opposé.

*Pour orienter un plan* P, on lui mène, à partir d'un de ses points, une demi-droite perpendiculaire $M\lambda$. Puis, on imagine un plan tournant autour de $M\lambda$ dans le sens positif défini par cette demi-droite. Sa trace sur P décrit celui-ci dans un sens qui est le sens positif de rotation dans P.

Il est évident que ce sens dépend essentiellement de la région de l'espace dans laquelle se trouve $M\lambda$. Si l'on remplace $M\lambda$ par la demi-droite opposée, le sens est changé. La région qui contient $M\lambda$ sera dite *la région positive*. Il est donc *équivalent d'orienter un plan ou de se donner sa région positive.*

28. *Trièdres à gauche et trièdres à droite.* — Il existe d'autres procédés que le précédent pour orienter un axe au point de vue de la rotation. L'un d'eux, fréquemment employé, consiste à imaginer un observateur couché le long de l'axe, dans le sens de l'axe (c'est-à-dire le sens positif allant des pieds à la tête) et à prendre pour sens positif de rotation soit le sens de gauche à droite (qui amène la main gauche de l'observateur sur sa main droite en passant en avant), soit le sens de droite à gauche. L'inconvénient d'un tel procédé (²) est qu'il crée des confusions, en ce sens que les différents géomètres ne sont jamais d'accord sur ce qu'ils appellent sens positif et sens négatif. C'est ainsi, qu'en France, les géomètres adoptent généralement le sens de gauche à droite comme sens positif, tandis que les astronomes adoptent le sens de droite à gauche (sens direct). En Allemagne, les géomètres font comme les astronomes.

La comparaison de notre méthode avec celle de l'observateur nous montre qu'il existe, de ce point de vue, *deux espèces de trièdres.*

---

(¹) Si $\lambda'\lambda$ est $Ox$ ou $Oy$, on retrouve les sens positifs définis au numéro précédent.

(²) Il est néanmoins commode, nous dirons même indispensable, pour distinguer pratiquement les sens de rotation dans les applications et les comparer au sens défini par les axes.

Ceux qui définissent le sens positif comme sens de gauche à droite sont dits *trièdres à gauche*. Les autres sont dits *trièdres à droite*.

Si l'on remplace un axe par l'axe opposé, le trièdre change d'espèce. Il en va de même si l'on permute deux axes [1]. L'espèce ne change pas dans une permutation circulaire.

Un trièdre de coordonnées étant choisi, tout trièdre de même espèce sera dit *trièdre positif*, tout trièdre d'espèce différente sera dit *trièdre négatif*.

29. Angles polaires d'une demi-droite. — Les conventions précédentes étant adoptées, voici comment on peut encore déterminer, par rapport à des axes de coordonnées, une direction, que nous pouvons toujours ramener à être celle d'une demi-droite $O\lambda$ issue de l'origine.

En Géométrie plane, *nous déterminons* $O\lambda$ *par son angle polaire* $\varphi$ (n° 14), *l'axe polaire étant* $Ox$ et le sens positif de rotation le sens défini par les axes (n° 26).

Supposant les axes rectangulaires, calculons les cosinus directeurs en fonction de $\varphi$. On a

$$a = \cos\left(\widehat{Ox, O\lambda}\right) = \cos\varphi.$$

Puis,

$$b = \cos\left(\widehat{Oy, O\lambda}\right).$$

Or, d'après la formule de Chasles (n° 14),

$$\left(\widehat{Oy, O\lambda}\right) = \left(\widehat{Ox, O\lambda}\right) - \left(\widehat{Ox, Oy}\right) = \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

Donc :

$$b = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi.$$

*Les cosinus directeurs d'une demi-droite d'angle polaire* $\varphi$ *sont* $\cos\varphi$ *et* $\sin\varphi$. C'est là un résultat qu'il est bon de retenir une fois pour toutes.

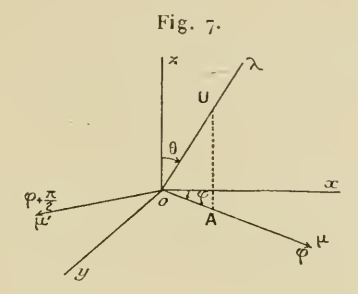
30. Soit maintenant le trièdre trirectangle $Oxyz$ (*fig.* 7). Projetons $O\lambda$ orthogonalement sur $xOy$ et sur la projection obtenue, choisissons arbitrairement une demi-droite $O\mu$. Nous appellerons

---

[1] L'espèce d'un trièdre n'est donc déterminée qu'autant que ses arêtes sont orientées et qu'est fixé l'ordre dans lequel on doit les énoncer.

*longitude* l'angle polaire $\varphi$ de $O\mu$ dans $xOy$. Nous appellerons *colatitude* l'angle $\theta = (\widehat{Oz, O\lambda})$, le plan $zO\lambda$ étant orienté de $Oz$

Fig. 7.




vers $O\mu$, ou, ce qui revient au même, autour de la demi-droite $O\mu'$, qui a pour angle polaire $\varphi + \frac{\pi}{2}$ dans le plan des $xy$.

Les angles $\varphi$ et $\theta$ seront appelés les *angles polaires de* $O\lambda$.

Calculons les cosinus directeurs. Ce sont les projections du vecteur unitaire $\overrightarrow{OU}$ sur les axes. Projetons U en A sur $xOy$, donc sur $O\mu$ (ou sur son prolongement). On va projeter sur les axes l'égalité

$$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AU}. \tag{20}$$

Si nous observons que $\overline{OA}$ sur $O\mu$ est le deuxième cosinus directeur de $O\lambda$ dans le plan $Oz\mu$ et que, d'autre part, $\theta$ est, dans ce plan, l'angle polaire de $O\lambda$, nous avons, d'après un calcul déjà fait (n° 29),

$$\overline{OA} = \sin\theta.$$

Dès lors, les projections de (20) donnent

$$a = \overline{OA}\cos\varphi = \sin\theta\cos\varphi, \qquad b = \overline{OA}\sin\varphi = \sin\theta\sin\varphi, \qquad c = \cos\theta.$$

*Les cosinus directeurs de la demi-droite d'angles polaires* $(\varphi, \theta)$ *sont :*

$$\sin\theta\cos\varphi, \quad \sin\theta\sin\varphi, \quad \cos\theta.$$

C'est encore là un résultat à retenir par cœur.

*Remarque.* — Il est quelquefois commode d'introduire la latitude $\lambda$ qui est l'angle $(\widehat{O\mu, O\lambda})$, le plan étant orienté de $O\mu$ vers $Oz$. On a

(n° 14)

$$\lambda = (\widehat{O\mu, Oz}) + (\widehat{Oz, O\lambda}) = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

en observant que $\theta$ n'est plus mesuré avec le même sens positif. Les cosinus directeurs de $O\lambda$ sont alors

$$\cos\lambda\cos\varphi, \quad \cos\lambda\sin\varphi, \quad \sin\lambda.$$

31. Angle de deux demi-droites. — Soient $O\lambda$ et $O\lambda'$, de cosinus directeurs respectifs $(a, b, c)$ et $(a', b', c')$. Appelons V leur angle. Cet angle se trouvant dans un plan non orienté, son cosinus est seul déterminé sans ambiguïté (n° 15). C'est ce cosinus que nous allons calculer.

A cet effet, projetons orthogonalement le vecteur unitaire de $O\lambda$ sur $O\lambda'$, en nous rappelant que ce vecteur a pour composantes $a$, $b$, $c$ suivant les axes (n° 22). En appliquant le théorème des projections (n° 18), le théorème fondamental (n° 19) et nous souvenant que les angles que fait $O\lambda'$ avec $Ox$, $Oy$, $Oz$ ont pour cosinus respectifs $a'$, $b'$, $c'$, nous avons

$$\cos V = aa' + bb' + cc', \tag{21}$$

formule très importante à retenir par cœur.

*Condition d'orthogonalité*. — On l'obtient évidemment en annulant $\cos V$ :

$$aa' + bb' + cc' = 0. \tag{22}$$

Cette condition garde la même forme quand on substitue aux cosinus directeurs des paramètres directeurs, qui leur sont proportionnels (n° 25).

32. Changement de coordonnées. — Étant donnés le trièdre $Oxyz$ et un autre trièdre $O'x'y'z'$ défini par rapport au premier, tout point M de l'espace possède deux systèmes de coordonnées : les anciennes $x, y, z$, relatives à $Oxyz$ et les nouvelles $x', y', z'$ relatives à $O'x'y'z'$. Nous nous proposons d'établir les formules qui permettent de passer de chaque système à l'autre.

Il faut d'abord définir le nouveau trièdre par rapport à l'ancien. A cet effet, nous nous donnons les coordonnées $x_0$, $y_0$, $z_0$ de $O'$ et les

paramètres directeurs unitaires (nº 25) $a$, $b$, $c$ de $O'x'$, $a'$, $b'$, $c'$ de $O'y'$, $a''$, $b''$, $c''$ de $O'z'$ par rapport à $Oxyz$.

Cela posé, essayons par exemple de calculer $x$, $y$, $z$ en fonction de $x'$, $y'$, $z'$.

Pour avoir $x$, on doit projeter $\overrightarrow{OM}$ sur $Ox$ parallèlement à $yOz$. Mais, on a l'égalité géométrique (nº 22)

$$(23) \qquad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{x'} + \overrightarrow{y'} + \overrightarrow{z'}.$$

Projetons-la sur $Ox$ parallèlement à $yOz$. La projection de $\overrightarrow{OM}$ est $x$. Celle de $\overrightarrow{OO'}$ est $x_0$. Celle de $\overrightarrow{x'}$ est égale à $x'$ multiplié par la projection du vecteur unitaire de $O'x'$ sur $Ox$ parallèlement à $yOz$, c'est-à-dire par le premier paramètre directeur $a$ de $O'x'$. Les projections de $\overrightarrow{y'}$ et de $\overrightarrow{z'}$ sont, de même, $y'a'$ et $z'a''$. Finalement, nous avons

$$x = x_0 + ax' + a'y' + a''z'.$$

En permutant circulairement les lettres $x$, $y$, $z$ et $a$, $b$, $c$, nous aurons $y$ et $z$; de sorte que nous pouvons écrire *les formules du changement de coordonnées :*

$$(24) \qquad \begin{cases} x = x_0 + ax' + a'y' + a''z', \\ y = y_0 + bx' + b'y' + b''z', \\ z = z_0 + cx' + c'y' + c''z', \end{cases}$$

qui sont encore à retenir par cœur.

Elles donnent *les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.* Si l'on voulait les nouvelles en fonctions des anciennes, il suffirait de résoudre le système (24) par rapport à $x'$, $y'$, $z'$. Le déterminant $\|a\ a'\ a''\|$ est nécessairement différent de zéro, car on doit pouvoir tout aussi bien calculer $x'$, $y'$, $z'$ en fonctions de $x$, $y$, $z$ que $x$, $y$, $z$ en fonction de $x'$, $y'$, $z'$.

*Remarque.* — On aura les *formules correspondantes de la Géométrie plane*, en faisant $z = z' = c = c' = c'' = a'' = b'' = 0$, soit donc

$$(25) \qquad \begin{cases} x = x_0 + ax' + a'y', \\ y = y_0 + bx' + b'y'. \end{cases}$$

33. Cas particuliers. — I. *Les nouveaux axes sont parallèles aux premiers* ([1]). — Les formules (24) se réduisent visiblement à

$$(26)\qquad x = x_0 + x', \qquad y = y_0 + y', \qquad z = z_0 + z',$$

formules qu'on pourrait établir très rapidement en projetant sur les axes (anciens ou nouveaux) l'égalité géométrique

$$(27)\qquad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}.$$

On a aussi

$$(28)\qquad x' = x - x_0, \qquad y' = y - y_0, \qquad z' = z - z_0.$$

II. *L'origine ne change pas.* — Il suffit de faire $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ dans les formules (24) qui deviennent alors homogènes en $x'$, $y'$, $z'$ et définissent une *substitution linéaire* (t. I, n° 297).

34. Changement de coordonnées rectangulaires. — Nous allons nous attarder sur le cas très important où les axes anciens et nouveaux sont rectangulaires. Nous supposerons en outre qu'on peut passer des premiers aux seconds par un simple déplacement ([2]). Enfin, nous ne changerons pas d'origine.

I. *Dans le plan.* — On peut passer de $xOy$ à $x'O'y'$ par une rotation d'un certain angle $\varphi$ autour du point O. Les angles polaires de $Ox'$ et de $Oy'$ sont respectivement $\varphi$ et $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Leurs cosinus directeurs sont donc (n° 29)

$$a = \cos\varphi, \qquad b = \sin\varphi,$$
$$a' = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi, \qquad b' = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi.$$

En portant dans (25), où l'on aurait annulé $x_0$ et $y_0$, on a les formules très importantes :

$$(29)\qquad x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \qquad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

---

([1]) Quand on fait un tel changement, on dit qu'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point O' ou, simplement, qu'*on transporte les axes au point* O'.

([2]) C'est-à-dire que les axes $Oxy$ et $Ox'y'$ doivent définir le même sens positif de rotation (n° 26), dans le cas du plan et que les trièdres $Oxyz$ et $O'x'y'z'$ doivent être de même espèce (n° 28), dans le cas de l'espace.

On passe de $Ox'y'$ à $Oxy$ par une rotation de l'angle $-\varphi$. Donc, en changeant $\varphi$ en $-\varphi$ et les accents de place dans (29), on obtient

(30) $$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi:$$

ce qu'on peut vérifier en résolvant (29) par rapport à $x'$, $y'$.

35. II. *Dans l'espace.* — Nous avons les formules

(31) $$\left\{\begin{aligned} x &= ax' + a'y' + a''z', \\ y &= bx' + b'y' + b''z', \\ z &= cx' + c'y' + c''z'. \end{aligned}\right.$$

Mais les paramètres $a, b, c, \ldots$ sont des cosinus directeurs, puisque les anciens axes sont rectangulaires. On a donc (n° 24)

(32) $$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \qquad a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1.$$

En second lieu, les nouveaux axes sont orthogonaux deux à deux; cela entraîne les relations (n° 31)

(33) $$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \qquad a''a + b''b + c''c = 0, \qquad aa' + bb' + cc' = 0.$$

On reconnaît les conditions qui expriment que *la substitution linéaire* (31) *est orthogonale* [1] (t. I, n° 299).

Au reste, on aurait pu le prévoir en remarquant qu'on devait avoir, *a priori*, l'identité

(34) $$x^2 + y^2 + z^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

car les deux membres sont égaux à $\overline{OM}^2$ (n° 177).

Appliquons maintenant ce que nous savons sur les substitutions orthogonales (t. I, n° 299). D'abord, on peut écrire de suite les formules

(35) $$\left\{\begin{aligned} x' &= a\,x + b\,y + c\,z, \\ y' &= a'x + b'y + c'z, \\ z' &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}\right.$$

qui donnent les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes [2]. Puis, on a [2],

(36) $$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \qquad b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \qquad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1;$$

(37) $$bc + b'c' + b''c'' = 0, \qquad ca + c'a' + c''a'' = 0, \qquad ab + a'b' + a''b'' = 0.$$

---

[1] Le lecteur s'explique maintenant l'origine de cette dénomination.

[2] Ces formules sont évidentes, si l'on observe que les cosinus directeurs de $Ox$, par exemple, relativement aux axes $Ox'y'z'$, sont $a$, $a'$, $a''$.

On sait maintenant que le *déterminant des neuf cosinus*

$$(38)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

est égal à $\pm 1$. Je dis qu'il est égal à $+1$.

Pour le prouver, employons l'artifice suivant. $\Delta$ est une fonction continue des cosinus (t. I, n° 282). Donc, si l'on déplace $Ox'y'z'$ d'une manière continue, il ne peut varier que d'une manière continue. Comme ses seules valeurs possibles sont $+1$ et $-1$, il ne varie pas. Profitons-en pour l'amener sur $Oxyz$, ce qui est possible, par hypothèse (n° 34). Nous avons alors

$$a = 1, \quad b = c = 0, \quad a' = 0, \quad b' = 1, \quad c' = 0;$$
$$a'' = b'' = 0, \quad c'' = 1, \quad \Delta = 1.$$

Donc, dans le cas général, $\Delta$ est bien égal à $+1$.

*Remarque.* — Si les deux trièdres étaient d'espèces différentes, on aurait $\Delta = -1$, comme on le verrait en amenant $Ox'$ sur $Ox$, $Oy'$ sur $Oy$ et $Oz'$ sur la demi-droite opposée à $Oz$.

Signalons enfin les formules relatives aux mineurs de $\Delta$ (t. I, n° 299) :

$$(39)\qquad a = b'c'' - c'b'', \qquad b = c'a'' - a'c'', \qquad c = a'b'' - b'a'', \qquad \ldots,$$

qui permettent d'*écrire immédiatement les cosinus directeurs de $Ox'$ connaissant ceux de $Oy'$ et de $Oz'$*.

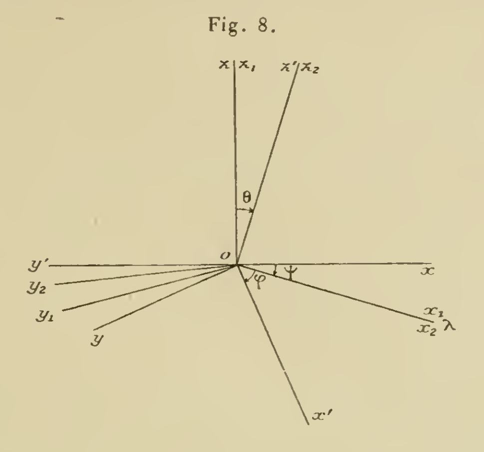
Si les deux trièdres sont d'espèces différentes, il faut changer les signes des premiers membres.

36. Angles d'Euler. — La position du trièdre $Ox'y'z'$ par rapport à $Oxyz$ dépend de trois paramètres, car les neuf cosinus $a, b, \ldots$ sont liés par six relations indépendantes et six seulement, à savoir les équations (32) et (33). On peut se proposer de résoudre le problème du changement de coordonnées en n'introduisant que ces trois paramètres. On y arrive par le moyen des *angles d'Euler*.

Les plans $xOy$ et $x'Oy'$ étant supposés distincts, choisissons arbitrairement sur leur intersection une demi-droite $O\lambda$ (*fig.* 8). Nous

appellerons $\psi$ ou *angle de précession* [1] l'angle polaire de cette demi-droite dans le plan $Oxy$. Nous appellerons $\theta$ ou *angle de nutation* [1]

Fig. 8.




l'angle $\left(\widehat{Oz, Oz'}\right)$, le plan de cet angle étant orienté par la demi-droite $O\lambda$, qui lui est visiblement perpendiculaire. Enfin, nous appellerons $\varphi$ ou *angle de rotation propre* [1] l'angle $\left(\widehat{O\lambda, Ox'}\right)$ dans le plan orienté $Ox'y'$.

Nous allons faire voir que ces trois angles, qu'on appelle les *angles d'Euler*, déterminent complètement le trièdre $Ox'y'z'$. Pour cela, nous allons montrer qu'on peut passer du trièdre $Oxyz$ (ou trièdre T) au trièdre $Ox'y'z'$ (ou T') par trois rotations consécutives.

*Première rotation ou précession.* — Rotation de l'angle $\psi$ autour de $Oz$. Le trièdre T vient en $T_1$ ou $Ox_1y_1z_1$, $Ox_1$ suivant $O\lambda$.

*Deuxième rotation ou nutation.* — Rotation de l'angle $\theta$ autour de $O\lambda$ ou $Ox_1$. Le trièdre $T_1$ vient en $T_2$ ou $Ox_2y_2z_2$, $Oz_2$ suivant $Oz'$.

*Troisième rotation ou rotation propre.* — Rotation de l'angle $\varphi$ autour de $Oz'$ ou $Oz_2$. Le trièdre $T_2$ vient en T', car $Oz_2$ reste sur $Oz'$ et $Ox_2$ vient sur $Ox'$, ce qui exige que $Oy_2$ vienne sur $Oy'$, car $T_2$ et T' sont trirectangles et de même espèce.

Rien n'est plus aisé maintenant que d'établir les formules du changement de coordonnées. Appelons $(x, y, z)$, $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$,

---

[1] Ces dénominations sont empruntées à la Mécanique et à l'Astronomie.

$(x', y', z')$ les coordonnées de M par rapport aux trièdres $T, T_1, T_2 T'$. Le passage de chaque trièdre au suivant se faisant par une rotation autour d'un de ses axes, on est ramené chaque fois à un changement de coordonnées rectangulaires dans le plan. En appliquant les formules (29), on a successivement :

$$(40)\quad \begin{cases} x = x_1 \cos\psi - y_1 \sin\psi, & y = x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi, & z = z_1; \\ x_1 = x_2, & y_1 = y_2 \cos\theta - z_2 \sin\theta, & z_1 = y_2 \sin\theta + z_2 \cos\theta; \\ x_2 = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, & y_2 = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi, & z = z'. \end{cases}$$

On pourrait aisément en tirer $x, y, z$ en fonction de $x', y', z'$. En comparant avec (31), on aurait les neuf cosinus en fonction des angles d'Euler.

37. Extensions diverses. — La considération des coordonnées cartésiennes conduit à des extensions, qui sont indispensables, comme on le verra dans la suite, pour la généralité de certaines propositions géométriques.

Points imaginaires. — Jusqu'à présent, les coordonnées étaient des nombres essentiellement réels. Nous admettrons dorénavant les coordonnées imaginaires. Quels que soient les nombres $x, y, z$, nous conviendrons de dire qu'ils définissent toujours un point M. Si les trois nombres sont réels, *le point sera réel*. Si l'un au moins d'entre eux est imaginaire, *le point sera imaginaire*. C'est évidemment là une simple façon de parler et les points imaginaires n'ont, en somme, qu'une existence purement analytique. Mais cette façon de parler est fort commode et, tout paradoxal que cela puisse paraître de prime abord, l'introduction des éléments imaginaires en Géométrie s'est révélée comme excessivement féconde au point de vue de l'avancement de cette science dans le domaine réel.

Deux points M et M' sont *imaginaires conjugués*, si leurs coordonnées de même nom sont imaginaires conjuguées (t. I, n° 28).

*On convient d'étendre aux points imaginaires les définitions et formules relatives aux points réels.* C'est ainsi que le milieu des deux points M et M' est, que ceux-ci soient réels ou non, le point de coordonnées $\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}$. Observons, à ce propos, que *le milieu de deux points imaginaires conjugués est réel*, car son abscisse, par exemple, est égale à la partie réelle commune à $x$ et à $x'$.

38. Points a l'infini; coordonnées homogènes. — Imaginons qu'un point M se déplace dans l'espace de telle façon que la distance OM croisse au delà de toute limite [1]. Nous dirons que *le point* M *s'éloigne à l'infini.*

Dans le cas particulier où OM tend en outre vers une droite fixe Oλ, nous dirons que M *va à l'infini dans la direction* Oλ ou encore qu'il tend vers *le point à l'infini dans la direction* Oλ ou *sur* Oλ.

D'après cette définition, il est évident que *deux droites parallèles ont le même point à l'infini.* On dit aussi qu'*elles se coupent à l'infini.*

Soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées cartésiennes variables du point M précédent. A la limite, l'une au moins d'entre elles est infinie. Si Oλ ne se trouve dans aucun plan de coordonnées, elles le deviennent toutes les trois. Réciproquement, si $x$, $y$, $z$ deviennent infinis, le point M va à l'infini; mais, on ne sait plus dans quelle direction, si direction il y a. On tourne cette difficulté par l'introduction des *coordonnées homogènes* [2].

39. *On appelle coordonnées homogènes du point* $M(x, y, z)$ *tout groupe de quatre nombres* X, Y, Z, T *non tous nuls et tels que*

$$\frac{X}{T} = x, \qquad \frac{Y}{T} = y, \qquad \frac{Z}{T} = z.$$

Un point donné admet une infinité de systèmes de coordonnées homogènes obtenus en multipliant l'un d'entre eux par un facteur arbitraire. En particulier, en supposant $T = 1$, X, Y, Z deviennent les coordonnées ordinaires.

Cela posé, imaginons que le point M aille à l'infini dans la direction Oλ de paramètres directeurs $a$, $b$, $c$. On peut prendre à chaque instant X, Y, Z comme paramètres directeurs de OM. A la limite, ces trois nombres doivent donc devenir proportionnels à $a$, $b$, $c$. On peut même supposer qu'ils deviennent égaux à $a$, $b$, $c$, en utilisant

---

(1) Ceci n'a de sens précis qu'autant qu'on suppose les coordonnées de M et, par suite, la distance OM fonctions d'un certain paramètre, pour une valeur particulière duquel OM devient infini (t. I, n° 58). Quand on s'abstient de fixer un paramètre, on s'imagine instinctivement un mouvement du point M et l'on choisit, en somme, le temps pour paramètre.

(2) Les coordonnées homogènes ont aussi une autre utilité, en ce sens qu'elles permettent de simplifier certaines formules de Géométrie analytique.

le facteur arbitraire par lequel on peut toujours les multiplier, en même temps que T. D'autre part, l'une au moins des coordonnées $x$, $y$, $z$ devient infinie. Comme X, Y, Z restent tous trois finis, il faut que T tende vers zéro. Donc, *lorsque le point* M *va à l'infini dans la direction* O$\lambda$, *un de ses systèmes de coordonnées homogènes tend vers* ($a$, $b$, $c$, o).

*Réciproquement*, si X, Y, Z, T tendent respectivement vers $a$, $b$, $c$, o, comme l'un au moins des paramètres directeurs $a$, $b$, $c$ n'est pas nul, il y a au moins une des coordonnées $x$, $y$, $z$ qui devient infinie. De plus, les paramètres directeurs X, Y, Z de OM ont pour limites $a$, $b$, $c$; donc, OM a pour position limite O$\lambda$ et le point M va à l'infini dans la direction O$\lambda$. Finalement, on voit qu'il est légitime de dire que *le point à l'infini dans la direction de paramètres directeurs $a$, $b$, $c$ a pour coordonnées homogènes* ($a$, $b$, $c$, o).

Les coordonnées homogènes permettent donc de distinguer entre eux les différents points à l'infini, ce que ne permettaient pas les coordonnées ordinaires. *Quand on emploie les coordonnées homogènes, les points à l'infini ne donnent jamais naissance à aucune difficulté particulière* et ne diffèrent, au point de vue analytique, des points à distance finie que par la condition T $=$ o. Nous ferons grand usage de cette importante propriété.

40. Coordonnées polaires. — Un autre système de coordonnées très employé, surtout en Géométrie plane, est celui des *coordonnées polaires*.

I. *Dans le plan.* — Le plan étant orienté, on choisit un axe O$x$, appelé *axe polaire*, le point O s'appelant *pôle*. Sur la droite OM, on choisit un sens positif quelconque, de manière à obtenir une demi-droite O$\lambda$. L'angle polaire $\omega$ de cette demi-droite est appelé l'*angle polaire du point* M. La mesure algébrique $\overline{OM} = \rho$ sur O$\lambda$ est appelée le *rayon vecteur du point* M. Les nombres $\rho$ et $\omega$ sont les *coordonnées polaires de* M.

Il est évident que la connaissance de ces coordonnées entraîne celle du point. Mais, la réciproque n'est pas vraie. A un point M donné correspondent *une infinité de déterminations* (¹) pour ($\rho$, $\omega$). Soit,

(¹) La notion de coordonnées diffère donc un peu ici de celle que nous avons donnée au n° 20. Mais, cela n'a pas d'importance pratique.

en effet, $r$ la longueur OM. Si l'on oriente $O\lambda$ de O vers M, on a : $\rho = r$ et $\omega = \alpha + 2k\pi$, en appelant $\alpha$ une des déterminations de $(\widehat{Ox, OM})$. Si l'on oriente $O\lambda$ dans le sens opposé, on a

$$\rho = -r \quad \text{et} \quad \omega = \alpha + (2k+1)\pi.$$

Les différentes déterminations des coordonnées de M sont donc données par les formules

$$(41) \qquad \begin{cases} \rho = r, & \omega = \alpha + 2k\pi; \\ \rho = -r, & \omega = \alpha + (2k+1)\pi. \end{cases}$$

*Relations avec les coordonnées cartésiennes rectangulaires.* — A l'axe polaire $Ox$ adjoignons un axe $Oy$ d'angle polaire $\frac{\pi}{2}$. Si $x$ et $y$ sont les coordonnées du point M par rapport aux axes $Oxy$, on a, en projetant $\overrightarrow{OM}$ et se souvenant que les cosinus directeurs de $O\lambda$ sont $\cos\omega$ et $\sin\omega$ (n° 29) :

$$(42) \qquad x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega.$$

On en tire, si l'on veut [1],

$$(43) \qquad \rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \cos\omega = \frac{x}{\rho}, \qquad \sin\omega = \frac{y}{\rho}.$$

*Changement d'axe polaire.* — On ne change jamais le pôle; mais il y a souvent lieu de changer d'axe polaire. Si $\omega_0$ désigne l'angle polaire du nouvel axe, on peut prendre évidemment (n° 14)

$$\rho = \rho', \qquad \omega = \omega_0 + \omega' \text{ [2]}.$$

II. *Dans l'espace.* — Partons d'un trièdre trirectangle $Oxyz$. Prenons sur la droite OM une demi-droite $O\lambda$. Soient $\varphi$, $\theta$ ses angles polaires relativement à $Oxyz$ (n° 30) et soit $\rho$ la mesure algébrique

---

[1] On a aussi $\tan\omega = \frac{y}{x}$. Mais, *si l'on a déjà choisi le signe de* $\rho$, cela ne suffit pas pour déterminer $\omega$. Cela le définit, en effet, seulement à $k\pi$ près, tandis que les formules (43), qui donnent à la fois $\cos\omega$ et $\sin\omega$, le définissent à $2k\pi$ près.

[2] Nous négligeons les $2k\pi$ de la formule (21) du n° 14, à cause de l'indétermination de $\omega$ et $\omega'$ [formules (41)]. De même, nous négligeons : $\rho = -\rho'$, $\omega = \omega_0 + \omega' + \pi$.

de $\overrightarrow{OM}$ sur $O\lambda$. *Les trois nombres* $\varphi$, $\theta$, $\rho$ *sont les coordonnées polaires de* M [1].

*Coordonnées semi-polaires.* — Un système plus employé est le suivant. Projetons M en $m$ sur $xOy$. Soient $\rho$ et $\omega$ les coordonnées polaires de $m$ dans $xOy$. Soit $z$ la cote de M. Les trois nombres $\rho$, $\omega$, $z$ sont appelés *les coordonnées semi-polaires* ou *cylindriques du point* M.

[1] Ils ne sont pas entièrement déterminés et il y aurait lieu d'établir des formules analogues aux formules (41). C'est ce que pourra faire le lecteur à titre d'exercice.

# CHAPITRE IV.

## LIGNES ET SURFACES.

41. Équation d'une ligne dans le plan. — Maintenant que nous savons représenter les points par des nombres, il s'agit de voir comment on pourra représenter des assemblages de points. En Géométrie plane, le seul assemblage qui nous intéresse est la *ligne*. Cherchons donc de quelle manière il est possible de déterminer analytiquement une ligne donnée (C) ([1]).

Tout d'abord, il est clair que les coordonnées, que nous supposerons d'abord cartésiennes, des différents points de cette ligne ne sauraient prendre indépendamment des valeurs arbitraires, sans quoi la ligne passerait par tous les points du plan. Elles sont nécessairement liées par une relation

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

et par une seule, car s'il y en avait une autre, on pourrait résoudre par rapport à $x$ et $y$, et la ligne ne comprendrait qu'un nombre fini de points.

Réciproquement, considérons tous les points du plan dont les coordonnées vérifient (1). Imaginons qu'on donne à $x$ une valeur déterminée. L'équation (1) admet un certain nombre de racines en $y$, soient $y_1, y_2, y_3, \ldots$, auxquelles correspondent les points $M_1(x, y_1)$, $M_2(x, y_2)$, $M_3(x, y_3)$, .... Si maintenant on fait varier $x$ de $-\infty$ à $+\infty$, ces points se déplacent dans le plan et décrivent des arcs de

---

([1]) Dans la pratique, les lignes (et surfaces) auront toujours une définition géométrique, quand elles ne nous seront pas données analytiquement. Mais, on peut néanmoins concevoir une ligne (ou surface), sans songer à aucun mode de définition, en imaginant un dessin de trait idéalement fin.

Les concepts de ligne et de surface peuvent donner lieu à des discussions philosophiques, dont la place n'est pas dans cet Ouvrage.

courbe. *L'ensemble de tous ces arcs constitue la courbe définie par l'équation* (1) [1].

Cette courbe (C′) comprend nécessairement la ligne (C) qui nous a servi de point de départ. Elle peut ne comprendre qu'elle. Mais, il peut arriver aussi que (C) ne soit qu'une partie de (C′), soit que l'équation (1) puisse se décomposer en plusieurs autres, soit qu'il y ait impossibilité de représenter la ligne proposée par une équation non soumise à des restrictions. Nous verrons des exemples de l'un et l'autre cas.

D'une façon générale, *l'équation* (1) *sera dite l'équation de la ligne* (C) *si les coordonnées de tout point de* (C) *vérifient* (1) *et si, réciproquement, tout point dont les coordonnées vérifient* (1) *appartient à* (C).

Ce qui vient d'être dit des coordonnées cartésiennes pourrait se répéter avec des coordonnées quelconques. Il est plus simple de remarquer qu'on passe du système cartésien à tout autre par des formules telles que

$$(2) \qquad x = \varphi(x', y'), \qquad y = \psi(x', y'),$$

et que, si la ligne (C) est représentée par l'équation (1) dans le premier système, elle sera représentée, dans le second, par l'*équation transformée*

$$(3) \qquad f[\varphi(x', y'), \psi(x', y')] = 0.$$

*Remarque.* — Le raisonnement fait plus haut est en défaut lorsque l'équation (1) ne renferme pas $y$. Dans ce cas, elle est vérifiée pour un certain nombre de valeurs $x_1$, $x_2$, ..., de $x$ et quel que soit $y$.

---

(1) Si la fonction $f(x, y)$ est continue et admet des dérivées partielles du premier ordre, cette courbe répond à la notion expérimentale qu'éveille en notre esprit le mot ligne. Mais, on peut imaginer des fonctions pour lesquelles cette notion disparaît totalement. L'étude des courbes correspondantes rentre plutôt dans le domaine de la haute Analyse que dans celui de la Géométrie et nous n'en rencontrerons jamais aucun exemple.

Les arcs décrits par les points $M_i$ ne s'étendent pas nécessairement à l'infini à droite et à gauche. Ils peuvent cesser d'exister, en totalité ou en partie, en même temps que les $y_i$ correspondants, quand $x$ pénètre dans certains intervalles.

Le nombre des racines $y_i$ et par suite des arcs constitutifs de la courbe peut quelquefois être infini. Mais cela n'arrive jamais que pour des fonctions transcendantes particulières.

Or, le lieu des points dont l'abscisse a une valeur donnée est évidemment une droite parallèle à $Oy$. Donc, *si l'équation* (1) *ne renferme pas* $y$, *elle représente* un ensemble ou, comme on dit encore, *un faisceau de droites parallèles à* $Oy$; de même, *si elle ne renferme pas* $x$, *elle représente un faisceau de droites parallèles à* $Ox$.

42. Lignes algébriques. — *On appelle ligne algébrique toute ligne dont l'équation, en coordonnées cartésiennes, peut être obtenue en égalant à zéro un polynome en* $x$ *et* $y$. Le degré de ce polynome est appelé *degré de la ligne*.

Montrons que cette définition est *indépendante du choix des axes*.

Supposons que la fonction $f(x, y)$ du numéro précédent soit un polynome de degré $m$. Puis, prenons de nouveaux axes $O'x'y'$. La nouvelle équation sera de la forme (nº 32)

$$(4) \qquad f(x_0 + ax' + a'y', y_0 + bx' + b'y') = 0.$$

Le premier membre est encore un polynome en $x'$, $y'$, dont le degré $m'$ ne saurait dépasser $m$, puisque $x$ et $y$ sont du premier degré en $x'$, $y'$. D'autre part, $m$ ne peut être supérieur à $m'$, parce que le retour des nouvelles coordonnées aux anciennes se fait par des formules analogues. Dès lors, on a $m' = m$ et, quelle que soit la manière de choisir les axes, la ligne (C) est toujours algébrique et de degré $m$.

43. Cette invariance du degré a, du reste, une explication géométrique fort simple, résultant du théorème suivant :

Théorème. — *Toute ligne algébrique de degré* $m$ *est rencontrée en* $m$ *points par toute droite du plan.*

En effet, en choisissant convenablement les axes, ce qui est permis, nous pouvons supposer que la droite sécante est $Ox$. Il suffit dès lors de faire $y = 0$ dans l'équation (1) pour avoir *l'équation aux* $x$ *des points de rencontre :*

$$(5) \qquad f(x, 0) = 0.$$

Cette équation sera généralement une équation algébrique de

degré $m$ et, comme telle, admettra $m$ racines (t. I, n° 219), auxquelles correspondront $m$ points d'intersection.

Toutefois, il est nécessaire de faire certaines conventions pour que l'énoncé précédent soit tout à fait général.

D'abord, il peut arriver que le degré de (5) soit inférieur à $m$ d'un certain nombre $p$ d'unités. Dans ce cas, on dit que *$p$ des points de rencontre sont à l'infini*. On justifie ce langage en démontrant que si une sécante non parallèle à $Ox$ tend vers cette droite, parmi ses points d'intersection avec la courbe, il y en a $p$ dont la distance à l'origine croît au delà de toute limite.

En second lieu, *si l'équation* (5) *possède une racine multiple d'ordre* $\alpha$, *le point correspondant doit être compté* $\alpha$ *fois*.

Enfin, si l'équation (5) possède des racines imaginaires, il faut compter, parmi l'intersection, *les points imaginaires* (n° 37) correspondants.

44. Théorème. — *Étant donnés deux polynomes $f(x, y)$ et $g(x, y)$, pour qu'en les annulant on définisse la même courbe, il faut et il suffit qu'ils soient constitués par les mêmes monomes affectés de coefficients proportionnels.*

1° *La condition est suffisante.* — Car si elle est remplie, on a une identité de la forme

$$g(x, y) \equiv kf(x, y) \qquad (k = \text{const.}) \tag{6}$$

et, par suite, tout point qui annule $f$ annule $g$ et réciproquement.

2° *La condition est nécessaire.* — Si les équations $f = 0$ et $g = 0$ représentent la même courbe (C), elles doivent avoir les mêmes racines en $x$ pour toute valeur numérique attribuée à $y$, puisque ces racines sont les abscisses des points de rencontre de (C) avec la parallèle à $Ox$ qui constitue le lieu des points du plan d'ordonnée $y$. Par suite, les polynomes $f$ et $g$, considérés comme des polynomes en $x$, doivent avoir leurs coefficients proportionnels (t. I, n° 205). Autrement dit, on doit avoir une identité de la forme (6), où $k$ désigne, jusqu'à présent, une constante relativement à $x$, c'est-à-dire une fonction de la seule variable $y$. Mais, le même raisonnement répété en échangeant les rôles des deux axes nous prouve que $k$ ne doit dépendre que de $x$.

Ces deux conditions ne peuvent être simultanément réalisées que si $k$ est une constante absolue, auquel cas les polynomes jouissent bien des propriétés qu'indique l'énoncé (t. I; n° 200 *bis*).

En coordonnées homogènes (n° 39), l'équation (1) s'écrit

$$f\left(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}\right) = 0$$

ou, en désignant par F(X, Y, T) le polynome obtenu en rendant $f(x, y)$ homogène,

$$F(X, Y, T) = 0.$$

Une courbe non algébrique est dite *transcendante*. Quelles que soient les transformations qu'on fasse subir à son équation cartésienne, il est impossible de la mettre sous la forme (1), où $f(x, y)$ désignerait un polynome.

45. Équations paramétriques d'une ligne. — Un autre mode de représentation, souvent plus commode que le précédent, est celui de la *représentation paramétrique*.

A chaque point M de la courbe on fait correspondre un nombre $t$, qui est dit son *paramètre* [1]. On choisit généralement le mode de correspondance de telle manière que, lorsque $t$ varie dans un certain intervalle $(t_0, t_1)$, le point M décrit la courbe entière ou bien l'arc qu'on veut se borner à étudier. En outre, une variation continue de $t$ entraîne un déplacement continu de M, sauf peut-être pour certaines valeurs particulières. Enfin, dans les applications, le paramètre a très souvent une signification géométrique simple et intéressante, telle que : abscisse curviligne du point, angle polaire de la tangente ou de la normale, etc. [2].

Le mode de correspondance entre M et $t$ étant choisi, il est clair que les coordonnées de M sont des fonctions déterminées de $t$, soit

$$(7) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t).$$

---

(1) Ce paramètre est, en somme, la coordonnée du point M sur la courbe.

(2) On peut aussi parfois prendre $x$ (ou $y$) pour paramètre. On est alors conduit à une équation de la forme $y = f(x)$ [ou $x = f(y)$], qui rentre aussi, si l'on veut, dans la forme (1).

On dit que les équations (7) constituent un système d'*équations paramétriques de la courbe* (¹).

Une courbe étant donnée, il existe une *infinité de manières de la représenter paramétriquement*, qui toutes se déduisent de l'une d'elles par un changement de variable sur le paramètre

$$t = \varphi(t').$$

Si la courbe est définie par l'équation (1), on peut imaginer qu'on choisisse arbitrairement la fonction $x = f(t)$. En portant dans (1) et résolvant par rapport à $y$, on obtient $g(t)$.

Plus généralement, on peut poser

$$(8) \qquad g(x, y) = t,$$

$g$ désignant une fonction quelconque de $x$ et $y$, puis résoudre le système (1), (8) par rapport à $x$ et à $y$.

*Réciproquement*, donnons-nous, de manière quelconque, les équations (7). A chaque valeur de $t$ correspond un point M. Si nous faisons varier $t$, M décrira une ligne, qui sera donc définie par les équations paramétriques (7). Dans ce cas, la signification géométrique du paramètre pourra être plus ou moins simple.

Si l'on veut avoir l'équation de la courbe, au sens du nº 41, ou, comme nous dirons quelquefois, son *équation implicite*, il suffit d'*éliminer t entre les équations paramétriques* (nº 58).

46. Intersection de deux courbes. — Il est toujours aisé, théoriquement du moins, de calculer les coordonnées des points d'intersection de deux courbes définies analytiquement.

I. *Les deux courbes sont définies par leurs équations implicites.* — Soit à trouver l'intersection de la courbe (1) avec la courbe

$$(9) \qquad g(x, y) = 0.$$

Il suffit de résoudre le système (1), (9) par rapport à $x$ et $y$. A chaque solution $(x, y)$ correspond un point d'intersection.

*Si les courbes sont algébriques et de degrés respectifs m et p*,

(¹) Quand on change d'axes de coordonnées, il faut calculer les nouvelles coordonnées en fonctions des anciennes pour avoir les nouvelles équations paramétriques.

*le nombre de leurs points de rencontre est mp.* Cela résulte en effet du théorème de Bezout (t. I, n° 238), à condition de compter les points à l'infini et les points imaginaires, et de tenir compte des ordres de multiplicité des solutions.

II. *Les deux courbes sont définies par leurs équations paramétriques.* — Soit à trouver l'intersection de la courbe (7) avec la courbe

$$x = \varphi(\theta), \qquad y = \psi(\theta). \tag{10}$$

A tout point de rencontre correspondent une valeur pour $t$ et une valeur pour $\theta$ telles que

$$f(t) = \varphi(\theta), \qquad g(t) = \psi(\theta). \tag{11}$$

Réciproquement, si $(t, \theta)$ désigne une solution du système (11), en portant, soit la valeur de $t$ dans (7), soit la valeur de $\theta$ dans (10), on aura les coordonnées d'un point d'intersection.

III. *Les courbes sont définies, l'une par son équation implicite, l'autre par ses équations paramétriques.* — Soit à trouver l'intersection des courbes (1) et (7). Les $t$ des points de rencontre sont donnés par l'équation

$$f[f(t), g(t)] = 0. \tag{12}$$

47. Équation d'une surface. — Dans l'espace, deux assemblages de points vont nous intéresser : la *surface* et la *ligne*.

Les coordonnées cartésiennes $x$, $y$, $z$ des différents points d'une surface donnée (S) ne sauraient prendre des valeurs indépendamment arbitraires et sont liées nécessairement par une relation

$$f(x, y, z) = 0, \tag{13}$$

et par une seule, car, s'il y en avait une autre, on ne pourrait pas choisir arbitrairement les valeurs de $x$ et $y$, par exemple, ce qui doit, au contraire, être possible [1].

[1] Cela revient à dire que toute parallèle à $Oz$ rencontre la surface. Cela est vrai (du moins tant que la parallèle reste dans certaines régions) si la surface n'est pas un cylindre de génératrices parallèles à $Oz$. Mais, dans ce cas, il suffit de remplacer $x$ et $y$ par $x$ et $z$ ou bien par $y$ et $z$, puisque aucune surface ne peut être à la fois un cylindre parallèle à $Oz$, un cylindre parallèle à $Oy$ et un cylindre parallèle à $Ox$.

*Réciproquement*, considérons tous les points de l'espace dont les coordonnées vérifient (13). Ceux de ces points qui sont dans le plan $xO'y$, parallèle à $xOy$ et lieu des points de cote $h = \overline{OC}$, constituent une courbe $(C_h)$ définie, par rapport aux axes $O'x$ et $O'y$, par l'équation

$$(14) \qquad f(x, y, h) = 0.$$

Si $h$ varie, cette courbe engendre une surface, qui comprend certainement la surface (S), mais peut aussi, dans certains cas, en comprendre une ou plusieurs autres.

D'une façon générale, *l'équation* (13) *sera dite l'équation de la surface* (S) *si les coordonnées de tout point de* (S) *vérifient* (13) *et si, réciproquement, tout point dont les coordonnées vérifient* (13) *appartient à* (S).

Par un changement de variables, on aura l'équation de la surface dans n'importe quel système de coordonnées (*cf.* n° 41).

*Remarque.* — Le raisonnement ci-dessus est en défaut quand *la fonction $f$ ne dépend que de $z$*. Dans ce cas, l'équation (13) représente un *faisceau de plans parallèles à $xOy$* (*cf.* n° 41).

Signalons, à ce propos, un autre cas particulier : celui où *$f$ dépend seulement de deux variables, par exemple $x$ et $y$*. Pour qu'un point M appartienne à la surface, il faut et il suffit que la parallèle menée par ce point à $Oz$ perce le plan des $xy$ en un point $m$ situé sur la courbe (C) de ce plan qui a pour équation $f = 0$, relativement aux axes $Oxy$. *La surface est donc un cylindre de base* (C) *et de génératrices parallèles à $Oz$.*

48. Surfaces algébriques. — *On appelle surface algébrique toute surface dont l'équation cartésienne peut être obtenue en annulant un polynome en $x$, $y$, $z$.* Le degré de ce polynome est appelé *degré de la surface.*

On montrerait, comme aux n^os 42 et 43, que cette définition est indépendante du choix des axes et que *le degré est égal au nombre de points d'intersection de la surface avec une droite quelconque*, à condition de compter les points imaginaires et à l'infini et de tenir compte des ordres de multiplicité.

Théorème. — *Toute section plane d'une surface algébrique de degré m est une ligne algébrique de degré m.*

Il suffit, pour le voir, de prendre le plan sécant pour plan des $xy$. Accidentellement, le degré peut s'abaisser de $p$ unités. On convient alors de compter la droite de l'infini (n° 86) du plan sécant comme droite multiple d'ordre $p$ dans la section, ce qui se justifie par des considérations analogues à celles du n° 42.

Théorème. — *Étant donnés deux polynomes $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$, pour qu'on définisse la même surface en les annulant, il faut et il suffit qu'ils soient constitués par les mêmes monomes affectés de coefficients proportionnels.*

1° *La condition est suffisante.* — Car, si elle est remplie, on a une identité de la forme

$$g(x, y, z) \equiv kf(x, y, z) \qquad (k = \text{const.}) \tag{15}$$

et, par suite, tout point qui annule $f$ annule $g$ et réciproquement.

2° *La condition est nécessaire.* — Si les équations $f = 0$, $g = 0$ représentent la même surface, elles doivent avoir les mêmes racines en $z$ pour tout groupe de valeurs numériques attribuées à $x$ et $y$. On en conclut une identité de la forme (15), où $k$ ne dépend pas de $z$. Mais, pour des raisons analogues, $k$ ne dépend pas de $x$, ni de $y$. C'est donc une constante absolue; d'où, etc. (*cf.* n° 44).

En coordonnées homogènes, l'équation (13) s'écrit

$$F(X, Y, Z, T) = 0,$$

F étant le polynome $f$ rendu homogène. Toute surface non algébrique est dite *transcendante*.

49. Équations paramétriques d'une surface. — Les surfaces sont aussi susceptibles de représentation paramétrique.

A chaque point M de (S) on fait correspondre deux paramètres $u$ et $v$, dont la connaissance fixe réciproquement la position du point sur la surface et qui sont appelés *les paramètres* ou *les coordonnées curvilignes* du point sur la surface (*cf* n° 20). Dans les applications, ils ont souvent une signification géométrique simple. Au contraire,

quand on étudie les propriétés générales des surfaces, on ne se préoccupe presque jamais de les interpréter.

Le mode de correspondance entre M et $(u, v)$ étant choisi, on peut calculer les coordonnées de M en fonction de $u$ et $v$, soit

$$(16) \qquad x = f(u, v) \qquad y = g(u, v) \qquad z = h(u, v).$$

On obtient, de la sorte, un système d'*équations paramétriques de la surface*.

*Toute équation en u, v définit une courbe* (C) *tracée sur la surface*. Si l'on exprime $u$ et $v$ en fonction d'un paramètre $t$, on obtient les *équations paramétriques de* (C) *sur* (S). En portant ces expressions de $u$ et $v$ dans (16), on a $x$, $y$, $z$ en fonction de $t$, c'est-à-dire les équations paramétriques de (C) dans l'espace (n° 53).

On peut déduire les équations (16) de l'équation (13) en choisissant arbitrairement $x$ et $y$ en fonction de $u$, $v$ et résolvant par rapport à $z$ [1] (*cf.* n° 45). Réciproquement, connaissant (16), on aura (13) par élimination de $u$, $v$ (n° 63).

50. Détermination d'une ligne dans l'espace. — Une ligne de l'espace peut être définie de deux manières : par l'intersection de deux surfaces ou par le déplacement d'un point. De là résultent deux modes de représentation analytique.

I. *La ligne est donnée par l'intersection de deux surfaces.* — Soit la ligne (C), intersection des surfaces (S) et (S') d'équations cartésiennes respectives

$$(17) \qquad f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0.$$

Il est clair que les équations (17) déterminent complètement la courbe, à condition toutefois *que celle-ci soit l'intersection complète des deux surfaces*, c'est-à-dire que (S) et (S') n'aient aucun point commun en dehors de (C). S'il en est ainsi, les équations (17) sont dites *les équations de la ligne*.

La courbe (C) étant donnée, il existe une grande indétermination dans le choix de ses équations, résultant de ce fait qu'on peut toujours

(1) Si l'on prend $x = u$, $y = v$, on a une équation de la forme $z = f(x, y)$, qui rentre, si l'on veut, dans le type (13).

imaginer une infinité de surfaces se coupant suivant cette courbe. Mais, répétons-le encore une fois, il faut toujours bien prendre garde que *les deux surfaces choisies se coupent suivant* (C) *et suivant* (C) *seulement.*

En particulier, si la ligne a été définie par les équations (17), on est toujours en droit de remplacer ces dernières par deux de leurs combinaisons linéaires linéairement indépendantes, soit

$$(18) \qquad \lambda f + \mu g = 0, \qquad \lambda' f + \mu' g = 0, \qquad (\lambda\mu' - \lambda'\mu \neq 0),$$

car ces équations entraînent (17), comme elles sont entraînées par elles.

51. *Cylindres projetants.* — Parmi les surfaces passant par (C), il y en a qui sont particulièrement intéressantes quand on veut se représenter la forme de la courbe dans l'espace. Ce sont les cylindres s'appuyant sur (C) et de génératrices parallèles aux axes de coordonnées. Les bases de ces cylindres sur les plans de coordonnées sont *les projections* [1] *de la courbe* sur ces plans.

Cherchons comment on peut obtenir l'équation du *cylindre projetant la courbe sur* $xOy$. Cette équation ne doit renfermer que $x$ et $y$, et peut être considéré comme l'équation de la projection $(c)$ relativement aux axes $Oxy$ (n° 47). Or, soit $m(x', y')$ un point quelconque de $(c)$. La parallèle à $Oz$, menée par $m$, rencontre (C) en au moins un point M (*fig.* 9). Or, tous les points de cette parallèle ont des coordonnées de la forme $(x', y', z)$. Il suit de là que les équations en $z$

$$(19) \qquad f(x', y', z) = 0, \qquad g(x', y', z) = 0$$

ont au moins une racine commune, à savoir la cote de M.

Réciproquement, si les équations (19) ont une racine commune en $z$, cela veut dire que la parallèle à $Oz$, menée par $m(x', y')$, rencontre (C) et, par suite, que $m$ se trouve sur $(c)$.

En définitive, pour que $m(x', y')$ appartienne à $(c)$, il faut et il suffit que les équations (19) aient au moins une racine commune en $z$. *On aura donc l'équation de* $(c)$ *ou du cylindre projetant sur* $xOy$ *en éliminant* $z$ *entre les deux équations de* (C) (t. I, n° 231).

---

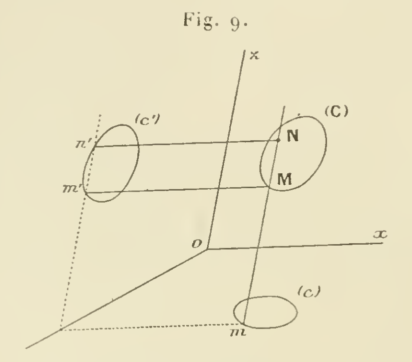
(1) Ces projections ne sont orthogonales qu'en coordonnées rectangulaires.

C'est là une règle qu'il importe de retenir. On a des règles analogues pour les projections sur $yOz$ et $zOz$.

Les équations des cylindres projetants étant plus simples que les équations (17), comme renfermant chacune une coordonnée de moins, on peut être tenté de *substituer deux d'entre elles aux deux équations proposées*. Mais, *c'est en général illégitime*.

En effet, considérons, par exemple, les cylindres $(c)$ et $(c')$ projetant (C) sur $Oxy$ et $Oyz$ (*fig.* 9). Ils se coupent évidemment sui-

Fig. 9.




vant (C). Mais, ils peuvent avoir d'autres points communs. En général, la droite $m$M rencontrera en effet (C) en un seul point M, tandis qu'elle rencontrera le cylindre $(c')$ en un ou plusieurs autres points, tels que N.

La courbe représentée par les équations de deux cylindres projetants est donc plus générale que la proposée.

De même, *il n'est permis de substituer l'équation d'un cylindre projetant à l'une des équations* (17), qu'après s'être assuré qu'on n'introduit pas une courbe nouvelle. Dans le cas particulier où l'équation non remplacée représente une surface qui n'est jamais *rencontrée qu'en un seul point* P *par chaque génératrice du cylindre*, la substitution est toujours légitime, car le point P coïncide nécessairement avec le point M de (C).

52. Lignes algébriques. — *Une ligne de l'espace est algébrique si l'on peut faire passer par elles deux surfaces algébriques.*

Si les fonctions $f$ et $g$ des équations (17) sont des polynomes, la ligne (C) est donc algébrique.

Théorème. — *Les projections d'une ligne algébrique sont algébriques et réciproquement.* — Car l'élimination de $z$, par exemple, entre les équations (17), conduit à une équation algébrique en $x$ et $y$, si $f$ et $g$ sont des polynomes (t. I, n° 233). La propriété subsiste d'ailleurs quand (C) n'est qu'une partie de l'intersection des surfaces (17), car sa projection est une partie de la projection de l'intersection complète, laquelle projection ne peut se décomposer qu'en des courbes algébriques.

La réciproque est une conséquence évidente de la définition de l'algébricité.

*On appelle degré d'une courbe algébrique de l'espace le nombre de ses points de rencontre avec un plan quelconque.* Cette définition concorde avec celle du n° 43, dans le cas d'une courbe plane.

Théorème. — *Deux surfaces algébriques de degrés m et p ont pour intersection complète une courbe algébrique de degré mp.*

En effet, soit (C) l'intersection complète de la surface (S) de degré $m$ avec la surface (S') de degré $p$. Coupons par un plan P quelconque. Nous obtenons, dans (S), une ligne plane de degré $m$ et, dans (S'), une ligne plane de degré $p$ (n° 48). Ces deux lignes se coupent en $mp$ points, qui sont manifestement les points de rencontre de P et de (C). Le théorème est donc démontré.

Corollaire. — *Toute ligne qui est intersection complète de deux surfaces algébriques et qui n'est pas plane, ne peut avoir pour degré un nombre premier.*

Car ce degré est de la forme $mp$, aucun des nombres $m$ et $p$ n'étant égal à l'unité.

Si, par un moyen quelconque (n° 53), on découvre une courbe algébrique gauche de degré premier, on peut donc être assuré qu'elle ne pourra jamais être obtenue comme intersection complète de deux surfaces algébriques.

53. Équations paramétriques d'une ligne dans l'espace. — Envisageons maintenant l'hypothèse où

II. *La ligne est engendrée par le déplacement d'un point.* — A

chaque position M de ce point, on peut faire correspondre un paramètre $t$, relativement auquel on peut répéter ce qui a été dit au n° 45, à propos d'une courbe plane. Les coordonnées de M sont des fonctions déterminées de $t$ :

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t). \tag{20}$$

Les équations (20) constituent un système d'*équations paramétriques de la courbe*.

Lorsque celle-ci est donnée par deux équations telles que (17), on peut imaginer qu'on choisisse arbitrairement $f(t)$, puis qu'on résolve (17) par rapport à $y$ et $z$ ou, plus généralement, qu'on adjoigne à (17) une équation telle que

$$h(x, y, z) = t. \tag{21}$$

En considérant seulement les deux premières équations (20), on a évidemment *les équations paramétriques de la projection sur* $xOy$. De même pour les deux autres projections. En éliminant $t$, on aurait donc les équations des cylindres projetants. Nous savons (n° 51) que deux de celles-ci ne peuvent être prises, en général, pour définir la courbe. Du reste, il arrive même très fréquemment qu'une ligne de l'espace donnée par des équations paramétriques n'est pas susceptible d'être représentée par deux équations en $x, y, z$. Il en est ainsi, par exemple, des courbes unicursales de degré premier (n° 52) ([1]). On tourne quelquefois cette difficulté en *représentant la ligne* (C) *par trois équations* en $x$, $y$, $z$, définissant trois surfaces ayant en commun (C) et (C) seulement. Les trois cylindres projetants répondent souvent à la question. Mais, un tel mode de représentation est toujours moins commode, pour l'étude de la courbe, que le mode de représentation paramétrique.

54. Intersection de lignes et surfaces dans l'espace. — Plusieurs problèmes se présentent.

---

([1]) Du moins, si l'on n'accepte que des équations algébriques en $x, y, z$. On pourrait peut-être imaginer des surfaces transcendantes se coupant entre elles ou coupant des surfaces algébriques suivant lesdites courbes. Mais, cela ne présente pas d'intérêt pour nous.

I. *Intersection de deux surfaces.* — Si toutes deux sont définies par leur équation implicite, on est ramené au n° 50.

Soient maintenant la surface (S) définie par (13) et la surface (S') définie par (16). L'équation

$$f[f(u, v), g(u, v), h(u, v)] = 0 \tag{22}$$

est l'équation de l'intersection en coordonnées $(u, v)$ sur la surface (S') (n° 49). Elle peut conduire aux équations paramétriques, comme il a été expliqué au n° 49.

Nous n'envisagerons pas l'hypothèse où les deux surfaces seraient définies par des équations paramétriques.

II. *Intersection d'une ligne et d'une surface : Premier cas.* — Soient la surface (S) définie par (13) et la ligne (C) définie par

$$g(x, y, z) = 0, \qquad h(x, y, z) = 0. \tag{23}$$

Elles se coupent en un certain nombre de points dont les coordonnées sont obtenues en résolvant le système (13), (23) par rapport à $x$, $y$, $z$.

Il est clair que ceci résout en même temps le problème de l'intersection de trois surfaces données par leurs équations implicites.

Si les surfaces sont algébriques et de degrés $m$, $p$, $q$, le nombre des points d'intersection est $mpq$.

*Deuxième cas.* — Soient la surface (S) définie par (13) et la ligne (C) définie par (20). L'équation

$$f[f(t), g(t), h(t)] = 0 \tag{24}$$

est *l'équation aux t des points d'intersection*. A chaque racine $t'$ correspond un point de rencontre dont les coordonnées sont obtenues en remplaçant $t$ par $t'$ dans (20).

*Si la surface et la courbe sont algébriques, le nombre des points d'intersection est égal au produit de leurs degrés* (¹).

III. *Intersection de deux lignes : Premier cas.* — Soient la

(¹) Nous admettons ce théorème, dont la démonstration générale ne rentre pas dans le cadre de cet Ouvrage. Ajoutons que, dans les applications, sa vérification est toujours aisée.

ligne (C) définie par (17) et la ligne (C′) définie par

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad g_1(x, y, z) = 0. \tag{25}$$

Tout point commun doit vérifier à la fois (17) et (25). Or, nous avons là quatre équations à trois inconnues, qui seront généralement incompatibles. Donc, *deux lignes prises au hasard dans l'espace ne se rencontrent pas*. Cette proposition est d'ailleurs tout à fait intuitive.

Dans le cas où les lignes dépendent d'un ou plusieurs paramètres arbitraires, on peut se proposer de chercher quelle relation doit exister entre ces paramètres pour qu'il y ait rencontre. La réponse est immédiate : il suffit d'exprimer que le système (17), (25) est compatible, c'est-à-dire d'*éliminer $x$, $y$, $z$ entre les équations des deux courbes*. Nous aurons souvent à résoudre ce problème.

Lorsque les deux lignes sont les intersections complètes de deux surfaces par une même troisième, elles se rencontrent aux points communs aux trois surfaces.

*Deuxième cas.* — Soient la ligne (C) définie par (17) et la ligne (C′) définie par (20). Pour qu'il y ait rencontre, il faut et il suffit que les équations

$$f[f(t), g(t), h(t)] = 0, \qquad g[f(t), g(t), h(t)] = 0 \tag{26}$$

soient compatibles en $t$. Toute solution commune, substituée dans (20), donnera un point de rencontre.

*Troisième cas.* — Soient la ligne (C) définie par (20) et la ligne (C′) définie par

$$x = f_1(\theta), \qquad y = g_1(\theta), \qquad z = h_1(\theta). \tag{27}$$

Pour qu'il y ait rencontre, il faut et il suffit que les équations

$$f(t) = f_1(\theta), \qquad g(t) = g_1(\theta), \qquad h(t) = h_1(\theta) \tag{28}$$

soient compatibles en $t$, $\theta$.

35. Lignes et surfaces imaginaires. — De même qu'il y a intérêt à introduire des points imaginaires (n° 37), il est utile de considérer *des lignes et des surfaces imaginaires*. Celles-ci peuvent se présenter de deux manières.

*Premier cas.* — Leur équation ou leurs équations n'ont que des coefficients [1] réels, mais ne sont vérifiées par les coordonnées d'aucun point réel. Dans ce cas, *les points imaginaires de la ligne ou de la surface sont deux à deux conjugués.* En effet, soit, par exemple, la surface (13) où l'on suppose que $f$ est un polynome à coefficients réels [2]. Si l'on substitue, dans $f$, les coordonnées de deux points imaginaires conjugués, on obtient des résultats imaginaires conjugués (t. I, n° 30, remarque II). L'un de ces résultats ne peut être nul sans que l'autre le soit. Donc un des points donnés ne peut être sur la surface sans que l'autre s'y trouve également.

*Deuxième cas.* — L'équation ou les équations ont des coefficients imaginaires. S'il s'agit encore d'une surface algébrique, pour fixer les idées, on aura une équation de la forme

$$P(x, y, z) + iQ(x, y, z) = 0, \tag{29}$$

les polynomes P et Q ayant leurs coefficients réels.

Pour qu'un point réel soit sur la surface, il faut et il suffit que ses coordonnées annulent P et Q. Donc, *les seuls points réels qui puissent être sur la surface sont les points réels de la courbe* [3]

$$P = 0, \qquad Q = 0. \tag{30}$$

L'équation conjuguée de (29),

$$P(x, y, z) - iQ(x, y, z) = 0. \tag{31}$$

représente *la surface imaginaire conjuguée* de la précédente. Elle a évidemment les mêmes points réels. Ses points imaginaires sont les conjugués de ceux de (29), car si l'on substitue dans $P + iQ$ et $P - iQ$ des coordonnées imaginaires conjuguées, on obtient des résultats conjugués (t. I, n° 30, remarque II), donc nuls en même temps.

---

(1) Nous nous bornons aux lignes et surfaces algébriques.

(2) La démonstration est évidemment valable quand bien même la surface aurait des points réels.

(3) De même, dans le plan, une ligne imaginaire au sens actuellement envisagé, ne peut avoir qu'un nombre fini de points réels. Une ligne imaginaire de l'espace n'en aura généralement aucun.

56. Interprétation des inégalités. — La Géométrie analytique permet d'interpréter simplement les inégalités à deux et à trois inconnues.

I. *Inégalité à deux inconnues.* — Soit

$$f(x, y) > 0. \tag{32}$$

Nous allons chercher *dans quelle région du plan doit se trouver un point* M *pour que ses coordonnées cartésiennes vérifient l'inégalité.*

A cet effet, construisons la courbe (C) représentée par l'équation

$$f(x, y) = 0. \tag{33}$$

Elle partage le plan en un certain nombre de régions, telles qu'on puisse joindre deux points quelconques P et P′ de chacune d'elles par un trait continu ne traversant pas (C); et qu'on ne puisse, au contraire, passer de l'une à l'autre sans traverser (C). Je dis que *tous les points d'une même région* (R) *donnent le même signe à $f$.* En effet, admettons que les deux points P et P′ donnent des signes différents. Joignons-les par un trait continu ne rencontrant pas (C). Si le point M va de P à P′ en suivant ce trait, ses coordonnées sont des fonctions continues d'un paramètre $t$, qui part d'une certaine valeur $t_0$ et arrive à une certaine valeur $t_1$. Si l'on suppose que $f(x, y)$ soit, en outre, une fonction continue de $x$, $y$ dans toute la région (R), ce qui arrivera toujours si c'est un polynome (t. I, n° 136), seul cas que nous ayons à rencontrer dans la pratique, $f$ deviendra, de la sorte, une fonction continue de $t$. Cette fonction, prenant des signes différents pour $t = t_0$ et pour $t = t_1$, devrait s'annuler entre $t_0$ et $t_1$ (t. I, n° 59, théorème II), c'est-à-dire en un point du trait PMP′. Mais ceci n'est pas possible, puisque ce trait ne rencontre pas (C).

Deux régions sont dites *voisines* si l'on peut passer de l'une à l'autre en traversant une seule fois la ligne (C) et en un point simple (n° 198). *Elles donnent à $f$ des signes différents,* car lorsqu'on traverse (C), $f$ s'annule en changeant de signe.

Cela posé, prenons arbitrairement, dans le plan, un point $M_0$, qui ne soit pas sur (C). Cherchons le signe de $f(x_0, y_0)$. Si nous trouvons $+$, la région qui comprend $M_0$ sera dite *positive* ou *possible.* Les régions voisines seront *négatives* ou *impossibles.* En passant,

de proche en proche, d'une région aux régions voisines, il est clair qu'on arrivera à distinguer toutes les régions possibles des régions impossibles, ce qui résout le problème que nous nous étions posé.

*Remarque.* — On choisit, autant que possible, le point $M_0$ de manière que ses coordonnées soient simples et donnent à $f_0$ un signe facile à déterminer. On prend souvent, par exemple, l'origine ou bien un point à l'infini sur l'un des axes.

II. *Inégalité à trois inconnues.* — Soit

$$f(x, y, z) > 0. \tag{34}$$

On l'interprète dans l'espace, au moyen de la surface

$$f(x, y, z) = 0. \tag{35}$$

On procède absolument comme plus haut.

# CHAPITRE V.

## LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

57. Lieux géométriques dans le plan. — *On appelle lieu géométrique l'ensemble de tous les points du plan qui satisfont à une condition donnée.* Cette condition doit d'ailleurs être une *condition simple*, c'est-à-dire qui se traduise par une seule relation entre les coordonnées, sans quoi le lieu ne comprendrait qu'un nombre limité de points, tandis qu'il doit être, au contraire, constitué par une ou plusieurs lignes.

Le lecteur sait que la recherche des lieux géométriques est parfois fort aride quand on n'a, à sa disposition, que les moyens d'investigation de la Géométrie pure. On procède plus ou moins par tâtonnements, car il n'existe pas de règle générale permettant d'arriver à coup sûr au résultat, quel que soit le problème envisagé.

En Géométrie analytique, au contraire, il existe des méthodes fixes, qui s'appliquent dans tous les cas, du moins théoriquement. Dans la pratique, toutefois, elles ne sont utiles qu'autant qu'elles conduisent à des calculs praticables. L'habileté du géomètre consiste précisément à savoir éviter les calculs compliqués. Ajoutons qu'il ne faut jamais délaisser les raisonnements de la Géométrie pure, une déduction évidente pouvant amener parfois des simplifications considérables dans la solution analytique.

La première chose à faire est de *choisir le système des coordonnées* qu'on se propose d'utiliser, si toutefois il n'est pas imposé dans l'énoncé. C'est là une opération dans laquelle il ne faut pas s'engager à la légère, car un choix mal approprié peut occasionner un échec dans la recherche d'un problème [1], par suite des calculs inextri-

[1] Ces observations sont valables pour la résolution analytique de n'importe quel problème de Géométrie, bien que nous les présentions seulement à propos des lieux géométriques.

cables auxquels il donne naissance. On doit étudier attentivement l'énoncé, et se rendre compte mentalement des avantages et inconvénients que présenterait tel ou tel système. Puis, on décide entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires [1]. Après quoi, il faut choisir les axes. Par exemple, si l'on aperçoit un axe ou un centre de symétrie dans la question, il sera généralement avantageux de le prendre pour axe ou pour origine de coordonnées (ou axe polaire ou pôle). La plupart du temps, on choisira les axes de manière à simplifier le plus possible les données. S'il est question de *propriétés métriques* (n° 67), on prendra des axes rectangulaires.

Il arrive que, malgré toutes les précautions prises, on s'aperçoit dans la suite, alors qu'on est déjà bien engagé dans la question, qu'il eût été plus avantageux de choisir autrement les coordonnées. Il ne faut pas craindre de changer de système, dans de semblables circonstances, soit en reprenant le problème à son début, soit en utilisant totalement ou partiellement les résultats déjà obtenus, par le moyen des formules de transformation de coordonnées. En particulier, il arrive fréquemment qu'on passe, au courant d'un problème, des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires ou inversement.

Il peut arriver aussi, quoique plus rarement, qu'on mène de front l'emploi de deux systèmes, utilisant tantôt l'un, tantôt l'autre.

Revenons maintenant à la théorie des lieux géométriques pour exposer les méthodes qui permettent de les déterminer analytiquement, quand on a fait choix d'un système de coordonnées. Nous nous bornerons, dans ce qui va suivre, aux coordonnées cartésiennes. Mais, tout ce que nous dirons s'appliquerait à n'importe quel autre système.

58. Méthode directe. — *On prend un point quelconque* M $(x, y)$ *dans le plan et l'on exprime qu'il satisfait à la définition du lieu.* On obtient de la sorte une relation entre $x$ et $y$, qui est l'équation du lieu.

---

(1) Ou tout autre système. Dans cet Ouvrage, nous ne ferons guère usage que des coordonnées cartésiennes et polaires (semi-polaires dans l'espace), exception faite pour les coordonnées trilinéaires (ou tétraédriques) (Chap. X). Ajoutons qu'il y a lieu également quelquefois de choisir entre les coordonnées ponctuelles et tangentielles (Chap. XX).

MÉTHODE PAR ÉLIMINATION. — *On cherche deux familles de courbes* (C) *et* (C′), *dépendant d'un seul et même paramètre* $\lambda$ *et telles que tout point du lieu se trouve à l'intersection de deux courbes homologues et que, réciproquement, deux courbes homologues ne se coupent qu'en des points du lieu.*

Il arrive d'ailleurs fréquemment que le lieu est précisément défini par le moyen de deux semblables familles.

Soient

$$f(x, y, \lambda) = 0, \qquad g(x, y, \lambda) = 0, \tag{1}$$

les équations des courbes (C) et (C′). On a la règle suivante :

RÈGLE. — *Pour avoir l'équation du lieu, on élimine* $\lambda$ *entre les deux équations* (1).

Soit, en effet,

$$R(x, y) = 0 \tag{2}$$

le résultat de l'élimination (t. I, n° 231).

1° Tout point du lieu vérifie l'équation (2), car, si l'on substitue ses coordonnées à $x$, $y$ dans les équations (1), ces dernières ont au moins une racine commune en $\lambda$, à savoir le paramètre relatif aux lignes (C) et (C′) qui se croisent en ce point.

2° Tout point vérifiant (2) est un point du lieu, car, si l'on substitue ses coordonnées à $x$, $y$ dans les équations (1), ces dernières ont au moins une racine commune en $\lambda$. A cette racine correspondent dès lors une ligne (C) et une ligne (C′) se coupant au point considéré, lequel appartient donc bien au lieu.

59. *Solutions singulières.* — Quand on emploie la méthode précédente, il arrive quelquefois que prennent naissance ce qu'on appelle des *solutions singulières*. Voici en quoi elles consistent. Imaginons que, pour une certaine valeur $\lambda_0$ de $\lambda$, *les lignes* (C) et (C′) *se confondent ou bien se décomposent en ayant une partie commune* (S). Tout point de (S) vérifie nécessairement l'équation (2), parce que vérifiant les équations (1) pour une même valeur $\lambda_0$ de $\lambda$. Dans cette circonstance, on doit donc nécessairement constater *la décomposition de* R $(x, y)$ en au moins deux facteurs, dont l'un,

égalé à zéro, donne (S). Si l'on considère le lieu comme défini par l'ensemble des points communs à tous les couples de lignes (C), (C') homologues, on ne peut pas dire que la courbe (S) ne fasse pas partie du lieu. Mais, elle en constitue une partie pour ainsi dire accidentelle et peu intéressante, qu'on appelle *une solution singulière.*

Il peut y avoir plusieurs solutions singulières.

*Solutions étrangères.* — Il arrive aussi qu'on introduit dans $R(x, y)$ des *facteurs étrangers.* Pour tout point annulant un tel facteur, les équations (1) n'ont pas de solution commune en $\lambda$. La courbe correspondante ne fait, à aucun titre, partie du lieu et constitue ce qu'on appelle *une solution étrangère.*

Les facteurs étrangers proviennent toujours des calculs relatifs à l'élimination qui, à un moment donné, cesse d'être correcte ([1]) (t. I, nº 276).

*Moyen de reconnaître les solutions singulières et les solutions étrangères.* — Quand on s'est aperçu de la décomposition de $R(x, y)$ en un certain nombre de facteurs, il importe de savoir déceler ceux qui correspondent à la véritable solution, à des solutions singulières ou à des solutions étrangères.

Soit donc (A) la courbe que représenterait l'un des facteurs si on l'égalait à zéro. Substituons les coordonnées d'un quelconque M de ses points à $x$ et à $y$ dans (1) et *cherchons la racine commune de ces deux équations en* $\lambda$. Si elle n'existe pas, le facteur est étranger. Si elle existe, mais *possède une valeur constante* $\lambda_0$, c'est-à-dire indépendante de la position de M sur (A), *la solution est singulière.* La courbe (A) fait en effet partie à la fois des courbes (C) et (C') qui correspondent à la valeur $\lambda_0$ de $\lambda$. Enfin, si la racine commune varie, lorsque M décrit (A), on a affaire au lieu proprement dit ou à l'une de ses parties ([2]).

60. Introduction de plusieurs paramètres. — Il est quelquefois difficile de trouver un paramètre $\lambda$ en fonction duquel on puisse calculer pratiquement les coefficients des équations (1). Quand il en est ainsi, on écrit ces dernières en introduisant des *paramètres*

([1]) Ce qui ne veut pas dire qu'on ait fait des fautes de calcul.

([2]) Il peut arriver que le lieu véritable se décompose en plusieurs courbes.

*surabondants*, en nombre $n$ aussi élevé que cela est nécessaire. Mais, pour qu'il n'existe en réalité qu'un seul paramètre indépendant, tous ces paramètres sont *liés par* $n-1$ *relations distinctes*.

*Pour avoir l'équation du lieu, on élimine les paramètres entre les équations des deux courbes et les relations de condition.*

La démonstration de cette règle se fait d'une manière entièrement analogue à celle du n° 58.

*Remarque.* — Si les courbes (C) et (C') dépendaient de deux ou de plus de deux paramètres indépendants, il n'y aurait pas de lieu. On pourrait en effet faire passer deux courbes homologues par tout point du plan, car on aurait, pour cela, à résoudre deux équations à deux inconnues au moins. Cependant, il peut arriver exceptionnellement que le lieu existe (cf. *Exerc.*, Chap. V, exercice résolu n° 3). On se l'explique du reste très bien si l'on observe qu'on peut toujours imaginer deux familles de courbes telles qu'une infinité de courbes de chaque famille passent par tout point d'une ligne donnée, *a priori*, comme devant servir de lieu.

On reconnaît analytiquement qu'on se trouve dans cette circonstance exceptionnelle en essayant de résoudre les équations des deux courbes par rapport aux paramètres. On doit constater que cette résolution est impossible tant qu'on attribue à $x$ et à $y$ des valeurs arbitraires. La condition de possibilité donne l'équation du lieu.

61. Méthode des équations paramétriques. — *On cherche les équations paramétriques du lieu.* Cela peut se faire de deux manières.

I. On considère un point quelconque M du lieu. On cherche ensuite un paramètre qui aura, la plupart du temps, une signification géométrique simple, en fonction duquel on puisse *calculer directement les coordonnées de* M.

II. Comme au n° 58, *on considère le lieu comme engendré par l'intersection de deux courbes variables dépendant d'un paramètre et l'on résout leurs équations par rapport à $x$ et à $y$*, qui se trouvent ainsi exprimés en fonction du paramètre. En particulier, *si les courbes sont des droites*, les calculs seront simples, puisqu'on aura seulement à résoudre deux équations du premier degré à deux

inconnues. Plus généralement, *si les courbes sont algébriques et ne se coupent qu'en un point variable*, les autres points d'intersection étant fixes, on pourra toujours obtenir les coordonnées de ce point variable par des calculs rationnels. Il en va de même si les courbes se coupent en plusieurs points variables, mais dont un seul est inconnu.

*Toutes les fois que l'élimination du paramètre semble impraticable*, il ne faut pas oublier de tenter la résolution par rapport à $x, y$ (¹).

62. Lieux géométriques dans l'espace. — Dans l'espace, l'élément générateur du lieu peut être soit un point, soit une ligne. Dans le second cas, le lieu est une surface. Dans le premier cas, il peut être une surface ou une ligne, suivant que sa définition comporte une ou deux conditions simples.

Au sujet du *choix des coordonnées*, il y a lieu de répéter tout ce que nous avons dit au n° 57.

Quant aux méthodes à employer, ce sont les extensions des méthodes de la Géométrie plane.

Premier cas : *Lieu engendré par une courbe.* — Les équations de cette courbe dépendent d'un seul paramètre, sauf le cas accidentel analogue à celui qui a été signalé au n° 60. Pour avoir l'équation du lieu, qui est une surface (S), *on élimine le paramètre entre les deux équations*, ce qui se démontre comme au n° 58.

Comme dans le plan, il peut y avoir des *solutions singulières et étrangères* (n° 59) et l'on peut *introduire des paramètres surabondants* liés par des relations (n° 60).

Si la courbe est donnée par des équations paramétriques

$$x = f(t, \lambda), \qquad y = g(t, \lambda), \qquad z = h(t, \lambda), \tag{3}$$

*on élimine* $\lambda$ *et* $t$ *entre ces trois équations*. Ou bien, on regarde simplement *les équations* (3) *comme les équations paramétriques de la surface* (S).

(¹) On pourrait encore imaginer que les courbes variables fussent données par leurs équations paramétriques ou bien seulement l'une d'elles. En éliminant les paramètres ou bien calculant $x, y$ en fonction de l'un d'eux, on aurait encore d'autres méthodes.

63. Deuxième cas : *Lieu engendré par un point.* — On peut d'abord employer la *méthode directe* (n° 58). Suivant le nombre de conditions simples, on obtient une ou deux équations ; le lieu est une surface ou une ligne.

On peut aussi employer la *méthode directe en équations paramétriques*, c'est-à-dire calculer directement les coordonnées d'un point quelconque du lieu en fonction de 1 ou 2 paramètres.

Supposons maintenant que *le point générateur soit défini par l'intersection de trois surfaces* $(S_1)$, $(S_2)$, $(S_3)$, représentées toutes trois par leurs équations implicites.

I. *Les surfaces dépendent de deux paramètres distincts.* — Soient

$$(4)\quad f_1(x, y, z, \lambda, \mu) = 0, \qquad f_2(x, y, z, \lambda, \mu) = 0, \qquad f_3(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$$

leurs équations respectives.

*En éliminant* $\lambda$, $\mu$, *on aura l'équation implicite du lieu*, qui est une surface. *En résolvant par rapport à* $x$, $y$, $z$, *on en aura les équations paramétriques.* Ce dernier procédé sera particulièrement commode si les surfaces (4) sont des plans. Le premier le sera, au contraire, si $f_1$, $f_2$, $f_3$ sont linéaires en $\lambda$, $\mu$.

Si l'on a été obligé d'introduire des *paramètres surabondants* $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$ liés par $n-2$ relations, on les élimine entre les équations des surfaces et les équations de condition.

II. *Les surfaces dépendent d'un seul paramètre.* — Soient

$$(5)\quad f_1(x, y, z, \lambda) = 0, \qquad f_2(x, y, z, \lambda) = 0, \qquad f_3(x, y, z, \lambda) = 0.$$

*En résolvant par rapport à* $x$, $y$, $z$, *on a les équations paramétriques du lieu, qui est une courbe* (C). Cette méthode est tout indiquée quand les surfaces (5) sont des plans.

Voyons maintenant si l'on peut *procéder par élimination*. Il est facile de voir, *a priori*, qu'il y a des cas où cela n'est pas possible, du moins si l'on exige que la courbe (C) soit représentée par deux équations simultanées en $x$, $y$, $z$ et deux seulement. Il suffit, en effet, d'imaginer que (C) soit une de ces courbes qui ne sont pas représentables par deux équations implicites (n° 52).

Du reste, en essayant de faire l'élimination, nous allons tout de suite rencontrer des difficultés.

*On peut d'abord songer à éliminer λ entre une des équations* (5) *et les deux autres.* Mais cela peut se faire de trois manières et l'on peut être embarrassé pour choisir la meilleure. En second lieu, admettons, par exemple, qu'on ait éliminé λ entre $f_1$ et $f_2$, puis entre $f_1$ et $f_3$; soient

$$(6) \qquad R_3(x, y, z) = 0, \qquad R_2(x, y, z) = 0$$

les équations obtenues. Si un point M les vérifie, on peut affirmer qu'en substituant ses coordonnées dans (5), les équations $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ auront une racine commune $\lambda_3$ et que les équations $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ auront aussi une racine commune $\lambda_2$. Mais, *rien ne prouve que* $\lambda_2$ *sera égal à* $\lambda_3$ (*cf.* t. I, n° 239). Il y a cependant un cas où il en est certainement ainsi : c'est *le cas où* $f_1$ *est du premier degré en* λ, puisque l'équation $f_1 = 0$ n'admet alors qu'une racine. Encore est-il nécessaire de vérifier que $f_1$ ne s'annule pas identiquement, c'est-à-dire quel que soit λ, ce qui peut arriver pour une infinité de points, satisfaisant d'ailleurs toujours forcément aux deux équations (6) (cf. *Exercices*, Chap. V, exercice résolu n° 6).

On peut essayer de tourner la difficulté en représentant le lieu par *les trois équations simultanées* (n° 53)

$$(7) \qquad R_1(x, y, z) = 0, \qquad R_2(x, y, z) = 0, \qquad R_3(x, y, z) = 0.$$

Tout point les vérifiant donnera une racine commune $\lambda_1$ à $f_2, f_3$, une racine commune $\lambda_2$ à $f_3, f_1$ et une racine commune $\lambda_3$ à $f_1, f_2$. Mais, *on ne saura toujours pas si* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, bien qu'on puisse affirmer que cela arrive pour une infinité de points, à savoir les points de la courbe (C).

Il y a là, on le voit, *une source de difficultés*, sur lesquelles nous ne pouvons nous appesantir davantage. La conclusion à en tirer est que, exception faite pour quelques cas simples, *il est préférable de chercher les équations paramétriques du lieu*, *plutôt que de procéder par élimination*.

# CHAPITRE VI.

## LA DROITE EN GÉOMÉTRIE PLANE.

### I. — REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DE LA LIGNE DROITE.

64. Équation de la ligne droite. — La droite est une *ligne algébrique du premier degré*. En effet, si on la prend pour axe des $x$, son équation est $y = 0$, ce qui est une équation du premier degré. On sait, d'autre part, que l'algébricité et le degré sont indépendants du choix des axes (nº 42). Donc, quels que soient ceux-ci, *toute droite du plan est représentée par une équation du premier degré :*

$$(1) \qquad Ax + By + C = 0.$$

Réciproquement, *toute équation du premier degré représente une droite*. En effet, partons de l'équation (1). Soient $M_0$ et $M_1$ deux points qui la vérifient. Changeons d'axes, en prenant l'origine en $M_0$ et l'axe des $x$ suivant $M_0 M_1$. L'équation transformée est encore du premier degré, soit

$$(2) \qquad A'x' + B'y' + C' = 0.$$

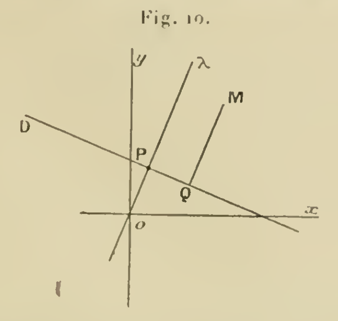
Elle doit être vérifiée pour $M_0$, c'est-à-dire pour $x' = y' = 0$. Ceci exige $C' = 0$. Elle doit être vérifiée aussi pour $M_1$, dont l'ordonnée nouvelle est nulle, l'abscisse ne l'étant pas, pour que $M_1$ soit différent de $M_0$. Ceci n'est possible que si $A' = 0$. Mais alors, l'équation (2) se réduit à $y' = 0$, qui représente le nouvel axe des $x$, c'est-à-dire la droite $M_0 M_1$.

Il est, du reste, facile d'établir directement la proposition précédente. On peut le faire de bien des manières. Nous allons suivre une méthode qui aura l'avantage de nous donner, du même coup, plusieurs résultats importants.

65. Forme normale ou canonique. — Supposons *les axes rec-*

*tangulaires* et proposons-nous d'établir l'équation d'une droite donnée D. Il s'agit, au préalable, de définir la position de cette droite par rapport aux axes. Dans ce but, nous menons par O la perpendiculaire à D et nous l'orientons par une demi-droite $O\lambda$, d'angle polaire $\varphi$

Fig. 10.




(*fig.* 10). Soit maintenant P l'intersection de D avec la droite $O\lambda$. Nous poserons

$$(3) \qquad p = \overline{OP}.$$

Il est clair que la connaissance des nombres $\varphi$ et $p$ détermine complètement la droite D; car, de $\varphi$ on déduit $O\lambda$, de $p$ on déduit ensuite P et il ne reste plus qu'à mener par P une perpendiculaire à $O\lambda$.

Inversement, connaissant D, il y a deux manières de choisir $O\lambda$, auxquelles correspondent des angles $\varphi$ différant d'un multiple impair de $\pi$ et des valeurs opposées de $p$. De sorte qu'à une droite donnée correspondent pour $(\varphi, p)$ les déterminations

$$(4) \qquad \varphi + 2k\pi, \quad p \qquad \text{et} \qquad \varphi + (2k+1)\pi, \quad -p.$$

Ces nombres $\varphi$ et $p$ seront appelés les *coordonnées normales de la droite* D. Ce sont, en somme, *les coordonnées polaires* (n° 40) *du point*. P. Mais, alors que l'angle polaire de P cesse d'être déterminé quand P vient en O, l'angle $\varphi$ l'est toujours, à $2k\pi$ ou $(2k+1)\pi$ près.

*Quand une droite sera définie par ses coordonnées normales, nous l'orienterons toujours*, sauf indication contraire, *par l'angle polaire* $\varphi - \frac{\pi}{2}$.

Cela posé, nous allons chercher l'équation de la droite D, connais-

sant $\varphi$ et $p$. A cet effet, nous allons employer la méthode directe de recherche des lieux géométriques (n° 58). Soit M un point quelconque du plan, de coordonnées $x$, $y$. Projetons-le orthogonalement en Q sur D. Nous allons calculer le nombre

$$d = \overline{\mathrm{QM}}, \tag{5}$$

que nous appellerons *distance de la droite au point* [1], mesurée suivant la demi-droite O$\lambda$.

Nous avons l'égalité géométrique

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}. \tag{6}$$

Projetons-la orthogonalement sur O$\lambda$. Nous avons, en nous rappelant que les cosinus directeurs de O$\lambda$ sont $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ (n° 29) :

$$p + d = x\cos\varphi + y\sin\varphi;$$

d'où

$$d = x\cos\varphi + y\sin\varphi - p, \tag{7}$$

formule très importante en elle-même, qu'il importe de retenir.

Pour que le point M $(x, y)$ soit sur la droite D, il faut et suffit que $d$ soit nul. L'équation de cette droite s'écrit donc

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0. \tag{8}$$

Cette forme d'équation s'appelle la *forme normale* ou *canonique*. On reconnaît qu'elle est bien du premier degré en $x$, $y$.

66. Réciproquement, soit, en coordonnées rectangulaires, l'équation

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0. \tag{9}$$

Je dis qu'elle représente une droite. Pour le prouver, je vais calculer $\varphi$ et $p$ de telle manière que (8) et (9) représentent la même ligne, qui sera la droite de coordonnées normales $\varphi$, $p$. Les conditions d'identification sont (n° 44)

$$\frac{\cos\varphi}{\mathrm{A}} = \frac{\sin\varphi}{\mathrm{B}} = \frac{-p}{\mathrm{C}}. \tag{10}$$

---

[1] Et non du point à la droite.

Prenons pour inconnue auxiliaire $\rho$ la valeur commune de ces trois rapports. Nous avons

$$(11) \qquad \cos\varphi = \rho A, \quad \sin\varphi = \rho B, \quad p = -\rho C.$$

Mais, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ sont liés par

$$(12) \qquad \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Donc,

$$\rho^2(A^2 + B^2) = 1;$$

d'où

$$(13) \qquad \rho = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Choisissant pour $\rho$ l'une quelconque de ces valeurs, $\varphi$ et $p$ seront donnés par (11); l'angle, étant d'ailleurs déterminé à la fois par son cosinus et son sinus, sera connu à $2k\pi$ près, ce qui définira sans ambiguïté la demi-droite $O\lambda$, d'où le point P, d'où la droite D. Si l'on change ensuite le signe de $\rho$, on retombe sur la même droite, car $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ changent de signe, $\varphi$ se change en $\varphi + \pi$, $O\lambda$ en la demi-droite opposée; mais, $p$ se changeant en $-p$, on retombe sur le même point P, donc sur la même droite D. Finalement, nous voyons que *toute équation du premier degré représente bien une droite.*

Ceci n'est valable qu'en axes rectangulaires. Mais, pour ce qui concerne le degré, on peut l'admettre aussi en axes obliques, puisque le choix des axes est sans influence sur ce point de vue (n° 42).

On peut aussi établir une forme normale de l'équation de la droite en axes obliques ([1]); mais cela présente peu d'intérêt.

Les calculs qui précèdent attirent un certain nombre de conséquences.

D'abord, en supposant toujours les axes rectangulaires, *la perpendiculaire à la droite* D *représentée par l'équation* (9) *a pour paramètres directeurs les coefficients* A *et* B *de $x$ et de $y$*. Si l'on veut les cosinus directeurs ($\cos\varphi$ et $\sin\varphi$), on peut prendre $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$. On oriente ainsi la perpendiculaire en question dans le

([1]) *Cf.* N1, n° 82.

sens du vecteur (A, B), d'où résulte l'orientation de D par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ [1] (nº 65).

Deux droites D et D' ($A'x + B'y + C' = 0$) étant ainsi orientées, leur angle V a pour cosinus, d'après la formule (21) du nº 31,

$$(14) \qquad \cos V = \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

*La condition pour qu'elles soient orthogonales* s'obtient en annulant ce cosinus :

$$(15) \qquad AA' + BB' = 0.$$

C'est là une formule à retenir.

On peut aussi avoir très aisément la formule qui donne *la distance de la droite* D *à un point quelconque* M($x$, $y$) *du plan*. Appliquons la formule (7), en tenant compte de (11) et (13) :

$$(16) \qquad d = \rho(Ax + By + C) = \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Si l'on prend, par exemple, le signe + devant le radical, on a la *distance algébrique de* D *à* M, mesurée suivant la demi-droite qui a la direction et le sens du vecteur (A, B). Si l'on veut simplement la distance absolue, on prendra $|d|$.

67. Cas des axes obliques. — Les formules du numéro précédent ne sont plus exactes. On pourrait les généraliser [2]; mais cela ne nous semble pas utile. Toutes les fois qu'il sera question d'angles, d'orthogonalités, de distances ou, comme on dit, de *propriétés métriques*, nous prendrons des axes rectangulaires. Mais, s'il n'est question que de *propriétés projectives* [3], il n'y aura pas d'inconvénient à choisir des axes obliques [4].

---

[1] On peut dire aussi que D est orientée par le vecteur (B, — A).

[2] *Cf.* N1, nºs 113 et 124.

[3] Ce sont les propriétés non métriques. On les appelle ainsi parce qu'elles se conservent dans toute projection cylindrique, ce qui n'a pas lieu pour les propriétés métriques.

[4] Il peut arriver qu'on ait intérêt à prendre des axes obliques, même lorsqu'il est question de propriétés métriques. On peut se tirer d'affaire en adjoignant aux

Quand les axes sont obliques, *les coefficients* A *et* B ne sont plus les paramètres directeurs de la perpendiculaire à D. Ils *caractérisent néanmoins la direction de la droite*. On peut le voir en se ramenant aux axes rectangulaires par un changement de coordonnées, sans changement d'origine. Les formules de transformation étant homogènes, les coefficients A et B de l'équation transformée dépendent uniquement des coefficients A et B de l'équation proposée. Si ceux-ci restent fixes, C variant, ceux-là le resteront aussi, la perpendiculaire à D menée par O demeurera invariable et, par suite, D se déplacera parallèlement à elle-même.

On peut aussi raisonner directement comme il suit. Je dis que, quels que soient les axes, les équations (1) et

$$Ax + By = 0 \tag{17}$$

représentent des droites D et $D_0$ parallèles. En effet, faisons un changement d'origine quelconque (n° 33); l'équation transformée de (1) s'écrit

$$A(x_0 + x') + B(y_0 + y') + C = 0$$

ou

$$Ax' + By' + (Ax_0 + By_0 + C) = 0. \tag{18}$$

Profitons de l'indétermination de $x_0$, $y_0$ pour annuler le terme constant $Ax_0 + By_0 + C$; il suffit pour cela que la nouvelle origine O' soit sur D. Dans cette hypothèse, l'équation (18) se réduit à (17), aux accents près qui affectent les coordonnées courantes. Imaginons alors qu'on imprime à la figure ($xOy$, $D_0$) la translation $\overrightarrow{OO'}$. La droite $D_0$ viendra se placer suivant la droite dont l'équation par rapport aux axes $x'O'y'$ est l'équation (17), où $x$ et $y$ seraient affectés d'accents. Cette droite est précisément D. On peut donc amener $D_0$ sur D par une translation; il en résulte bien que ces droites sont parallèles [1].

---

axes obliques $Oxy$ des axes rectangulaires $Oxy'$ tels que $(\widehat{Ox, Oy'}) = \frac{\pi}{2}$. En appelant $\theta$ l'angle des premiers, on utilise les formules de changement de coordonnées

$$x' = x + y\cos\theta, \qquad y' = y\sin\theta.$$

[1] Le même raisonnement peut être employé pour démontrer que deux courbes quelconques se déduisent l'une de l'autre par translation. Plus généralement, *pour*

La droite $D_0$ passe à l'origine; on peut donc énoncer la règle pratique suivante :

*On obtient la parallèle menée par l'origine à une droite donnée, en supprimant tous les termes constants dans l'équation de cette droite.*

*Pour que les droites* D *et* D' *soient parallèles*, il faut et suffit que les équations (17) et $A'x + B'y = 0$ représentent la même droite $D_0$, c'est-à-dire que l'on ait (n° 44)

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}. \tag{19}$$

68 COEFFICIENT ANGULAIRE. — Supposons que le coefficient B ne soit pas nul [1]. On peut alors résoudre l'équation par rapport à $y$ :

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \tag{20}$$

L'équation obtenue est de la forme

$$y = mx + n. \tag{21}$$

Cette forme d'équation est assez fréquemment employée. Il ne faut cependant pas s'en exagérer l'importance et tomber dans le travers qui consiste à l'employer exclusivement et à se figurer, en particulier, qu'il faut toujours passer par son intermédiaire dans les questions de directions, d'angles, d'orthogonalité, etc. Elle offre l'inconvénient, parfois très grave, *de détruire la symétrie entre les coordonnées*, et aussi celui de *ne pas convenir pour les parallèles à* $Oy$. Néanmoins, il y a des circonstances où elle est très utile.

Sous la forme (21), on voit que *la ligne droite est la courbe représentative* (t. I, n° 57) *de la fonction linéaire la plus générale.*

Le coefficient $m$ caractérise la direction de la droite, comme cela

---

*montrer que deux courbes* C *et* $C_0$ *sont égales*, on effectue un déplacement d'axes (sans déformation) tel que l'équation transformée de $C_0$ (ou de C) devienne identique à l'équation non transformée de C (ou de $C_0$).

[1] S'il l'était, l'équation serait de la forme $x =$ const. et représenterait une parallèle à $Oy$. De même, si $A = 0$, on a une parallèle à $Ox$.

résulte du numéro précédent. Aussi l'appelle-t-on le *coefficient angulaire* ou encore la *pente* de la droite.

Le terme constant $n$ est l'ordonnée du point d'abscisse nulle ou point de rencontre de la droite avec $Oy$. On l'appelle *ordonnée à l'origine*.

La parallèle $D_0$ menée par l'origine a pour équation

$$y = mx. \tag{22}$$

Le point $(1, m)$ en fait partie; on peut donc prendre *les nombres* $1$, $m$ *comme paramètres directeurs* de D (n° 25) [1].

*Si les axes sont rectangulaires* et si $\alpha$ désigne l'angle polaire de D, arbitrairement orientée, on a, par suite,

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{m}{\sin\alpha};$$

d'où

$$m = \operatorname{tang}\alpha \quad [2]. \tag{23}$$

On peut déduire de cette interprétation géométrique simple la formule qui donne *l'angle* V *de* D *avec* D′. Nous savons que cet angle est défini à $k\pi$ près (n° 15). Sa tangente est seule déterminée sans ambiguïté. Nous pouvons donc prévoir qu'elle seule pourra se calculer sans double signe, c'est-à-dire sans radicaux [3]. Effectivement, si $\alpha'$ désigne l'angle polaire de D′, nous avons

$$V = \alpha' - \alpha + k\pi; \tag{24}$$

d'où

$$\operatorname{tang} V = \operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{\operatorname{tang}\alpha' - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\alpha} = \frac{m' - m}{1 + mm'}. \tag{25}$$

Cette formule est à retenir. Si l'on revient aux coefficients

---

(1) Un système quelconque de paramètres directeurs étant formé par les composantes d'un vecteur quelconque porté par D, on en conclut que *le coefficient angulaire est le rapport des composantes suivant $Oy$ et $Ox$ d'un tel vecteur.*

(2) L'angle $\alpha$ n'est défini qu'à $k\pi$ près (n° 15); mais sa tangente est entièrement déterminée.

(3) Nous avons déjà vu (n° 66) que le calcul de cos V introduisait des radicaux. Comme tang V n'en introduit pas, sin V en introduirait aussi.

A, B, A', B', en comparant (20) à (21), on a

$$\tan V = \frac{AB' - BA'}{AA' + BB'} \quad (26)$$ [1].

En écrivant que tang V est nul ou infini, on retrouve les conditions (19) et (15). En partant de (25), *la condition d'orthogonalité* s'écrit

$$mm' + 1 = 0. \quad (27)$$

On peut donc dire que *pour que deux directions soient rectangulaires, il faut et il suffit que leurs coefficients angulaires aient pour produit* — 1.

69. Droites particulières. — *L'axe des* $x$ a pour équation $y = 0$. Son coefficient angulaire est nul. Une droite parallèle a une équation de la forme $y = \text{const.}$

*L'axe des* $y$ a pour équation $x = 0$. Son coefficient angulaire est infini $\left(m = \frac{y}{x} = \frac{y}{0}\right)$. Une droite parallèle a une équation de la forme $x = \text{const.}$

*La première bissectrice*, ou bissectrice de l'angle formé par les parties positives des axes, a pour équation

$$y = x,$$

comme le vérifiera sans peine le lecteur, en observant que le contour des coordonnées d'un point de cette droite forme un triangle isoscèle. Le coefficient angulaire est 1. Une droite parallèle a une équation de la forme

$$y - x = \text{const.}$$

L'autre bissectrice, ou *seconde bissectrice*, a de même pour équation

$$y = -x,$$

donc pour coefficient angulaire — 1. Une droite parallèle a une équation de la forme

$$y + x = \text{const.}$$

---

[1] Pour le cas où les axes sont obliques, *voir* N1, n°s 112 à 118.

**70. Construction d'une droite donnée par son équation.** — En principe, *on construit deux points particuliers* vérifiant l'équation et on les joint par une droite. Le choix seul de ces points peut varier d'un exemple à l'autre. On s'arrange pour que leurs coordonnées se calculent le plus aisément possible.

La plupart du temps, on cherche *les points sur les axes*. On a le point sur $Ox$, par exemple, en annulant $y$ dans l'équation et résolvant ensuite par rapport à $x$. Citons, à ce propos, *la forme importante d'équation*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \tag{28}$$

qui met en évidence les points en question. Le point sur $Ox$ a pour abscisse $a$ et le point sur $Oy$ a pour ordonnée $b$.

Réciproquement, si l'on connaît les points de rencontre d'une droite avec les axes, on peut écrire instantanément son équation sous la forme (28). Ceci ne s'applique toutefois *qu'autant que la droite ne passe pas à l'origine*. Dans ce cas particulier, on cherche un point en donnant à $x$ une valeur quelconque non nulle, telle que 1, et cherchant la valeur correspondante de $y$. En particulier, si la droite est donnée par son coefficient angulaire, on construit le point $(1, m)$.

**71. Régions positive et négative d'une droite.** — Soit la droite D représentée par l'équation (1). Elle partage le plan en deux régions. Nous savons (n° 56) que l'une est dite *positive*, parce que ses coordonnées rendent positif le premier membre $f(x, y)$ de (1). L'autre région est dite *négative*.

Pour distinguer les deux régions, on peut substituer les coordonnées d'un point particulier, comme il a été expliqué au n° 56. On peut aussi remarquer que *si l'on mène, par un point* $M_0$ *de* D, *le vecteur* $\overrightarrow{M_0M}$ *de projections* A *et* B, *ce vecteur se trouve dans la région positive*. En effet, les coordonnées de M sont $x_0 + A$, $y_0 + B$. Leur résultat de substitution dans $f(x, y)$ est

$$(Ax_0 + By_0 + C) + (A^2 + B^2) = A^2 + B^2,$$

puisque $M_0$ est sur D. Il est bien positif.

72. Équations paramétriques. — Au lieu de représenter une droite par son équation, il est souvent plus commode d'utiliser ses équations paramétriques (n° 45). Rien n'est d'ailleurs plus aisé que d'établir celles-ci, et cela indépendamment de tout ce qui précède.

I. *La droite est définie par un point et par sa direction.* — Soit la droite D issue du point $M_0(x_0, y_0)$ et de paramètres directeurs $(a, b)$. Soit M un quelconque de ses points, dont nous voulons calculer les coordonnées $x, y$. Supposons d'abord les paramètres directeurs unitaires (n° 25). Nous prendrons pour paramètre variable

$$\overline{M_0M} = \rho. \tag{29}$$

En projetant le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ sur les axes, nous avons (n$^{os}$ 23 et 17):

$$x - x_0 = \rho a, \qquad y - y_0 = \rho b;$$

d'où

$$x = x_0 + \rho a, \qquad y = y_0 + \rho b. \tag{30}$$

Si $a$ et $b$ ne sont pas les paramètres unitaires, on a encore les mêmes formules. Seule, la signification de $\rho$ est un peu changée : si $\overrightarrow{V}$ est le vecteur de composantes $a, b$, on a

$$\rho = \frac{\overrightarrow{M_0M}}{\overrightarrow{V}}.$$

Dans tous les cas, on peut dire que $\rho$ *est proportionnel à* $\overline{M_0M}$.

Les $\rho$ des points $M_0$ et à l'infini sont respectivement o et $\infty$.

Les formules (30) nous prouvent une nouvelle fois que la droite est une ligne algébrique [et même unicursale (n° 264)] du premier degré. Du reste, si l'on veut obtenir l'équation implicite, il suffit d'éliminer $\rho$ (n° 58), ce qui donne

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}. \tag{31}$$

Lorsque les axes sont rectangulaires, on peut écrire

$$x = x_0 + \rho\cos\varphi, \qquad y = y_0 + \rho\sin\varphi, \tag{32}$$

$\varphi$ désignant l'angle polaire de la droite, par cela même orientée.

II. *La droite est définie par deux points.* — Soient $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ ces deux points. On pourrait d'abord se ramener au cas précédent, en prenant $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_2$ [projections du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$], puis $M_0$ en $M_1$, ou en $M_2$, ou au milieu de $M_1M_2$ si l'on ne veut pas détruire la symétrie. C'est ainsi que l'équation (31) donnerait, par exemple,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{33}$$

Mais, on peut procéder directement. Posons

$$\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\overrightarrow{MM_2}} = -\lambda. \tag{34}$$

Nous avons (n° 23)

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{35}$$

Remarquons que les $\lambda$ des points $M_1$, $M_2$, à l'infini et au milieu de $M_1M_2$, sont, respectivement, $0$, $\infty$, $-1$, $+1$.

73. Droite de l'infini et droites imaginaires. — L'équation générale des droites en coordonnées homogènes est (n° 44)

$$AX + BY + CT = 0. \tag{36}$$

Or, considérons l'équation particulière

$$T = 0. \tag{37}$$

Elle est de la même forme que (36) et l'on est conduit à dire qu'elle représente une droite. Mais, si l'on revient en coordonnées ordinaires, elle s'écrit $1 = 0$, ce qui est absurde. Cela n'est d'ailleurs pas étonnant, si l'on se souvient que l'équation (37) caractérise les points à l'infini du plan (n° 39). L'équation (37) n'a donc aucun sens, du point de vue de la Géométrie élémentaire. On convient de lui en donner un, du point de vue analytique, en disant qu'elle représente toujours une droite. Cette droite, purement conventionnelle, constitue le lieu des points à l'infini du plan et, pour cette raison, s'appelle la *droite de l'infini*.

On peut aussi la considérer comme la limite d'une droite dont les

points de rencontre $\alpha$, $\beta$ avec les axes, et, par suite, tous les points, s'éloignent indéfiniment de l'origine. Il suffit, pour s'en rendre compte, d'imaginer que les coefficients A et B de l'équation (36) tendent vers zéro, C restant fixe et non nul. L'équation limite obtenue de la sorte n'est autre que (37). D'autre part, $\overline{O\alpha} = -\frac{C}{A}$ et $\overline{O\beta} = -\frac{C}{B}$ augmentent indéfiniment ; $\alpha$ et $\beta$ vont bien à l'infini.

Malgré que la droite de l'infini soit une pure conception analytique, à laquelle nous a conduits la considération des coordonnées cartésiennes homogènes ([1]), nous en parlerons toujours comme d'une droite ordinaire. C'est ainsi que nous dirons que les points à l'infini d'une ligne et, en particulier, le point à l'infini d'une droite sont les points de rencontre de cette ligne ou de cette droite avec la droite de l'infini. C'est là une façon fort commode de parler, dont l'introduction en Géométrie est tout à fait féconde, ainsi qu'on pourra s'en rendre compte dans la suite de cet Ouvrage.

Observons que *la droite de l'infini n'a aucune direction déterminée*. Son coefficient angulaire, $m = -\frac{A}{B}$, se présente, en effet, sous la forme illusoire $\frac{0}{0}$ (t. I, n° 126).

74. Une droite est *imaginaire* (n° 55) si son équation possède au moins un coefficient complexe ([2]), c'est-à-dire est de la forme

$$P + iQ = 0, \tag{38}$$

P et Q étant des fonctions linéaires réelles, dont la seconde n'est pas identiquement nulle.

Théorème I. — *Toute droite imaginaire possède un point réel et un seul.*

C'est le point de rencontre des droites $P = 0$, $Q = 0$ (n° 55). Il peut être accidentellement à l'infini, si ces dernières sont parallèles

---

([1]) Nous verrons (t. III) qu'elle s'introduit aussi tout naturellement dans la théorie des projections coniques.

([2]) Il faut de plus, bien entendu, qu'il ne soit pas possible de rendre les coefficients réels en les divisant par un même facteur.

ou bien si l'une d'elles est la droite de l'infini, ce qui arrive si l'une ou l'autre des formes P et Q se réduit à une constante.

Théorème II. — *Deux droites imaginaires conjuguées se coupent en un point réel.*

Car ce point est le point de rencontre précédent des droites $P = 0$, $Q = 0$.

Théorème III. — *La droite qui joint deux points imaginaires conjugués est réelle.*

En effet, le milieu de ces deux points $M_1$ et $M_2$ est réel (n° 37). De plus, les paramètres directeurs de la droite qui les joint sont proportionnels aux projections $x_2 - x_1$ et $y_2 - y_1$ du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$. Or, ces projections, différences de quantités imaginaires conjuguées, sont des imaginaires pures (t. I, n° 32). Si on les divise par $i$, on obtient des paramètres directeurs réels. La droite $M_1M_2$ a donc une direction réelle. Comme elle a un point réel, elle est réelle.

## II. — PROBLÈMES DIVERS.

75. Droites passant par un point fixe. — Soit un point donné $M_0(x_0, y_0)$. Nous nous proposons de déterminer analytiquement *la droite la plus générale qui passe par ce point.*

Une première méthode consiste à se servir de la représentation paramétrique I du n° 72, en choisissant arbitrairement $a$, $b$. Si l'on veut ensuite particulariser la droite par une condition relative à sa direction, il suffira de donner à ces paramètres des valeurs convenables. C'est ainsi que si l'on cherche *la perpendiculaire menée par* $M_0$ *à une droite* D *donnée par l'équation* (1) en coordonnées rectangulaires, on peut écrire immédiatement ses équations paramétriques sous la forme (n° 66)

$$(39) \qquad x = x_0 + \rho A, \qquad y = y_0 + \rho B.$$

On peut aussi chercher l'*équation générale* des droites qui passent par $M_0$. Partons de l'équation (1), où A, B, C ont des valeurs quelconques. Écrivons que la droite représentée par cette équation passe par $M_0$; nous obtenons l'unique condition à laquelle doivent

satisfaire A, B, C :

$$A x_0 + B y_0 + C = 0. \tag{40}$$

Nous pouvons, par exemple, choisir arbitrairement A et B et résoudre par rapport à C. En portant dans (1) ou, ce qui revient au même, en retranchant (40) de (1), nous avons l'équation générale demandée

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \tag{41}$$

où, répétons-le, A et B sont arbitraires.

En fonction du coefficient angulaire, elle s'écrit

$$y - y_0 = m(x - x_0). \tag{42}$$

Comme application, on peut écrire instantanément *l'équation de la droite menée par* $M_0$ *perpendiculairement à la direction de cosinus directeurs* $a$, $b$ (nº 66) :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \tag{43}$$

En particulier, si la direction donnée est définie par son angle polaire $\varphi$, l'équation (43) s'écrit

$$(x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi = 0. \tag{44}$$

76. Il peut arriver que *le point* $M_0$ *soit défini comme étant l'intersection de deux droites données* (P) et (Q), d'équations respectives

$$P = 0, \qquad Q = 0.$$

Dans ce cas, il ne faudrait pas se croire obligé de calculer les coordonnées $x_0$, $y_0$ pour avoir l'équation générale cherchée. Celle-ci peut, en effet, s'écrire

$$P + \lambda Q = 0, \tag{45}$$

où $\lambda$ désigne un paramètre arbitraire.

D'abord, il est évident que la droite (45) passe par $M_0$, quel que soit $\lambda$, car les coordonnées de $M_0$ annulent P, Q, donc $P + \lambda Q$. En outre, elle peut coïncider avec n'importe quelle droite $M_0\delta$ passant par $M_0$. En effet, prenons un point $M_1$ sur $M_0\delta$, autre que $M_0$.

Calculons $\lambda$ pour que ce point vérifie (45); nous avons l'équation

$$P_1 + \lambda Q_1 = 0, \tag{46}$$

qui détermine $\lambda$ de manière unique, car $P_1$ et $Q_1$ ne peuvent être nuls tous deux, puisque $M_1$ n'est pas à l'intersection de (P) et (Q).

Le paramètre $\lambda$ étant ainsi calculé, la droite (45) a deux points communs $M_0$ et $M_1$ avec $M_0\delta$, donc coïncide avec elle.

Ceci peut sembler en défaut lorsque $Q_1 = 0$, c'est-à-dire lorsque $M_0\delta$ coïncide avec (Q). Mais alors, il suffit d'*admettre la valeur* $\lambda = \infty$. L'équation (45), divisée au préalable par $\lambda$, se réduit à $Q = 0$ et représente encore $M_0\delta$.

On peut éviter cette légère objection *en prenant l'équation* (45) *sous la forme homogène*

$$\lambda P + \mu Q = 0, \tag{47}$$

$\lambda$ et $\mu$ étant tous deux arbitraires. Le paramètre $\lambda$ de tout à l'heure est ici $\frac{\mu}{\lambda}$. On a la droite (Q) en prenant simplement $\lambda = 0$, de même que (P) est donnée par $\mu = 0$.

Les équations (45) et (47) conviennent encore lorsque $M_0$ est à l'infini, c'est-à-dire lorsque (P) et (Q) sont parallèles. Il suffirait, pour le voir, de passer en coordonnées homogènes. Le raisonnement précédent s'appliquerait sans aucun changement. On peut aussi vérifier que, quel que soit $\lambda$, la droite (45) est, dans l'hypothèse actuelle, parallèle à (P) et à (Q). Nous laisserons au lecteur le soin de le faire.

Les équations (45) ou (47) représentent ce qu'on appelle *un faisceau de droites*. Le point $M_0$ est le *sommet* ou *point de base* du faisceau.

Théorème. — *Si l'équation d'une droite renferme un paramètre variable* $\lambda$ *au premier degré, la droite passe par un point fixe.*

Car, si l'on ordonne par rapport au paramètre, on obtient une équation de la forme (45). Le point fixe est obtenu en annulant séparément le coefficient de $\lambda$ et l'ensemble des termes indépendants de $\lambda$ ou, plus généralement, en prenant l'intersection des droites correspondant à deux valeurs particulières de $\lambda$, qu'on choisit de manière à avoir des simplifications, quand c'est possible.

77. Faisceau de droites ayant pour sommet l'origine. — Théorème. — *Toute équation algébrique, homogène en $x$, $y$ et de degré $p$, représente un faisceau* [1] *de $p$ droites passant à l'origine.*

Soit

$$f(x, y) = 0 \tag{48}$$

cette équation. Divisons-la par $x^p$, elle devient (t. I, n° 133)

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0$$

ou

$$f(1, m) = 0, \tag{49}$$

en posant $\frac{y}{x} = m$. L'équation (49) en $m$ est algébrique et généralement de degré $p$. Elle admet $p$ racines $m_1, m_2, \ldots, m_p$ (t. I, n° 219). Pour qu'un point vérifie (49), il faut et suffit qu'il vérifie l'une des équations

$$y = m_1 x, \qquad y = m_2 x, \qquad \ldots, \qquad y = m_p x. \tag{50}$$

Or, ces équations représentent $p$ droites passant à l'origine. L'ensemble de ces $p$ droites constitue la courbe définie par (48) et le théorème est démontré.

*Remarques.* — I. L'énoncé précédent n'est général que si l'on admet les droites imaginaires correspondant aux racines imaginaires de (49) et si l'on compte pour $\alpha$ droites celle qui correspond à une racine multiple d'ordre $\alpha$.

II. Il peut arriver que le degré de (49) soit abaissé de $q$ unités. Cela indique alors que $f(x, y)$ renferme $x^q$ en facteur. L'équation (48) est donc vérifiée pour $x = 0$, quel que soit $y$. Notre faisceau comprend alors $Oy$, qui doit être compté $q$ fois; moyennant quoi, l'énoncé est toujours général.

L'équation (49) s'appelle *l'équation aux coefficients angulaires* des droites du faisceau; le lecteur voit pour quelle raison. On l'obtient en faisant $x = 1$, $y = m$ dans (48).

---

[1] Le mot *faisceau* a ici un sens un peu différent de celui qu'il avait au numéro précédent; il ne comprend qu'un nombre fini de droites et non pas une infinité.

78. Théorème. — *Étant données deux courbes algébriques*

(51) $$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0,$$

*on obtient l'équation du faisceau des droites joignant l'origine à leurs points d'intersection en éliminant la variable d'homogénéité entre leurs équations.*

Rendons les équations (51) homogènes :

(52) $$\Phi(X, Y, T) = 0, \qquad \Psi(X, Y, T) = 0.$$

Tout point P commun aux deux courbes, qu'il soit ou non à distance finie, a des coordonnées homogènes qui vérifient à la fois les deux équations (52) en T et annulent par suite leur résultant R(X, Y). Tout point M de la droite OP a maintenant des coordonnées ordinaires $x$, $y$ qu'on peut prendre égales à X, Y, puisque X, Y sont définies à un facteur près, et vérifiant, en conséquence, l'équation

(54) $$R(x, y) = 0.$$

Réciproquement, si un point M vérifie (54), les équations (52), où l'on remplacerait X, Y par $x$, $y$, ont au moins une racine commune en T, soit $T_1$ (¹). Mais alors le point P de coordonnées homogènes ($x$, $y$, $T_1$) appartient à l'intersection. Or, le point M se trouve sur OP.

On voit finalement que, pour qu'un point M appartienne à l'une des droites OP, il faut et il suffit que ses coordonnées satisfassent à l'équation (54). Cette équation représente donc bien le faisceau des droites OP.

*Remarque.* — D'après la démonstration précédente, $R(x, y)$ est nécessairement homogène. On peut le vérifier, en ordonnant (52) suivant les puissances de T et appliquant le théorème du poids (t. I, n° 233). On trouve ainsi que l'équation (54) est homogène et de degré $pq$ en appelant $p$ et $q$ les degrés des courbes proposées. Le faisceau qu'elle represente comprend donc $pq$ droites (n° 77). On démontre que si l'une de ces droites est multiple d'ordre $\alpha$, il s'y trouve $\alpha$ points d'intersection. D'où il résulte que le nombre total de ces points est $pq$, conformément au théorème de Bezout (n° 46).

---

(¹) Si $T_1 = 0$, P est à l'infini.

79. Il nous arrivera souvent de considérer des *faisceaux de deux droites*. Un tel faisceau est représenté par une *équation quadratique* de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0. \tag{55}$$

L'équation aux coefficients angulaires est

$$Cm^2 + 2Bm + A = 0. \tag{56}$$

*Pour que les deux droites du faisceau soient réelles*, il faut et suffit que cette équation ait des racines réelles; d'où la condition

$$AC - B^2 \leqq 0. \tag{57}$$

Dans le cas de l'égalité, les deux droites sont confondues.

*Pour que les deux droites soient perpendiculaires*, il faut et suffit, en supposant les axes rectangulaires, que leurs coefficients angulaires, qui sont les racines de (56), aient pour produit $-1$ (n° 68). Or, ce produit est égal à $\frac{A}{C}$; d'où la condition $\frac{A}{C} = -1$ ou

$$A + C = 0. \tag{58}$$

80. Condition pour que trois droites soient concourantes. — Soient les trois droites

$$\left\{\begin{array}{l} P_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ P_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \\ P_3 \equiv A_3 x + B_3 y + C_3 = 0. \end{array}\right. \tag{59}$$

Pour qu'elles soient concourantes, il faut et suffit que le système (59) soit compatible en $x$, $y$ ou, plus exactement et afin de ne pas éliminer le cas où, les droites étant parallèles, le point de concours serait à l'infini, que le système homogène obtenu en employant des coordonnées homogènes admette une solution non nulle. On sait (t. I, n° 292) que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est*

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{60}$$

On peut donner une autre interprétation. La condition $\Delta = 0$

exprime que les trois formes linéaires $P_1$, $P_2$, $P_3$ sont dépendantes (t. I, n° 296). Donc, pour que les trois droites soient concourantes, il faut et il suffit qu'on *puisse trouver trois nombres* $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ *non tous nuls* tels que

$$(61) \qquad \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0.$$

Du reste, on peut démontrer directement cette nouvelle règle.

Si la droite $(P_3)$ passe par l'intersection de $(P_1)$, $(P_2)$, on sait (n° 76) que son équation peut être mise sous la forme

$$(62) \qquad \lambda P_1 + \mu P_2 = 0.$$

Mais, les équations (62) et $P_3 = 0$ représentant la même droite, on a une identité de la forme (n° 44)

$$\lambda P_1 + \mu P_2 \equiv \nu P_3,$$

ce qui est (61), aux notations près.

Inversement, si l'on a (61) avec, par exemple, $\lambda_3 \neq 0$, on peut en tirer $P_3 \equiv -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} P_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} P_2$. D'où il résulte que $(P_3)$ passe par l'intersection de $(P_1)$ et de $(P_2)$.

La condition (61) est quelquefois d'une application très commode, parce qu'on aperçoit, dès la première inspection, la combinaison linéaire à former. C'est ainsi qu'il arrive qu'en ajoutant simplement les équations on obtienne une identité.

81. Droite passant par deux points. — Soient les deux points $M_1$, $M_2$. On peut d'abord définir la droite qui les joint par l'équation (33) ou par les équations paramétriques (35). Voici maintenant une autre forme d'équation fréquemment employée.

Afin que notre raisonnement puisse convenir pour le cas où l'un des points $M_1$, $M_2$ irait à l'infini, employons des coordonnées homogènes. Soient $(X_1, Y_1, T_1)$ les coordonnées de $M_1$ et $(X_2, Y_2, T_2)$ celles de $M_2$. Soit, d'autre part,

$$(63) \qquad AX + BY + CT = 0$$

l'équation cherchée. Les coefficients inconnus A, B, C doivent vérifier les relations

$$(64) \qquad \begin{cases} AX_1 + BY_1 + CT_1 = 0, \\ AX_2 + BY_2 + CT_2 = 0. \end{cases}$$

On pourrait en tirer des valeurs proportionnelles à A, B, C qu'on porterait ensuite dans (63). Ceci revient à éliminer les inconnues homogènes A, B, C entre les trois équations (63) et (64). Or, on peut faire immédiatement cette élimination, par l'emploi d'un déterminant (t. I, n° 292) :

$$(65)\qquad \begin{vmatrix} X & Y & T \\ X_1 & Y_1 & T_1 \\ X_2 & Y_2 & T_2 \end{vmatrix} = 0$$

Telle est l'équation cherchée.

Si les points $M_1$, $M_2$ sont à distance finie, on peut l'écrire, en divisant les première, deuxième et troisième lignes par T, $T_1$, $T_2$ respectivement :

$$(66)\qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

82. Aire d'un triangle. — Soit le triangle $A_1A_2A_3$ défini par les coordonnées cartésiennes rectangulaires [1] de ses sommets. Nous nous proposons de calculer son aire algébrique S (t. I, n° 174), en supposant qu'on prenne comme sens positif, sur le périmètre, le sens $A_1A_2A_3$. Rappelons que S est positif ou négatif, suivant que ce sens coïncide avec le sens positif défini par les axes (t. I, note de la page 220) ou avec le sens opposé.

Cela posé, abaissons la hauteur $A_1H$. Le côté $A_2A_3$ étant orienté de $A_2$ vers $A_3$, nous en déduirons l'orientation de la droite qui porte la hauteur par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de H (n° 65). Dès lors, nous avons, en grandeur et en signe,

$$(67)\qquad 2S = A_2A_3 \times \overline{HA_1},$$

car il est manifeste que S et $\overline{HA_1}$ ont toujours le même signe.

Or, soit $\varphi$ l'angle polaire de la hauteur orientée. Celui de $A_2A_3$ est $\varphi - \frac{\pi}{2}$. En projetant $\overrightarrow{A_2A_3}$ sur les axes, nous avons

$$(68)\qquad \begin{cases} x_3 - x_2 = A_2A_3 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = A_2A_3 \sin\varphi, \\ y_3 - y_2 = A_2A_3 \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -A_2A_3 \cos\varphi. \end{cases}$$

---

[1] Pour les axes obliques, *voir* XI, n° 129.

D'autre part, soit

$$(69)\qquad D = x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$$

l'équation de $A_2A_3$ sous la forme normale. Nous savons que l'on a (nº 65)

$$(70)\qquad \overline{HA_1} = x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p.$$

Mais l'équation de $A_2A_3$ peut encore s'écrire (nº 81)

$$(71)\qquad D' = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En comparant les coefficients de $x$ dans (69) et (71), on voit que

$$\frac{D'}{D} = \frac{y_2 - y_3}{\cos\varphi} = A_2A_3.$$

De sorte que si

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

on a

$$\Delta = (x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p).A_2A_3 = \overline{HA_1}.A_2A_3 = 2S.$$

Nous avons donc finalement la formule

$$(72)\qquad 2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

*Remarque.* — Si l'on échange deux des indices, le sens positif du périmètre est changé, donc aussi le signe de S. Mais il en est bien de même du signe de $\Delta$, car on a échangé deux lignes de ce déterminant (t. I, nº 278).

# CHAPITRE VII.

## LE PLAN ET LA DROITE DANS L'ESPACE.

### I. — LE PLAN.

**83.** Équation du plan. — De même que la droite en Géométrie plane, le plan, dans l'espace, est représenté par une équation du premier degré

$$(1)\qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

et réciproquement. Ceci peut se démontrer en généralisant les raisonnements des nos 64 et 65. Reprenons seulement celui du no 65.

*Les axes étant supposés rectangulaires*, nous nous proposons d'établir l'équation d'un plan donné P.

Abaissons de O la perpendiculaire sur P et orientons-la par une demi-droite O$\lambda$, de cosinus directeurs $a$, $b$, $c$. Soit maintenant Q l'intersection de P avec O$\lambda$. Nous posons $p = \overline{OQ}$. Les quatre nombres $a$, $b$, $c$, $p$, dont les trois premiers sont liés par (no 24)

$$(2)\qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad (^1),$$

déterminent complètement la position du plan P. Nous les appellerons les *coordonnées normales* de ce plan.

Quand un plan sera défini par ses coordonnées normales, il sera toujours orienté, sauf indication contraire, par la demi-droite O$\lambda$ (no 27).

Cela posé, soit un point M ($x$, $y$, $z$) de l'espace. Projetons-le orthogonalement en R sur P. Nous allons calculer $d = \overline{RM}$, *distance du plan au point*, comptée positivement suivant O$\lambda$.

Nous avons l'égalité géométrique

$$(3)\qquad \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RM} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}.$$

---

(1) On peut prendre, par exemple, $a = \sin\theta\cos\varphi$, $b = \sin\theta\sin\varphi$, $c = \cos\theta$ (no 30).

Projetons-la orthogonalement sur $O\lambda$ :

$$p + d = xa + yb + zc\,;$$

d'où

$$(4) \qquad d = ax + by + cz - p.$$

En annulant $d$, nous avons l'équation du plan P, sous la *forme normale* ou *canonique*

$$(5) \qquad ax + by + cz - p = 0.$$

Elle est bien du premier degré en $x, y, z$.

Réciproquement, l'équation (1) représente un plan, quels que soient A, B, C, D. En effet, elle représente la même surface que (5), si l'on prend (n° 48)

$$(6) \quad a = \rho A, \quad b = \rho B, \quad c = \rho C, \quad p = -\rho D, \quad \rho = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

En axes obliques ([2]), tout plan est aussi représenté par une équation du premier degré et réciproquement, puisque le choix des axes est sans influence sur le degré (n° 48).

84. Si l'on revient aux axes rectangulaires, *la normale au plan* P *représentée par l'équation* (1) *a pour paramètres directeurs* A, B, C, coefficients de $x, y, z$. Si l'on veut les cosinus directeurs, on peut prendre $\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. On oriente ainsi la normale dans le sens du vecteur (A, B, C), d'où résulte l'orientation du plan.

L'*angle de deux plans* orientés P et P', étant défini par l'angle de leurs normales, est donné par la formule

$$(7) \qquad \cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

La *condition d'orthogonalité* s'écrit

$$(8) \qquad AA' + BB' + CC' = 0.$$

La *distance du plan* (1) *au point* $M(x, y, z)$, comptée positive-

---

([2]) On peut aussi établir une équation canonique. *Cf.* N III, n°s 47 et 48.

ment suivant le vecteur (A, B, C), est

$$d = \frac{Ax + By + Cz + D}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{9}$$

85. Comme au n° 67, on démontrerait que si D varie, A, B, C restant fixes, le plan se déplace parallèlement à lui-même, même si les axes sont obliques. En particulier, *on a le plan parallèle mené par l'origine en supprimant le terme constant :*

$$Ax + By + Cz = 0. \tag{10}$$

On en déduit la *condition de parallélisme* des plans P, P' :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}. \tag{11}$$

La condition *pour que le plan* P *soit parallèle à la direction de paramètres directeurs* $a$, $b$, $c$ s'écrit

$$Aa + Bb + Cc = 0, \tag{12}$$

car elle exprime que le plan (10) contient le point $(a, b, c)$ et, par suite, la parallèle à la direction proposée menée par l'origine.

Comme au n° 71, on démontrerait que *la région positive* du plan peut être indifféremment caractérisée, soit par le signe de $Ax + By + Cz + D$, qui doit être le signe $+$ pour tout point de ladite région, soit par le vecteur (A, B, C), qui doit s'y trouver si on lui donne pour origine un point du plan.

Signalons enfin l'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0, \tag{13}$$

qui est commode *lorsqu'on définit le plan par ses points sur les axes* ($\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$), mais qui cesse d'être applicable quand le plan passe à l'origine.

Si l'on suppose, par exemple, $c$ infini, l'équation se réduit à

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 \tag{14}$$

et représente un *plan parallèle à* O$z$, comme d'ailleurs *toute équation du premier degré ne renfermant pas* $z$ (*cf.* n° 47).

Les plans de coordonnées et leurs plans bissecteurs ont pour équations (*cf.* n° 69)

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0; \quad y \pm z = 0, \quad z \pm x = 0, \quad x \pm y = 0.$$

86. Plan de l'infini et plans imaginaires. — L'équation générale des plans en coordonnées homogènes s'écrit

(15) $$AX + BY + CZ + DT = 0.$$

L'équation

(16) $$T = 0$$

est de cette forme. On est donc conduit à dire qu'elle représente un plan, bien qu'elle conduise à une absurdité, si l'on revient aux coordonnées ordinaires. Pour les raisons qui ont été exposées au n° 73, on dit que l'équation (16) représente *le plan de l'infini*, lieu des points à l'infini de l'espace et position limite d'un plan dont les points de rencontre avec les axes et, par suite, tous les points, s'éloigneraient indéfiniment de l'origine.

Les points à l'infini d'une ligne sont ses points de rencontre avec le plan de l'infini. Les points à l'infini d'une surface constituent une ligne plane, section de la surface par le plan de l'infini.

En particulier, les points à l'infini d'un plan quelconque de l'espace constituent une droite, intersection de ce plan avec le plan de l'infini; c'est la droite de l'infini du plan (n° 73).

87. Un plan *imaginaire* a une équation de la forme

(17) $$P + iQ = 0,$$

P et Q étant des fonctions linéaires à coefficients réels.

*Tout plan imaginaire possède une droite réelle;* c'est la droite d'équations (n° 55)

(18) $$P = 0, \quad Q = 0.$$

*Deux plans imaginaires conjugués se coupent suivant une droite réelle*, qui est la droite précédente.

88. Plans passant par un point fixe. — L'équation générale des

plans qui passent par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ peut s'écrire

$$(19)\qquad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

A, B, C étant arbitraires. Cela s'établirait en répétant le raisonnement du n° 75.

Comme application, on peut écrire instantanément *l'équation du plan mené par* $M_0$ *perpendiculairement à la droite de cosinus directeurs* $a$, $b$, $c$, soit (n° 84)

$$(20)\qquad a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

Il peut arriver que le point $M_0$ soit défini par l'intersection de trois plans [1] :

$$(21)\qquad P=0,\qquad Q=0,\qquad R=0.$$

On peut alors écrire l'équation générale cherchée sous la forme

$$(22)\qquad \lambda P+\mu Q+\nu R=0,$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$ étant arbitraires. Cela se justifie par un raisonnement analogue à celui du n° 76.

Les plans (22) constituent *un réseau de plans*, dont le point $M_0$ est le *sommet* ou *point de base*.

L'équation (22) peut aussi s'écrire, sous forme non homogène,

$$(23)\qquad P+\lambda Q+\mu R=0.$$

89. *La condition pour que quatre plans soient concourants* se trouve en généralisant les raisonnements du n° 80. Soient les quatre plans

$$(24)\qquad \begin{cases} P_1\equiv A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ P_2\equiv A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\\ P_3\equiv A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\\ P_4\equiv A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0.\end{cases}$$

Pour qu'ils aient un point commun à distance finie ou à l'infini, il faut et il suffit que l'on ait

$$(25)\qquad \| A_i \quad B_i \quad C_i \quad D_i \| = 0,$$

---

(1) Il peut alors être à l'infini.

ou encore qu'on puisse trouver quatre nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ non tous nuls donnant lieu à l'identité

$$(26) \qquad \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 \equiv 0.$$

90. Plans passant par une droite fixe. — Si la droite est donnée par deux points $M_0$, $M_1$, à distance finie ou à l'infini, on prend un plan quelconque (1) et l'on écrit qu'il passe par $M_0$ et $M_1$. On obtient de la sorte deux conditions entre A, B, C, D, desquelles on peut toujours tirer deux des coefficients en fonction des deux autres.

Supposons maintenant que la droite soit définie comme intersection de deux plans : $P = 0$, $Q = 0$. En raisonnant comme au n° 76, on prouvera que l'équation générale cherchée est de la forme

$$(27) \qquad P + \lambda Q = 0$$

ou

$$(28) \qquad \lambda P + \mu Q = 0.$$

Les plans (27) ou (28) constituent un *faisceau de plans*, dont la droite fixe est la *droite de base*.

*Condition pour que trois plans aient une droite commune.* — Pour que les trois plans $(P_1)$, $(P_2)$, $(P_3)$ aient une droite commune, *il faut et il suffit que l'on puisse trouver trois nombres* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *non tous nuls donnant lieu à l'identité*

$$(29) \qquad \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv 0.$$

(Répéter identiquement le raisonnement du n° 80.)

Il revient au même de dire que les trois formes linéaires

$$(30) \qquad P_i' = A_i X + B_i Y + C_i Z + D_i T$$

doivent être dépendantes (t. I, n° 295). Ceci exige, comme on sait (t. I, n° 296, théorème I), la nullité des quatre déterminants du troisième ordre déduits du Tableau

$$(31) \qquad \left\| \begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{matrix} \right\|.$$

On arrive au même résultat en exprimant que le système linéaire et homo-

gène

$$P'_1 = 0, \qquad P'_2 = 0, \qquad P'_3 = 0 \tag{32}$$

possède deux variables non principales (t. I, n° 290), comme cela doit être si les trois plans ont en commun tous les points d'une droite.

91. Plan passant par trois points. — En raisonnant comme au n° 81, le lecteur trouvera que le plan passant par les trois points $M_1(X_1, Y_1, Z_1, T_1)$, $M_2(X_2, Y_2, Z_2, T_2)$, $M_3(X_3, Y_3, Z_3, T_3)$ a pour équation, en coordonnées homogènes,

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & T \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & T_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & T_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & T_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{33}$$

Si les trois points sont à distance finie, on peut aussi l'écrire

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{34}$$

Si l'un des points est à l'infini, il suffit d'annuler son T dans l'équation (33). C'est ainsi que le plan passant par le point $M_1$, à distance finie et parallèle aux deux directions de paramètres directeurs $(a, b, c)$, $(a', b', c')$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{35}$$

ou, en retranchant la deuxième ligne de la première et développant suivant la dernière colonne,

$$\| x - x_1 \quad a \quad a' \| = 0. \tag{36}$$

92. Projection d'une aire plane. — Soit une courbe fermée et orientée (C), tracée dans un plan orienté P. Soit maintenant un autre plan orienté P'. Projetons orthogonalement (C) sur P', suivant (C'), et orientons (C') au moyen de (C), c'est-à-dire que si un

point M décrit (C) dans le sens positif, sa projection M' devra décrire (C') dans le sens positif.

Cela posé, nous avons défini, au n° 174 du Tome I, les aires algébriques A et A' limitées par (C) et (C'). Nous allons prouver que si $\varphi$ désigne l'angle de nos deux plans orientés, c'est-à-dire l'angle de leurs normales positives (n° 27), *on a la formule*

$$A' = A \cos\varphi. \tag{37}$$

A cet effet, prenons le plan P' pour plan des $x'y'$ d'un trièdre trirectangle $Ox'y'z'$. Faisons tourner celui-ci d'un angle $\varphi$ autour de $Ox'$, ce qui l'amène en $Oxyz$ [1]. Nous pouvons prendre $Oxy$ pour plan P. Or, nous savons (t. I, n° 174) que A et A' sont données par les intégrales définies

$$A = \int_{t_0}^{t_1} x\,dy, \qquad A' = \int_{t_0}^{t_1} x'\,dy', \tag{38}$$

où la variable d'intégration $t$ est choisie de telle manière que, lorsque $t$ croît de $t_0$ à $t_1$, M décrive (C'), en entier, une seule fois et dans le sens positif.

D'autre part, les deux premières formules du changement de coordonnées (n° 34) nous donnent, en supposant $z$ nul,

$$x' = x, \qquad y' = y\cos\varphi, \tag{39}$$

car les coordonnées de M' sont les deux premières coordonnées de M par rapport à $Ox'y'z'$. Portant ces valeurs dans A', nous obtenons

$$A' = \int_{t_0}^{t_1} x\,dy\cos\varphi = \cos\varphi \int_{t_0}^{t_1} x\,dy = A\cos\varphi. \qquad \text{C. Q. F. D.} \tag{40}$$

Une démonstration plus élémentaire consisterait à admettre (37) en valeur absolue, ce qui est une proposition bien connue, et à vérifier ensuite l'identité des signes dans tous les cas de figure possibles.

Si l'on applique la formule (37) aux projections $S_x$, $S_y$, $S_z$ sur les plans de coordonnées d'une aire S située dans un plan orienté par

[1] Le lecteur est prié de faire la figure, s'il en éprouve le besoin.

les cosinus directeurs $a, b, c$ de sa normale, on a

(41) $$S_x = S.a, \qquad S_y = S.b, \qquad S_z = S.c.$$

Élevant au carré et ajoutant, nous avons la formule intéressante

(42) $$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2(a^2 + b^2 + c^2) = S^2.$$

On peut l'appliquer, par exemple, à un triangle $A_1A_2A_3$ de l'espace, en prenant, conformément au n° 82,

(43) $$2S_x = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad 2S_y = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad 2S_z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

93. Volume d'un tétraèdre. — Soit le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, défini par les coordonnées rectangulaires [1] de ses sommets. Nous nous proposons d'évaluer son *volume algébrique*, défini de la manière suivante :

Orientons le plan $A_2A_3A_4$ par le sens de parcours $A_2A_3A_4$ sur le périmètre du triangle $A_2A_3A_4$ (n° 13). *Le volume V sera positif ou négatif suivant que le point $A_1$ se trouvera dans la région positive ou dans la région négative du plan ainsi orienté* (n° 27).

Abaissons la hauteur $A_1H$. Appelons S la surface absolue du triangle $A_2A_3A_4$, qui est aussi son aire algébrique, d'après la convention faite précédemment pour l'orientation de son plan. On a, en grandeur et en signe,

(44) $$V = \frac{1}{3} S.\overline{HA_1},$$

$\overline{HA_1}$ étant comptée positivement suivant la normale positive au plan $A_2A_3A_4$.

Si $a$, $b$, $c$ sont les cosinus directeurs de cette normale, l'équation canonique du plan $A_2A_3A_4$ est de la forme

(45) $$P \equiv ax + by + cz - p = 0$$

et l'on a (n° 83)

(46) $$\overline{HA_1} = ax_1 + by_1 + cz_1 - p.$$

---

[1] Pour le cas des axes obliques, *voir* Note III, n° 72.

Mais l'équation du plan $A_2A_3A_4$ peut aussi s'écrire (n° 91)

$$(47)\qquad P' \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En comparant les coefficients de $x$ dans (45) et (47), on voit que

$$(48)\qquad \frac{P'}{P} = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{a}S_x = 2S,$$

en appelant $S_x$ l'aire algébrique de la projection du triangle $A_2A_3A_4$ sur $yOz$ et s'appuyant sur le numéro précédent. Par suite,

$$(49)\qquad \overline{HA_1} = P_1 = \frac{P'_1}{2S}.$$

Portant dans (44), nous obtenons finalement la formule

$$(50)\qquad 6V = P'_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

On remarquera son analogie avec la formule (72) du Chapitre précédent.

On pourrait en déduire aisément les changements de signe que subit V quand on permute les indices de différentes manières et contrôler ces changements en s'appuyant seulement sur la convention faite au début de ce numéro.

## II. — LA DROITE.

94. Équations d'une droite. — Toute droite D, pouvant être définie comme intersection de deux plans (P) et (P'), peut être représentée par deux équations du premier degré

$$(51)\qquad P \equiv Ax + By + Cz + D = 0, \qquad P' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

qui sont *ses équations* (n° 50).

Une certaine indétermination réside dans le choix de ces équations,

provenant de ce qu'il existe une double infinité de manières [1] de définir une droite donnée comme intersection de deux plans. On peut remplacer les équations (51) par les suivantes :

$$(52) \qquad \lambda P - \lambda' P' = 0, \qquad \mu P + \mu' P' = 0,$$

où $\lambda$, $\lambda'$, $\mu$, $\mu'$ sont quatre constantes assujetties à l'unique condition

$$(53) \qquad \lambda\mu' - \lambda'\mu \neq 0.$$

En particulier, on peut toujours prendre pour équations d'une droite celles de deux de ses plans projetants. On pourra prendre, par exemple, les plans projetant sur $zOx$ et $zOy$, à condition qu'ils ne soient pas confondus, circonstance qui ne peut se présenter que pour une droite parallèle à $xOy$. *Si donc la droite* D *n'est pas parallèle au plan des $xy$, on peut écrire ses équations sous la forme particulière* [2]

$$(54) \qquad x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

où $a$, $b$, $p$, $q$ sont quatre constantes, déterminées en même temps que D. Ceci nous prouve, en passant, que *la droite la plus générale de l'espace dépend de quatre paramètres indépendants*, ce qu'on peut d'ailleurs voir de bien d'autres manières.

*Si la droite* D *est parallèle à $xOy$*, on peut la déterminer par le plan qui la projette à la fois sur $zOx$ et $zOy$ et par le plan qui la projette sur $xOy$; on a ainsi les équations

$$(55) \qquad z = h, \qquad Ax + By + C = 0.$$

La parallèle $D_0$ à la droite D représentée par les équations (51), menée par l'origine, est obtenue en menant par O les plans ($P_0$) et ($P'_0$) parallèles à (P) et (P'). Ses équations s'obtiennent par simple suppression des termes constants (n° 85), soient

$$Ax + By + Cz = 0, \qquad A'x + B'y + C'z = 0.$$

---

(1) C'est-à-dire dépendant de deux paramètres arbitraires.

(2) $x$ figure nécessairement dans la première équation, parce que la projection de D sur $zOx$ n'est pas parallèle à $Ox$ (n° 68). De même, $y$ figure dans la seconde. Il ne faut pas attacher une trop grande importance aux équations (54), qui ont l'inconvénient de détruire la symétrie des coordonnées et de ne pas convenir à toutes les droites (*cf.* n° 68).

De ces équations, on peut tirer (t. I, n° 292)

$$\frac{x}{BC' - CB'} = \frac{y}{CA' - AC'} = \frac{z}{AB' - BA'}.$$

Il en résulte (n° 25) que les quantités $BC' - CB'$, $CA' - AC'$, $AB' - BA'$ peuvent être prises comme paramètres directeurs de $D_0$ et, par suite, de D.

95. Équations paramétriques. — Nous avons les mêmes équations qu'en Géométrie plane, avec simplement une coordonnée de plus.

I. *La droite est définie par un point et par sa direction.* — Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ le point et soient $a$, $b$, $c$ les paramètres directeurs de la droite. Comme au n° 72, on montrerait que les coordonnées d'un point quelconque M de D sont

(56) $$x = x_0 + \rho a, \qquad y = y_0 + \rho b, \qquad z = z_0 + \rho c,$$

$\rho$ désignant $\overline{M_0 M}$ ou une quantité proportionnelle.

En éliminant $\rho$, on a les équations de la droite sous la forme

(57) $$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Comme application, on peut écrire instantanément les équations, en coordonnées rectangulaires, *de la perpendiculaire au plan* (1) *menée par* $M_0$. Il suffit (n° 84) de remplacer, dans (56) ou (57), $a$, $b$, $c$ par A, B, C.

II. *La droite est définie par deux points.* — Soient $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ces deux points. On pourrait d'abord se ramener au cas précédent, en prenant $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$, $c = z_2 - z_1$ (*cf.* n° 72). Les équations (57) donneraient, par exemple,

(58) $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

On peut ainsi poser $\dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = -\lambda$; on a alors

(59) $$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

96. Distance d'un point a une droite. — La méthode à employer diffère suivant la manière dont la droite est définie.

*Premier cas : La droite est définie par un point et par ses cosinus directeurs.* — Soient $M_0(x_0, y_0, z_0)$ le point et $a$, $b$, $c$ les cosinus directeurs. Soit, d'autre part, le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$, qui se projette orthogonalement en P sur D. Le triangle rectangle $M_0PM_1$ nous donne

$$(61) \qquad \overline{M_1P}^2 = \overline{M_0M_1}^2 - \overline{M_0P}^2.$$

Or (n° 177),

$$(62) \qquad \overline{M_0M_1}^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2.$$

En second lieu, $\overline{M_0P}$ est la projection, sur D, du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$, qui a pour composantes suivant les axes $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$. On a donc

$$(63) \qquad \overline{M_0P} = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0).$$

En portant (62) et (63) dans (61), on a le carré de la distance cherchée.

Si l'on veut les coordonnées du point P, il suffit d'appliquer les équations (56) en prenant pour $\rho$ la valeur (63).

Si l'on veut la perpendiculaire $M_1P$, on peut remarquer que l'on en connaît deux points : $M_1$ et P. On peut aussi la déterminer par le plan perpendiculaire à D mené par $M_1$ (n° 88) :

$$(64) \qquad a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

et par le plan $M_1M_0D$, dont l'équation peut s'écrire, par exemple, en s'appuyant sur l'équation (36),

$$(65) \qquad |x - x_0, \quad x_1 - x_0, \quad a| = 0.$$

Nous laissons au lecteur le soin de découvrir les légères modifications qu'il convient d'apporter aux résultats précédents quand $a$, $b$, $c$ sont seulement proportionnels aux cosinus directeurs.

*Deuxième cas : La droite est définie par deux plans.* — Soient les plans

$$(66) \quad P \equiv Ax + By + Cz + D = 0, \qquad Q \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Cherchons le plan (Π) mené par D perpendiculairement au plan (D, $M_1$). Il nous suffira de prendre ensuite la distance de $M_1$ à ce plan.

Les plans (Π) et (D, $M_1$) ont des équations de la forme (n° 90)

$$(67) \qquad P + \lambda Q = 0.$$

Pour (D, $M_1$), on a $P_1 + \lambda Q_1 = 0$; d'où l'équation

$$(68) \qquad PQ_1 - QP_1 = 0.$$

Le λ du plan (Π) sera obtenu en écrivant l'orthogonalité des plans (67) et (68). Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter les calculs, qui offrent peu d'intérêt avec des coefficients tous littéraux et quelconques. La méthode seule importe.

*Remarque.* — Dans le cas particulier où *les plans* (P) *et* (Q) *sont rectangulaires*, il est aisé de voir que le carré de la distance cherchée égale la somme des carrés des distances de $M_1$ à (P) et à (Q). On se ramène donc immédiatement à un problème connu (n° 84).

En particulier, si la droite est parallèle à un plan de coordonnées, par exemple, s'il s'agit de la droite (55) parallèle au plan $xOy$, on aura

$$(69) \qquad d^2 = (z - h)^2 + \frac{(Ax + By + C)^2}{A^2 + B^2},$$

car les équations (55) représentent deux plans perpendiculaires.

97. Plus courte distance de deux droites. — Ici encore, il y aurait lieu de distinguer plusieurs cas. Vu la complication du problème, nous nous bornerons à considérer celui où *les deux droites sont données par un point et leurs cosinus directeurs*.

Soient D déterminée par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et les cosinus $(a, b, c)$ et D' déterminée par $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et les cosinus $(a', b', c')$. Soit, d'autre part, PP' la perpendiculaire commune aux deux droites. Nous allons chercher les quantités $\overline{M_0P} = \rho$ et $\overline{M_1P'} = \rho'$. Pour cela, écrivons que PP' est perpendiculaire à D et à D'.

Les paramètres directeurs de PP' sont, si l'on veut, les projections de $\overrightarrow{PP'}$ sur les axes, c'est-à-dire

$$x_1 + \rho' a' - (x_0 + \rho a), \quad y_1 + \rho' b' - (y_0 + \rho b), \quad z_1 + \rho' c' - (z_0 + \rho c).$$

Les conditions de perpendicularité à D et D′ sont (n° 31)

$$S\,a(x_1 - x_0 + \rho' a' - \rho a) = 0, \qquad S\,a'(x_1 - x_0 + \rho' a' - \rho a) = 0$$

ou

$$(70)\quad \begin{cases} \rho'(aa' + bb' + cc') - \rho = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1), \\ \rho' - \rho(aa' + bb' + cc') = a'(x_0 - x_1) + b'(y_0 - y_1) + c'(z_0 - z_1). \end{cases}$$

En résolvant ce système par rapport à $\rho$, $\rho'$ et portant dans les équations paramétriques de D et D′, on aura les coordonnées des points P et P′, d'où la droite PP′ et la distance PP′. Nous laissons encore au lecteur le soin de développer les calculs. Il aura avantage à introduire l'angle V des deux droites, dont le cosinus figure dans (70) comme coefficient de $\rho'$ et de $\rho$. Le cas particulier où $V = \frac{\pi}{2}$ donne lieu à des simplifications manifestes.

98. Droites imaginaires. — On appelle *droite imaginaire* l'intersection de deux plans imaginaires. Une telle droite D est donc représentable par deux équations de la forme

$$(71)\qquad P + iQ = 0, \qquad P' + iQ' = 0,$$

P, Q, P′, Q′ désignant quatre fonctions linéaires à coefficients réels ([1]).

*Une droite imaginaire n'a en général aucun point réel et ne se trouve dans aucun plan réel.* En effet, si un point réel vérifiait les équations (71), il vérifierait les suivantes :

$$(72)\qquad P = 0, \qquad Q = 0, \qquad P' = 0, \qquad Q' = 0,$$

qui sont généralement incompatibles ([2]).

De même, si un plan réel passait par D, il aurait une équation de la forme (n° 90)

$$(73)\qquad (\lambda + i\mu)(P + iQ) + (\lambda' + i\mu')(P' + iQ') = 0,$$

$\lambda$, $\mu$, $\lambda'$, $\mu'$ étant quatre constantes réelles telles que le coefficient de $i$ dans (73) soit nul, c'est-à-dire telles que l'on ait

$$(74)\qquad \mu P + \lambda Q + \mu' P' + \lambda' Q' \equiv 0,$$

---

([1]) Si P′ et Q′ sont des combinaisons linéaires de P, Q, la droite est réelle; nous supposons qu'il n'en est pas ainsi.

([2]) Il revient au même de dire que les droites réelles $\Delta$ et $\Delta'$ des plans $(P + iQ)$ et $(P' + iQ')$ (n° 87) ne se rencontrent pas.

identité généralement impossible pour des valeurs non toutes nulles de $\lambda$, $\mu$, $\lambda'$, $\mu'$.

On sait d'ailleurs que la condition d'existence d'une telle identité et la condition de compatibilité des équations (72) sont des conditions équivalentes. Donc, *si une droite imaginaire a un point réel, elle est dans un plan réel et réciproquement*.

Deux droites sont *imaginaires conjuguées* lorsque l'une d'elles est l'intersection des plans imaginaires conjugués des plans qui définissent l'autre. La droite conjuguée de (71) est donc

$$P - iQ = 0, \qquad P' - iQ' = 0. \tag{73}$$

Théorème. — *Si deux droites imaginaires conjuguées sont dans un même plan* (Π), *ce plan est réel, ainsi que le point de rencontre des deux droites.*

En effet, tout plan réel coupe les deux droites suivant deux points conjugués. La droite qui joint ces deux points est réelle (n° 74). Donc, le plan (Π) est coupé suivant une droite réelle par tout plan réel. Il est, par suite, nécessairement lui-même réel. On sait maintenant que deux droites conjuguées tracées dans un plan réel se coupent en un point réel (n° 74)

# CHAPITRE VIII.

## THÉORIE DES VECTEURS.

### I. — VECTEURS LIBRES.

**99. Généralités.** — Nous avons défini d'une façon précise, au n° 8, le sens qu'il faut attribuer au mot *vecteur*.

On peut imaginer des vecteurs distribués d'une manière quelconque dans l'espace.

Deux vecteurs sont dits *équipollents* lorsqu'ils ont même longueur, même direction et même sens, ce qui équivaut à dire qu'on peut passer de l'un à l'autre par une translation. Ils sont dits *opposés*, lorsqu'ils ont même longueur et même direction, mais des sens opposés.

Dans ce paragraphe, nous ne distinguerons pas deux vecteurs équipollents. L'origine de chaque vecteur sera laissée entièrement libre. D'où le nom de *vecteurs libres* que nous donnerons aux vecteurs envisagés de ce point de vue.

Nous conviendrons d'exprimer que deux vecteurs sont équipollents par le symbole

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V'}, \tag{1}$$

que nous appellerons une *égalité géométrique*.

**100.** Nous avons défini, au n° 16, la *projection d'un vecteur sur un axe*, parallèlement à un plan donné. Nous avons vu que deux vecteurs équipollents avaient même projection.

*On peut déterminer un vecteur libre par ses projections sur trois axes non parallèles à un même plan.*

Soient, en effet, les trois axes $Ox$, $Oy$, $Oz$, qu'on peut toujours supposer issus du même point et qui forment alors un trièdre de coordonnées. Étant donné un vecteur $\overrightarrow{V}$, projetons-le sur $Ox$ paral-

lèlement à $yOz$, sur $Oy$ parallèlement à $zOx$ et sur $Oz$ parallèlement à $xOy$. Les projections obtenues X, Y, Z peuvent être considérées comme les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{V}$ et que nous appellerons *point représentatif du vecteur*. Il en résulte que le vecteur $\overrightarrow{V}$ est entièrement déterminé, en tant que vecteur libre, par les trois nombres X, Y, Z, qui seront appelés, pour cette raison, *ses coordonnées*.

Au lieu de projeter $\overrightarrow{V}$ sur chaque axe parallèlement au plan de coordonnées opposé, on pourrait, moyennant certaines restrictions, le projeter parallèlement à un plan quelconque attaché à cet axe. Contentons-nous d'examiner le cas des *projections orthogonales*. Si $\xi$, $\eta$, $\zeta$ désignent ces projections, elles déterminent, elles aussi, le vecteur $\overrightarrow{V}$. Car, les connaissant, nous portons $\overline{OA} = \xi$ sur $Ox$, $\overline{OB} = \eta$ sur $Oy$, $\overline{OC} = \zeta$ sur $Oz$; puis, nous menons par A un plan perpendiculaire à $Ox$, par B un plan perpendiculaire à $Oy$, par C un plan perpendiculaire à $Oz$. Ces trois plans se coupent en un seul point M, qui est le point représentatif de $\overrightarrow{V}$.

Une conséquence évidente de ces propriétés est que *toute égalité géométrique équivaut à trois égalités algébriques distinctes, obtenues par projection sur trois axes quelconques non parallèles à un même plan*, les projections pouvant être obliques ou orthogonales, comme il vient d'être expliqué.

*Le produit d'un vecteur* $\overrightarrow{V}$ *par un nombre* $m$ est un vecteur $\overrightarrow{V'}$ parallèle à $\overrightarrow{V}$, de longueur égale à celle de V multipliée par $|m|$ et de même sens ou de sens contraire, suivant que $m$ est positif ou négatif. Nous écrirons l'égalité géométrique

$$\overrightarrow{V'} = m\overrightarrow{V}, \tag{2}$$

qui équivaut aux trois égalités algébriques (n° 16)

$$X' = mX, \qquad Y' = mY, \qquad Z' = mZ. \tag{3}$$

Dans le cas particulier où $m = -1$, on retrouve les vecteurs opposés (n° 8) et l'on écrit

$$\overrightarrow{V'} = -\overrightarrow{V}. \tag{4}$$

101. Addition géométrique. — Soient plusieurs vecteurs $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, ..., $\overrightarrow{V_n}$.

Menons, par un point quelconque O, le vecteur $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{V_1}$. Puis, par $M_1$, menons $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{V_2}$; par $M_2$, $\overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{V_3}$; et ainsi de suite jusqu'à épuisement de tous les vecteurs donnés. Nous obtenons un point final $M_n$. Par définition, le vecteur $\overrightarrow{OM_n}$ (¹) ou tout vecteur équipollent $\overrightarrow{V}$ sont dits *la somme géométrique des vecteurs proposés*. Ce qu'on écrit

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \ldots + \overrightarrow{V_n}. \tag{5}$$

D'après le théorème des projections (nº 18), cette égalité géométrique équivaut aux trois égalités algébriques

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \qquad Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i, \tag{6}$$

où $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ désignent les projections du vecteur $\overrightarrow{V_i}$ et X, Y, Z celles du vecteur $\overrightarrow{V}$.

Les formules (6) nous prouvent que X, Y, Z sont indépendants de l'ordre dans lequel on a considéré les vecteurs. Autrement dit, on peut répéter la construction précédente en intervertissant cet ordre d'une manière quelconque; on obtient toujours le même point final $M_n$, la même somme géométrique $\overrightarrow{V}$. *L'addition géométrique est une opération commutative*, au même titre que l'addition algébrique.

On peut aussi, sans changer $\overrightarrow{V}$, remplacer plusieurs des vecteurs $\overrightarrow{V_i}$ par leur somme géométrique. Cela équivaut à remplacer, dans (6), plusieurs des $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ par leurs sommes effectuées. On sait que cela ne modifie pas X, Y, Z. *L'addition géométrique est une opération associative*, de même que l'addition algébrique.

Étant donné un vecteur $\overrightarrow{V}$, on peut le *décomposer suivant les axes* (ou trois droites non parallèles à un même plan). Si l'on représente, en effet, par $\overrightarrow{X}$ le vecteur parallèle à $Ox$, qui a pour mesure

(¹) Le vecteur $\overrightarrow{OM_n}$ est plus particulièrement appelé *la résultante du contour polygonal* $OM_1M_2 \ldots M_n$.

algébrique X sur cet axe, et par $\overrightarrow{Y}$, $\overrightarrow{Z}$ les vecteurs analogues, on a l'égalité géométrique $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}$, comme on le voit en projetant. Pour cette raison, X, Y, Z sont aussi appelés *les composantes de* $\overrightarrow{V}$ *suivant les axes.*

**102.** Soustraction. — *Retrancher un vecteur* $\overrightarrow{V'}$ *d'un vecteur* $\overrightarrow{V}$, c'est trouver un vecteur $\overrightarrow{V''}$ tel que l'on ait

$$(7) \qquad \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V'} + \overrightarrow{V''}.$$

En ajoutant aux deux membres le vecteur $-\overrightarrow{V'}$, on a

$$-\overrightarrow{V'} + \overrightarrow{V} = -\overrightarrow{V'} + \overrightarrow{V'} + \overrightarrow{V''} = \overrightarrow{-\overrightarrow{V'} + \overrightarrow{V'}} + \overrightarrow{V''} = \overrightarrow{V''},$$

car deux vecteurs opposés ont évidemment une somme nulle.

Retrancher un vecteur *équivaut donc à ajouter le vecteur opposé.* La soustraction n'est donc pas à distinguer de l'addition.

Signalons néanmoins l'égalité

$$(8) \qquad \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}.$$

déduite de $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'}$ et qui est une *extension de la formule de Chasles* [1], prise sous la forme (8) du n° 10.

**103.** On peut combiner l'addition géométrique avec la multiplication par un nombre et écrire des *égalités de la forme générale*

$$(9) \qquad \overrightarrow{V} = m_1\overrightarrow{V_1} + m_2\overrightarrow{V_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{V_n},$$

ce qui équivaut à

$$(10) \qquad X = \sum_{i=1}^{n} m_i X_i, \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} m_i Y_i, \qquad Z = \sum_{i=1}^{n} m_i Z_i.$$

**104.** Produit scalaire de deux vecteurs. — Soient les deux vec-

[1] Elle s'y ramène d'ailleurs immédiatement par projection sur les axes.

teurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$. Si V et V' désignent leurs longueurs respectives et $\theta$ leur angle, on appelle *produit scalaire de ces deux vecteurs* le nombre

$$(11) \qquad \overrightarrow{V}.\overrightarrow{V'} = VV'\cos\theta.$$

C'est donc *un nombre et non un vecteur*.

Si l'on écrit

$$(12) \qquad \overrightarrow{V}.\overrightarrow{V'} = V.V'\cos\theta = V'.V\cos\theta,$$

on voit, en vertu du théorème fondamental des projections (n° 19), que *le produit scalaire est aussi égal à la longueur d'un des vecteurs multipliée par la projection orthogonale de l'autre sur lui* (¹).

Il en résulte immédiatement (n° 18) que, si $\overrightarrow{V'}$ est la somme géométrique de plusieurs autres vecteurs $\overrightarrow{V'_1}$, $\overrightarrow{V'_2}$, ..., $\overrightarrow{V'_n}$, le produit scalaire de $\overrightarrow{V}$ par $\overrightarrow{V'}$ est la somme algébrique des produits scalaires de $\overrightarrow{V}$ par $\overrightarrow{V'_1}$, $\overrightarrow{V'_2}$, ..., $\overrightarrow{V'_n}$. Autrement dit, on a l'égalité

$$(13) \qquad \overrightarrow{V}.\left(\overrightarrow{\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}+\ldots+\overrightarrow{V_n}}\right) = \overrightarrow{V}.\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V}.\overrightarrow{V_2}+\ldots+\overrightarrow{V}.\overrightarrow{V_n},$$

ce qu'on exprime en disant que *la multiplication scalaire est une opération distributive*.

Plus généralement, on peut développer le produit de deux sommes géométriques comme celui de deux sommes algébriques.

On pourrait utiliser ceci pour calculer $\overrightarrow{V}.\overrightarrow{V'}$, connaissant les projections X, Y, Z et X', Y', Z' des deux vecteurs sur les axes, supposés rectangulaires. Il est aussi simple de procéder directement.

Les cosinus directeurs de nos deux vecteurs sont

$$\frac{X}{V},\quad \frac{Y}{V},\quad \frac{Z}{V} \quad \text{et} \quad \frac{X'}{V'},\quad \frac{Y'}{V'},\quad \frac{Z'}{V'}.$$

(¹) On prend évidemment comme sens de l'axe de projection le sens du vecteur sur lequel on projette. Plus généralement, on peut imaginer des axes quelconques A et A' parallèles respectivement à $\overrightarrow{V}$ et à $\overrightarrow{V'}$. Si $\theta'$ désigne leur angle, on a

$$\overrightarrow{V}.\overrightarrow{V'} = \overline{V}.\overline{V'}.\cos\theta' = \overline{V}.\text{proj}.\overrightarrow{V'_A} = \overline{V'}.\text{proj}.\overrightarrow{V_{A'}}.$$

On a donc (n° 31)

$$\cos\theta = \frac{XX' + YY' + ZZ'}{VV'},$$

d'où

(14) $$\overrightarrow{V}.\overrightarrow{V'} = VV'\cos\theta = XX' + YY' + ZZ'.$$

105. Dérivée géométrique d'un vecteur. — Imaginons un vecteur $\overrightarrow{V}$, qui dépend d'une certaine variable indépendante $t$. D'une façon précise, ses projections X, Y, Z sont des fonctions déterminées de $t$. Nous dirons aussi que *le vecteur est fonction de t.*

On peut étendre à un tel vecteur la notion de dérivée. Nous allons définir *la dérivée géométrique du vecteur* $\overrightarrow{V}$ en reprenant mot pour mot la définition de la dérivée d'une fonction (t. I, n° 60).

Donnons à $t$ un accroissement algébrique quelconque $\Delta t$. Il lui correspond un accroissement géométrique $\overrightarrow{\Delta V}$ pour le vecteur. Considérons le vecteur $\frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}$ (n° 100). Supposons qu'il tende vers une limite déterminée $\overrightarrow{V'}$ quand $\Delta t$ tend vers zéro. Nous dirons alors que $\overrightarrow{V'}$ est la dérivée géométrique de $\overrightarrow{V}$.

On ramène immédiatement cette notion à celle de dérivée algébrique, en observant que les projections de $\overrightarrow{\Delta V}$ sont $\Delta X$, $\Delta Y$, $\Delta Z$; celles de $\frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}$ sont ensuite $\frac{\Delta X}{\Delta t}$, $\frac{\Delta Y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta Z}{\Delta t}$. Leurs limites, quand $\Delta t$ tend vers zéro, sont les dérivées algébriques $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$, supposées existantes. Il s'ensuit que *la dérivée géométrique est un vecteur qui a pour projections les dérivées algébriques des projections du vecteur proposé.*

Nous emploierons, pour représenter la dérivée géométrique de $\overrightarrow{V}$, la notation $\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}$.

Il est manifeste que *la dérivée géométrique d'une somme géométrique est la somme géométrique des dérivées géométriques de chacun de ses termes.*

## II. — VECTEURS GLISSANTS.

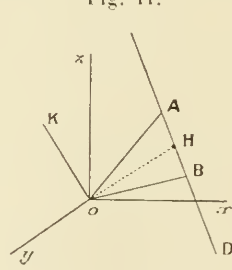
106. Moment d'un vecteur par rapport a un point. — Nous allons envisager maintenant un autre point de vue, dans lequel interviendront les origines des vecteurs ou, plus exactement, les droites qui les portent.

Deux vecteurs joueront le même rôle et ne devront pas être regardés comme distincts quand ils seront équipollents et portés par la même droite, qui sera appelée leur *directrice*. Autrement dit, on pourra, sans inconvénient, *faire glisser chaque vecteur le long de sa directrice*. D'où le nom de *vecteurs glissants*, donné aux vecteurs envisagés de ce point de vue.

On est conduit à cette notion de vecteurs glissants par la considération d'un élément fondamental, qui est le *moment d'un vecteur par rapport à un point*.

Soient un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et un point O (*fig.* 11). Nous appellerons

Fig. 11.




*moment* de $\overrightarrow{AB}$ par rapport à O et nous désignerons par la notation $\overrightarrow{AB, O}$ le vecteur $\overrightarrow{OK}$ défini par les conditions suivantes :

1° *Il est perpendiculaire au plan* OAB ;

2° *Sa longueur est mesurée par le même nombre que le double de la surface du triangle* OAB : $OK = AB \times OH$ [1] ;

[1] Cette condition détruit l'homogénéité, de sorte que le moment dépend du choix de l'unité de longueur. Toutes les fois qu'il sera question de moment, il sera donc implicitement supposé qu'on a choisi cette unité.

3° *Son sens doit être tel qu'il se trouve dans la région positive du plan* OAB, *supposé orienté de* OA *vers* OB ([1]) (n° 27).

Cette définition attire quelques remarques.

La première condition devient illusoire quand $\overrightarrow{AB}$ passe par O. Mais, cela n'a aucune importance; car, d'après 2°, le moment est alors nul. Ceci nous apprend en passant que *pour que la directrice d'un vecteur passe par un point donné, il faut et il suffit que le vecteur ait un moment nul par rapport à ce point.*

La troisième condition suppose l'existence d'un trièdre de coordonnées permettant de définir la région positive de tout plan orienté, comme il a été expliqué au n° 27. En France, on choisit habituellement des axes à gauche (n° 28) et l'on dit que *le sens de* $\overrightarrow{OK}$ *doit être tel qu'un observateur ayant les pieds en* O, *la tête en* K *et regardant* $\overrightarrow{AB}$ *voie le point* A *à gauche du point* B. Si l'on adopte cette convention, il est nécessaire, quand on fait la théorie analytique des moments, de toujours prendre des axes à gauche, de manière à avoir toujours les mêmes formules fondamentales. On évite au contraire toute difficulté et l'on concilie tous les procédés d'orientation en adoptant la convention de 3°, basée sur le choix d'un trièdre de coordonnées, qui reste à la disposition du lecteur.

*Si l'on fait glisser le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *sur la droite* D, *il est évident que le moment* $\overrightarrow{OK}$ *ne change pas.* De là l'origine des vecteurs glissants.

107. Projections du moment sur les axes. — Un problème fondamental est le suivant :

*Connaissant les coordonnées de l'origine d'un vecteur et ses projections sur les axes, calculer les projections de son moment par rapport à l'origine des coordonnées.*

Comme il s'agit de propriétés métriques, nous supposerons essentiellement les *axes rectangulaires.*

---

([1]) Il équivaut de dire que $\overrightarrow{AB}$ doit se trouver dans la région positive du plan KOA, orienté de OK vers OA ou de AO vers AK.

Cela posé, soient $x, y, z$ les coordonnées du point A et X, Y, Z les projections du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Soient, d'autre part, $\alpha, \beta, \gamma$ les cosinus directeurs de la demi-normale positive du plan OAB, orienté de OA vers OB. Le moment $\overrightarrow{OK}$ est dirigé suivant cette demi-normale, sur laquelle il a pour mesure algébrique 2S, en appelant S la surface absolue du triangle OAB, qui coïncide avec sa surface algébrique. Ses projections sur les axes sont

$$(15)\qquad L = 2S\alpha, \qquad M = 2S\beta, \qquad N = 2S\gamma.$$

Mais on a vu (n° 92) que $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$ sont les aires algébriques des projections du triangle OAB sur $yOz$, $zOx$, $xOy$ et l'on a, en observant que les coordonnées du point B sont $x+X$, $y+Y$, $z+Z$ (n° 82),

$$L = 2S\alpha = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ y & z & 1 \\ y+Y & z+Z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ y+Y & z+Z \end{vmatrix} = yZ - zY;$$

$$(16)\qquad L = yZ - zY, \qquad M = zX - xZ, \qquad N = xY - yX.$$

Ces formules très importantes seront appelées *formules fondamentales des moments*.

108. On peut en déduire immédiatement les projections du moment par rapport à un point quelconque O′ défini par ses coordonnées $x_0$, $y_0$, $z_0$. Si l'on transporte en effet les axes au point O′, les nouvelles coordonnées du point A sont $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ (n° 33); quant aux projections de $\overrightarrow{AB}$, elles n'ont pas changé. Dès lors, les projections de $\overrightarrow{AB, O'}$ sont

$$L' = (y - y_0)Z - (z - z_0)Y = yZ - zY - (y_0 Z - z_0 Y)$$

ou

$$(17)\quad L' = L - (y_0 Z - z_0 Y), \qquad M' = M - (z_0 X - x_0 Z), \qquad N' = N - (x_0 Y - y_0 X).$$

Ces formules peuvent s'interpréter géométriquement d'une manière élégante. Les quantités telles que $y_0 Z - z_0 Y$ sont, en vertu des formules (16), les projections du moment par rapport à O du vec-

teur $\overrightarrow{O'C} = \overrightarrow{AB}$. On a donc

$$\overrightarrow{AB, O'} = \overrightarrow{AB, O} - \overrightarrow{O'C, O}$$

ou

$$\overrightarrow{AB, O} = \overrightarrow{AB, O'} + \overrightarrow{O'C, O}. \tag{18}$$

**109.** Moment par rapport a un axe. — Prenons le point O′ n'importe où sur $Ox$; nous avons $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. La première formule (17) nous donne alors $L' = L$. Donc :

Théorème. — *Si l'on prend le moment d'un vecteur par rapport à un point variable sur une droite, la projection de ce moment sur cette droite est constante.*

Cette projection constante ou plutôt sa mesure algébrique sur la droite, supposée orientée, s'appelle le *moment de* $\overrightarrow{AB}$ *par rapport à la droite*. Ce moment est un nombre et non plus un vecteur.

Théorème. — *Pour qu'un vecteur soit dans un même plan avec une droite donnée, il faut et il suffit que son moment par rapport à la droite soit nul.*

Car, pour que $\overrightarrow{AB}$ et $Ox$ soient dans un même plan, il faut et il suffit que l'on ait $\frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$, c'est-à-dire $L = 0$.

**110.** Coordonnées d'un vecteur. — *A tout vecteur glissant correspondent six nombres* X, Y, Z, L, M, N, qui sont ses projections sur les axes et ses moments par rapport aux axes. Ces six nombres sont liés par une relation fort importante

$$LX + MY + NZ = 0, \tag{19}$$

que nous appellerons la *relation fondamentale*. On l'établit en remarquant, d'après les formules (16), que son premier membre est le développement d'un déterminant qui aurait deux lignes identiques à X, Y, Z.

*Réciproquement*, je dis qu'*à tout système de nombres vérifiant* (19) *correspond un vecteur glissant et un seul* admettant ces six nombres pour projections et moments.

En effet, les trois premiers nombres définissent le vecteur en tant que vecteur libre. Reste à trouver les coordonnées $x, y, z$ de son origine A. Elles doivent vérifier les équations (16). Mais ces trois équations, où $x, y, z$ seraient regardés comme des coordonnées courantes, représentent trois plans passant par une même droite D (n° 90), car en multipliant la première par X, la seconde par Y, la troisième par Z et ajoutant, on obtient une identité, grâce à l'hypothèse (19). Il y a donc une infinité de points A répondant à la question, à savoir les points de la droite D. Cette droite est d'ailleurs parallèle au vecteur. La droite parallèle menée par l'origine a, en effet, pour équations (n° 94)

$$yZ - zY = 0, \qquad zX - xZ = 0, \qquad xY - yX = 0$$

ou

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z},$$

ce qui représente bien une droite parallèle au vecteur (X, Y, Z).

Il suit de là que tous les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ cherchés ont pour directrice commune la droite D. Ils se déduisent de l'un d'eux par glissement et ne constituent qu'un seul vecteur glissant.

Les six nombres X, Y, Z, L, M, N, liés par (19), qui sont déterminés par $\overrightarrow{AB}$ et qui le déterminent, sont appelés *les six coordonnées du vecteur*. Ce sont des coordonnées surabondantes, en ce sens qu'elles ne sont pas indépendantes.

*Remarque.* — Les plans (16) auxquels il a été fait allusion tout à l'heure ne sont autres que les plans projetant D sur les plans de coordonnées.

111. Coordonnées pluckériennes d'une droite. — Ce sont les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ quelconque porté par la droite, soient $\alpha, \beta, \gamma, l, m, n$. Elles sont liées par la relation

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0. \tag{20}$$

De plus, elles ne sont définies qu'à un facteur près. On peut toujours, en effet, multiplier $\overrightarrow{V}$ par un facteur quelconque, ce qui a manifestement pour effet de multiplier les six coordonnées par ce facteur [1].

[1] Les projections le sont, d'après les équations (3). Les moments le sont ensuite, d'après les formules (16).

Pour cette raison, on dit que ce sont des *coordonnées homogènes* (*cf.* n° 39).

Les coordonnées $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont les paramètres directeurs de la droite (n° 25).

Quant aux coordonnées $l$, $m$, $n$, on peut les interpréter par les équations

$$(21) \qquad y\gamma - z\beta = l, \qquad z\alpha - x\gamma = m, \qquad x\beta - y\alpha = n,$$

qui représentent les plans projetant la droite sur $yOz$, $zOx$, $xOy$ (n° 51).

Si le vecteur $\overrightarrow{V}$ a pour longueur 1, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont les cosinus directeurs; nous dirons alors que les coordonnées sont *unitaires*.

112. Moment d'un vecteur par rapport a une droite donnée par ses coordonnées pluckériennes. — Supposons que celles-ci soient unitaires, la droite D étant par cela même orientée. Soit $M(x, y, z)$ un de ses points, satisfaisant par conséquent aux équations (21).

Nous devons projeter le vecteur $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AB.\,M}$ sur D (n° 109). Or, les composantes de ce vecteur sont données par (17). Le moment cherché est donc

$$\overline{AB, D} = \alpha L' + \beta M' + \gamma N' = S\alpha(L - yZ + zY).$$

Ordonnons cette expression par rapport à X, Y, Z, L, M, N. Le coefficient de X est $y\gamma - \beta z = l$, d'après (21). On a donc

$$(22) \qquad \overline{AB, D} = lX + mY + nZ + \alpha L + \beta M + \gamma N.$$

Si les coordonnées de D ne sont pas unitaires, il suffit de diviser le second membre de (22) par $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$.

113. Moment relatif de deux vecteurs. — Soient les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ de coordonnées X, Y, Z, L, M, N et X', Y', Z', L', M', N'. On appelle *moment relatif de ces deux vecteurs* le produit scalaire (n° 104) de l'un d'eux par le moment de l'autre par rapport à un point quelconque de la directrice du premier.

Prenons, par exemple, le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par le moment de $\overrightarrow{A'B'}$ par rapport à un point quelconque de la directrice D de $\overrightarrow{AB}$. En vertu des n°s 104 et 109, ce produit scalaire est *égal à la mesure algébrique de* $\overrightarrow{AB}$ *sur la*

*droite* D, *orientée d'une manière quelconque, multipliée par le moment de* $\overrightarrow{A'B'}$ *par rapport à* D. Si l'on appelle $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $l$, $m$, $n$ les coordonnées plückériennes unitaires de D et $\rho$ la mesure algébrique $\overline{AB}$, on a

$$(23) \qquad X = \rho\alpha, \qquad Y = \rho\beta, \qquad Z = \rho\gamma, \qquad L = \rho l, \qquad M = \rho m, \qquad N = \rho n,$$

et (n° 112)

$$\overline{A'B', D} = lX' + mY' + nZ' + \alpha L' + \beta M' + \gamma N'.$$

En multipliant cette dernière expression par $\rho$ et tenant compte de (23), *on a le moment relatif cherché*

$$(24) \qquad \mathfrak{M} = LX' + MY' + NZ' + L'X + M'Y + N'Z.$$

Cette expression ne change pas quand on échange les deux vecteurs; donc, on obtiendrait le même résultat en calculant le produit scalaire de $\overrightarrow{A'B'}$ par le moment de $\overrightarrow{AB}$ par rapport à un point de D'. Autrement dit, *les deux vecteurs jouent des rôles symétriques dans la définition de leur moment relatif.* C'est ce que met du reste très bien en évidence le théorème suivant :

Théorème. — *Le moment relatif des deux vecteurs* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ *est égal à six fois le volume algébrique du tétraèdre* AB B'A' *ou* A'B'BA.

En effet, nous avons (n° 93)

$$6V = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x+X & y+Y & z+Z & 1 \\ x'+X' & y'+Y' & z'+Z' & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ X & Y & Z & 0 \\ X' & Y' & Z' & 0 \\ x' & y' & z' & 1 \end{vmatrix},$$

en retranchant la première ligne de la seconde et la quatrième de la troisième. En développant ensuite suivant la règle de Laplace (t. I, n° 286), on retombe sur le second membre de (24). On peut aussi retrancher la première ligne de la quatrième et développer ensuite suivant la dernière colonne :

$$6V = -\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ x'-x & y'-y & z'-z \end{vmatrix} = -\mathrm{S}\, X[Y'(z'-z) - Z'(y'-y)]$$
$$= \mathrm{S}\, X(L' - yZ' + zY') = XL' + YM' + ZN' + X'L + Y'M + Z'N.$$

## III. — SYSTÈMES DE VECTEURS.

**114.** Somme géométrique et moment résultant. — Soient plusieurs vecteurs glissants $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, ..., $\overrightarrow{A_nB_n}$. On dit qu'ils forment un *système de vecteurs*, que nous représenterons par la lettre S.

On appelle *somme géométrique du système* le vecteur

$$(25)\qquad \overrightarrow{R} = \overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{A_2 B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_n B_n}.$$

On appelle *moment résultant du système par rapport à un point* O le vecteur

$$(26)\qquad \overrightarrow{S, O} = \overrightarrow{A_1 B_1, O} + \overrightarrow{A_2 B_2, O} + \ldots + \overrightarrow{A_n B_n, O}.$$

Si $X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i$ désignent les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A_i B_i}$, les projections de $\overrightarrow{R}$ sont

$$(27)\qquad X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i;$$

celles de $\overrightarrow{S, O}$ sont

$$(28)\qquad L = \sum_{i=1}^{n} L_i, \qquad M = \sum_{i=1}^{n} M_i, \qquad N = \sum_{i=1}^{n} N_i.$$

Le moment résultant par rapport à un point quelconque $O'(x, y, z)$ a pour projection sur $Ox$

$$L' = \sum_{i=1}^{n} L'_i = \sum_{i=1}^{n} (L_i - yZ_i + zY_i) = \sum_{i=1}^{n} L_i - y\sum_{i=1}^{n} Z_i + z\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

ou, d'après (27) et (28),

$$L' = L - yZ + zY.$$

Par permutations circulaires, on a les autres projections :

$$(29)\quad L' = L - yZ + zY, \qquad M' = M - zX + xZ, \qquad N' = N - xY + yX.$$

De même que les formules (17), les formules (29) s'interprètent par une égalité géométrique

$$(30)\qquad \overrightarrow{S, O} = \overrightarrow{S, O'} + \overrightarrow{O'R, O},$$

où $\overrightarrow{O'R}$ désigne la somme géométrique du système menée par le point O'. Pour le voir, il suffit de projeter (30) sur les axes, en s'appuyant sur (16); on retrouve les formules (29) résolues par rapport à L, M, N.

115. *Le moment résultant par rapport à un axe* D est la somme algébrique des moments $\overline{A_i B_i, D}$. En vertu de la définition de ces derniers (n° 109), de la définition du moment résultant par rapport à un point et du théorème des projections, on peut dire aussi que $\overline{S, D}$ est la projection sur D du moment résultant de S par rapport à un point quelconque de D.

Les moments résultants de S par rapport aux axes sont les quantités L, M, N définies par les formules (28).

Le moment résultant par rapport à la droite D de coordonnées plückériennes unitaires $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $l$, $m$, $n$ est donné par l'application des formules (22), (27) et (28) :

$$(31) \qquad \overline{S, D} = lX + mY + nZ + \alpha L + \beta M + \gamma N.$$

116. Systèmes équivalents. — Deux systèmes S et S′ sont dits *équivalents* quand ils ont *même somme géométrique et même moment résultant par rapport à tout point de l'espace.*

D'après les formules (29), il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que les six quantités X, Y, Z, L, M, N aient les mêmes valeurs pour les deux systèmes. Autrement dit, ces six quantités déterminent un système, à ses équivalents près. Pour cette raison, on les appelle les *six coordonnées du système*. On peut alors dire que *pour que deux systèmes soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient mêmes coordonnées.*

On peut dire aussi que si les deux systèmes ont même somme géométrique, il suffit que leur moment résultant soit le même par rapport à un point particulier de l'espace (ici l'origine) pour qu'il soit aussi le même par rapport à tout point de l'espace.

Théorème de Varignon. — *Si plusieurs vecteurs sont concourants, ils forment un système équivalent à leur somme géométrique menée par leur point de concours.*

En effet, le système S proposé et le système S′ formé par la somme géométrique $\overrightarrow{OR}$ appliquée au point de concours O ont même somme géométrique et même moment résultant par rapport à O (ce moment est nul). Cela suffit, on vient de le voir, pour qu'ils soient équivalents.

Le vecteur $\overrightarrow{OR}$ mené par O s'appelle *la résultante des vecteurs proposés*. Remplacer plusieurs vecteurs concourants par leur résultante s'appelle *composer ces vecteurs*. On peut inversement *décomposer un vecteur* suivant plusieurs autres ayant la même origine que lui.

117. Opérations élémentaires. — Ce sont les suivantes :

1° *Glissement d'un vecteur sur sa directrice.*

2° *Introduction ou suppression de deux vecteurs opposés de même origine.*

3° *Composition de plusieurs vecteurs concourants ou décomposition d'un vecteur en vecteurs concourants.*

*Toute opération élémentaire effectuée sur un système le transforme en un système équivalent.* C'est évident pour la première. La seconde introduit ou supprime un vecteur nul dans la somme géométrique et aussi dans le moment résultant par rapport à un point quelconque, car il résulte immédiatement de la définition du n° 106 que deux vecteurs opposés et de même origine ont des moments opposés par rapport à tout point de l'espace. Quant à la troisième opération, elle est sans influence, en vertu de l'associativité de l'addition géométrique (n° 101) et du théorème de Varignon (n° 116).

Réciproquement, on démontre [1] que, *étant donnés deux systèmes*

---

[1] On peut donner, par exemple, la démonstration suivante :

Prouvons d'abord que *tout système Σ équivalent à zéro peut être effectivement réduit à zéro par des opérations élémentaires.* A cet effet, prenons trois points O, O′, O″ formant un triangle. (Le lecteur est prié de faire la figure.) Chaque vecteur $\overrightarrow{A_iB_i}$ de Σ peut être décomposé suivant $A_iO$, $A_iO'$, $A_iO''$. On obtient, de la sorte, des vecteurs concourants en O, O′, O″. En les composant, il reste les trois vecteurs $\overrightarrow{OV}$, $\overrightarrow{O'V'}$, $\overrightarrow{O''V''}$. Je dis que ces vecteurs sont dans le plan OO′O″. En effet, la droite O′O″ a un moment nul par rapport à $\overrightarrow{V'}$ et $\overrightarrow{V''}$. Mais, d'après l'hypothèse, elle a aussi un moment nul par rapport à Σ et, par suite, par rapport à $\overrightarrow{V}+\overrightarrow{V'}+\overrightarrow{V''}$. Donc, $\overrightarrow{V}$ a un moment nul par rapport à O′O″ et se trouve, en conséquence, dans le plan OO′O″. De même pour $\overrightarrow{V'}$ et $\overrightarrow{V''}$. Je dis maintenant que ces trois vecteurs concourent. En effet, $\overrightarrow{V}$ doit avoir un moment nul par rapport au point de rencontre M

*équivalents, on peut passer de l'un à l'autre par un nombre limité d'opérations élémentaires.* Il existe même une manière de présenter la théorie des vecteurs dans laquelle on donne cette condition comme définition de l'équivalence. Ce point de vue tire son origine d'une méthode d'exposition de la Statique élémentaire du corps solide, reposant sur un certain nombre d'axiomes, qui conduisent précisément aux opérations élémentaires. Nous envisagerons au contraire la Statique (t. III) sous un jour entièrement différent, en nous appuyant sur la théorie des vecteurs telle qu'elle est exposée dans ce Chapitre.

La proposition énoncée ci-dessus concilie les deux points de vue.

118. Couples. — *On appelle* couple *tout système de deux vecteurs opposés n'ayant pas même directrice.*

Un couple a évidemment une somme géométrique nulle.

Théorème. — *Un couple a même moment résultant par rapport à tous les points de l'espace.*

Cela résulte de l'égalité géométrique (30), puisque $\overrightarrow{O'R}$ est nul.

Ce moment résultant constant, considéré comme vecteur libre (n° 99), s'appelle *l'axe du couple.*

*Pour en obtenir une construction simple*, prenons le moment résultant par rapport à $A_1$. Il se réduit au moment de $\overrightarrow{A_2B_2}$. C'est donc un vecteur $\overrightarrow{A_1K}$ perpendiculaire au plan du couple, de longueur égale à la longueur commune des deux vecteurs multipliée par leur plus courte distance $d$ (appelée *bras de levier*) et dirigé vers la région positive du plan du couple, supposé orienté par le sens de parcours $A_1B_1A_2B_2$ sur le parallélogramme $A_1B_1A_2B_2$, ou bien de $A_1B_1$ vers $A_1A_2$, par exemple.

---

de $\overrightarrow{V'}$ et $\overrightarrow{V''}$. En transportant les trois vecteurs au point M et les composant, on obtient zéro, puisque la somme géométrique de $\Sigma$ doit être nulle.

Cela posé, soient deux systèmes équivalents S et S'. Je veux passer de S à S'. Appelons $\Sigma$ le système formé par S' et les vecteurs opposés à ceux de S. Ce système est équivalent à zéro et peut être réduit effectivement à zéro par des opérations élémentaires. Par les opérations inverses, nous pouvons, en partant de zéro, constituer $\Sigma$ ou, en partant de S, constituer $S + \Sigma$. Mais nous pouvons à présent supprimer S et les vecteurs opposés de $\Sigma$. Il nous reste finalement S'.

*Il existe une infinité de couples admettant un axe donné* $\overrightarrow{K}$. On obtient le plus général d'entre eux en choisissant arbitrairement le vecteur $\overrightarrow{A_1 B_1}$, sous la seule condition qu'il soit perpendiculaire à $\overrightarrow{K}$.

Le plan $\Pi$ mené par $\overrightarrow{A_1 B_1}$ perpendiculairement à $\overrightarrow{K}$ est le plan du couple. Le bras de levier $d$ est obtenu en divisant la longueur de $\overrightarrow{K}$ par celle de $\overrightarrow{A_1 B_1}$. En menant dans $\Pi$ les deux droites parallèles à $\overrightarrow{A_1 B_1}$ et à la distance $d$, on sait que l'une d'elles est la directrice de $\overrightarrow{A_2 B_2}$. C'est d'ailleurs celle qui se trouve dans la région positive du plan $K A_1 B_1$, orienté de $A_1 K$ vers $A_1 B_1$, puisque le trièdre $A_1 B_1 A_2 K$ doit être positif.

*Deux couples de même axe sont manifestement équivalents.*

119. Composition des couples. — Théorème. — *Tout système dont la somme géométrique est nulle équivaut à un couple.*

En effet, d'après (30), un tel système a même moment résultant par rapport à tous les points de l'espace. Il est donc équivalent à l'un quelconque des couples qui admettent ce moment pour axe.

Considérons, en particulier, un système constitué par plusieurs couples d'axes respectifs $\overrightarrow{K_1}, \overrightarrow{K_2}, \ldots, \overrightarrow{K_n}$. Il a une somme géométrique nulle et un moment résultant $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{K_1} + \overrightarrow{K_2} + \ldots + \overrightarrow{K_n}$ par rapport à tout point de l'espace. D'après le théorème précédent, il est donc équivalent à un couple unique d'axe $\overrightarrow{K}$. Donc :

Théorème. — *Tout système de couples équivaut à un couple unique ayant pour axe la somme géométrique des axes des couples proposés.*

Cet énoncé s'appelle la *règle de composition des couples.*

120. Réduction à un vecteur et à un couple. — Théorème. — *Tout système peut être réduit à un vecteur appliqué en un point arbitrairement choisi et à un couple.*

Nous entendons par là que le vecteur et le couple doivent former un système S' équivalent au système proposé S.

Choisissons donc un point quelconque M de l'espace. Le vecteur du système S' en constitue, à lui seul, la somme géométrique; c'est donc *le vecteur* $\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ *équipollent à la somme géométrique de* S. *L'axe* $\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ *du couple* de S' constitue, à lui seul, le moment résultant $\overrightarrow{\mathrm{S}', \mathrm{M}}$. Il *coïncide donc avec* $\overrightarrow{\mathrm{S}, \mathrm{M}}$.

Le système S' ainsi constitué est d'ailleurs bien équivalent à S, comme ayant même somme géométrique et même moment résultant par rapport à M (n° 116).

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ et le couple $\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ ([1]) constituent *les éléments de réduction relatifs au point* M.

**121.** Comme cas particuliers, il peut arriver que $\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ soit nul (on retombe alors sur le premier théorème du n° 119), ou bien que $\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ soit nul, pour une certaine position du point M. Dans cette dernière circonstance, *le système se réduit à un vecteur unique* $\overrightarrow{\mathrm{MR}}$. Ceci ne peut d'ailleurs arriver qu'avec des systèmes particuliers. Il faut, en effet, et il suffit que leurs coordonnées satisfassent à la relation fondamentale (19) (n° 110). Cette condition s'interprète géométriquement de la manière suivante :

Théorème. — *Pour qu'un système soit réductible à un vecteur unique, il faut et il suffit que ses éléments de réduction relatifs à un point quelconque de l'espace soient rectangulaires.*

En effet, on peut toujours supposer que la réduction est faite à l'origine des coordonnées. Dès lors, les paramètres directeurs de $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ sont X, Y, Z; ceux de $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ sont L, M, N; la condition (19) apparaît alors comme la condition d'orthogonalité de $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ et de $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$.

**122.** Variation des éléments de réduction avec le point M. — Quand le point M se déplace dans l'espace, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ demeure

---

([1]) Bien entendu, ce couple est seulement déterminé par son axe et peut être construit comme il a été expliqué au n° 118.

équipollent à lui-même. Mais le couple $\overrightarrow{MK}$ varie. Il obéit néanmoins au théorème suivant :

Théorème. — *La projection de l'axe du couple de réduction sur le vecteur de réduction est constante.*

Il revient au même de dire que *le produit scalaire* (n° 104) *des éléments de réduction est constant*, puisque $\overrightarrow{MR}$ reste équipollent à lui-même. Or, si $x$, $y$, $z$ sont les coordonnées de M, ce produit scalaire s'écrit, en utilisant les formules (14) et (29),

$$X(L-yZ+zY)+Y(M-zX+xZ)+Z(N-xY+yX)=LX+MY+NZ.$$

Il est bien indépendant de la position du point M.

On s'explique maintenant pourquoi les éléments de réduction doivent être rectangulaires quand le système équivaut à un vecteur unique ; car, en faisant la réduction en un point de ce vecteur, on obtient un couple nul, donc de projection nulle sur le vecteur. En réduisant ensuite en un point quelconque, la projection du couple doit demeurer nulle.

**123.** Axe central. — Cherchons où il faut faire la réduction pour avoir un *couple d'axe minimum*. D'après le théorème précédent, ceci arrivera *si l'axe du couple est dirigé suivant le vecteur*.

Écrivons, à cet effet, que les composantes L', M', N' du premier sont proportionnelles aux composantes X, Y, Z du second. Nous avons, en utilisant les formules (29),

$$(34) \qquad \frac{L-yZ+zY}{X}=\frac{M-zX+xZ}{Y}=\frac{N-xY+yX}{Z}.$$

Ces deux équations sont du premier degré en $x, y, z$ et représentent donc une droite $\Delta$, sur laquelle doit se trouver le point M.

Multipliant haut et bas le premier rapport par X, le second par Y, le troisième par Z et ajoutant terme à terme, nous obtenons un rapport égal :

$$(35) \qquad h=\frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

La droite $\Delta$ vérifie donc aussi les équations suivantes :

$$L-yZ+zY=hX, \qquad M-zX+xZ=hY, \qquad N-xY+yX=hZ.$$

ou

(36) $yZ - zY = L - hX, \quad zX - xZ = M - hY, \quad xY - yX = N - hZ.$

Ses coordonnées plückériennes sont, par suite (n° 111),

(37) $X, Y, Z, \quad L - hX, \quad M - hY, \quad N - hZ.$

En particulier, X, Y, Z sont ses paramètres directeurs; elle est donc parallèle à la somme géométrique du système ([1]).

En définitive, *le lieu des points pour lesquels les éléments de réduction ont même direction est une droite parallèle à la somme géométrique du système*. Cette droite s'appelle l'*axe central* du système. Ses équations sont (34) ou (36) (projections sur les plans de coordonnées).

Si l'on fait la réduction en un point M de l'axe central, on obtient le vecteur $\overrightarrow{MR}$ et le couple d'axe $\overrightarrow{MK}$, dirigés tous deux suivant $\Delta$. Un vecteur et un couple semblablement disposés constituent ce qu'on appelle un *torseur*. Le rapport $\frac{\overline{MK}}{\overline{MR}}$ s'appelle le *pas du torseur*. Ici, il est égal à la valeur commune des rapports (34), qui représentent les rapports des projections de $\overrightarrow{MK}$ et de $\overrightarrow{MR}$ sur les axes. Nous avons donc

(38) $$\frac{\overline{MK}}{\overline{MR}} = h.$$

Ce rapport est constant, ce qui résultait d'ailleurs aussi du théorème du n° 122. On l'appelle le *pas du système*. Il est donné, en fonction des coordonnées du système, par la formule (35).

Quand on déplace M sur $\Delta$, $\overrightarrow{MR}$ ne fait que glisser suivant cette droite; donc aussi $\overrightarrow{MK}$, d'après (38). Le torseur de réduction subit simplement une translation suivant $\Delta$. On peut donc considérer comme *identiques les réductions aux différents points de l'axe central*.

*Dans le cas particulier où le pas est nul*, la réduction en un

---

([1]) On peut aussi le voir en supprimant les seconds membres de (36), de manière à obtenir la parallèle à $\Delta$ menée par l'origine.

point de l'axe central donne un couple nul, d'après (38), donc un *vecteur unique*. On retrouve la condition (19).

124. Réduction a deux vecteurs. — Théorème. — *Tout système peut être réduit à deux vecteurs, dont l'un est porté par une droite arbitrairement choisie.*

Autrement dit, étant donnée une droite quelconque D, on peut trouver un vecteur $\overrightarrow{V_1}$ sur D et un vecteur $\overrightarrow{V_2}$ quelque part dans l'espace tels que le système $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ soit équivalent au système S.

Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $l$, $m$, $n$ les coordonnées plückériennes unitaires de la droite D, par cela même orientée (n° 111). Soit $\rho$ la mesure algébrique de $\overrightarrow{V_1}$ sur D. Les coordonnées de ce vecteur sont

$$(39)\qquad \rho\alpha,\quad \rho\beta,\quad \rho\gamma,\quad \rho l,\quad \rho m,\quad \rho n.$$

Celles de $\overrightarrow{V_2}$ sont, par suite,

$$(40)\quad X-\rho\alpha,\quad Y-\rho\beta,\quad Z-\rho\gamma,\quad L-\rho l,\quad M-\rho m,\quad N-\rho n,$$

car, en les ajoutant à celles de $\overrightarrow{V_1}$, on doit obtenir celles de S. Mais, pour que les expressions (40) puissent servir de coordonnées à un vecteur, il faut et il suffit qu'elles satisfassent à la relation fondamentale (19), qui devient ici

$$(41)\quad (X-\rho\alpha)(L-\rho l)+(Y-\rho\beta)(M-\rho m)+(Z-\rho\gamma)(N-\rho n)=0.$$

Dans cette équation, $\rho$ est la seule inconnue. Ordonnons donc par rapport à $\rho$. Le coefficient de $\rho^2$ est $l\alpha+m\beta+n\gamma=0$, d'après (20). Il reste l'équation du premier degré

$$(42)\qquad \rho(lX+mY+nZ+\alpha L+\beta M+\gamma N)=LX+MY+NZ.$$

Nous voyons que, sous la condition qu'on n'ait pas

$$(43)\qquad lX+mY+nZ+L\alpha+M\beta+N\gamma=0,$$

le problème posé est possible et admet une solution unique. Il ne l'est pas si la droite D vérifie l'équation (43) [1]. Une telle droite est

[1] Sauf, cependant, si le second membre de (42) est nul, auquel cas il est indéterminé. Mais cette circonstance offre peu d'intérêt, car le système est alors réductible à un vecteur unique, dont la décomposition est évidente.

appelée *droite exceptionnelle* ou encore *droite de moment nul*, car, d'après la formule (31), le moment résultant de S par rapport à D est alors nul.

125. Complexe linéaire. — Les droites dont les coordonnées plückériennes vérifient une même relation linéaire et homogène constituent ce qu'on appelle un *complexe linéaire* (*cf.* n° 394). Comme on peut toujours regarder les coefficients de cette relation, supposée écrite dans l'ordre (43), comme les coordonnées d'un certain système de vecteurs, on voit que *tout complexe linéaire est constitué par l'ensemble des droites exceptionnelles d'un système de vecteurs.*

Cette interprétation permet d'établir aisément les principales propriétés de ces complexes.

*Plan polaire.* — Les droites du complexe qui passent par un point donné M sont toutes perpendiculaires au moment résultant $\overrightarrow{MK}$. Leur lieu est donc le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{MK}$ mené par M. On l'appelle le *plan polaire du point* M.

*Pôle.* — Soit à trouver les droites du complexe qui se trouvent dans un plan donné P. Prenons un point quelconque M de ce plan; son plan polaire coupe P suivant une droite D du complexe. En partant d'un autre point M', on trouverait de même une autre droite D' du complexe située dans P. Les droites D et D' se coupent en un certain point N. Le plan polaire de ce point contient D et D': il coïncide donc avec P. Par suite, les droites du plan P qui passent par N appartiennent toutes au complexe.

Supposons qu'il y en ait une autre, D'', ne passant pas par N. Je dis que toute droite D''' du plan appartient au complexe. En effet, D''' coupe D'' en un point Q, dont le plan polaire contient D'' et QN (d'après ce qui précède) et, par suite, se confond avec P; D''', se trouvant dans ce plan polaire, appartient bien au complexe.

En définitive, ou bien les droites du complexe situées dans le plan P passent par un point fixe N, qui admet P pour plan polaire et en est appelé *le pôle;* ou bien toutes les droites du plan P font partie du complexe.

Cette dernière circonstance correspond d'ailleurs à un cas tout à fait particulier. Si l'on fait la réduction du système S en un point M quelconque de P, on obtient un couple d'axe $\overrightarrow{MK}$ perpendiculaire à P et un vecteur $\overrightarrow{MR}$ nécessairement situé dans P, parce que son moment par rapport à tout autre point M' de ce plan doit être normal à P. Les éléments de réduction étant maintenant rectangulaires, on sait (n° 121) que S est réductible à un vecteur unique. Les droites de moment nul sont tout simplement celles qui rencontrent la directrice Δ de ce vecteur. On dit que le complexe est *spécial*. Le plan P précédent n'est autre qu'un plan quelconque contenant Δ et l'on s'explique pourquoi toutes ses droites appartiennent au complexe.

**126. Droites conjuguées.** — Soit une droite $\Delta$ quelconque de l'espace. Je dis que les plans polaires des différents points de cette droite passent par une même droite.

En effet, prenons deux points particuliers $M_1$, $M_2$ sur $\Delta$. Leurs plans polaires se coupent suivant une certaine droite $\Delta'$. Tout point $M'$ de $\Delta'$ a un plan polaire contenant $M'M_1$ et $M'M_2$ (droites du complexe) et coïncidant, par suite, avec le plan $(M', \Delta)$. Il en résulte que toutes les droites qui s'appuient à la fois sur $\Delta$ et $\Delta'$ font partie du complexe. Si l'on prend maintenant un point quelconque $M$ sur $\Delta$, son plan polaire contient toutes les droites passant par $M$ et s'appuyant sur $\Delta'$; c'est donc le plan $(M, \Delta')$.

En définitive, on voit que les droites $\Delta$ et $\Delta'$ sont telles que *les plans polaires des points de chacune d'elles passent par l'autre;* ou, si l'on veut, *le lieu des pôles des plans qui passent par l'une et l'autre.* On dit que ce sont *deux droites conjuguées par rapport au complexe.*

*Remarque.* — Quand on réduit le système S à deux vecteurs, les directrices de ces derniers sont deux droites conjuguées, car toute droite s'appuyant sur elles est visiblement une droite de moment nul.

**127. Systèmes de vecteurs parallèles.** — Supposons que tous les vecteurs du système S soient parallèles à une même demi-droite $O\lambda$, de cosinus directeurs $a$, $b$, $c$. Soient $x_i$, $y_i$, $z_i$ les coordonnées du point $A_i$ et $m_i$ la mesure algébrique de $\overrightarrow{A_iB_i}$ suivant $O\lambda$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A_iB_i}$ sont

$$(44)\qquad \begin{cases} m_i a, \quad m_i b, \quad m_i c, \\ y_i m_i c - z_i m_i b, \quad z_i m_i a - x_i m_i c, \quad x_i m_i b - y_i m_i a; \end{cases}$$

d'où l'on déduit celles du système :

$$(45)\qquad X = a\Sigma m_i, \quad Y = b\Sigma m_i, \quad Z = c\Sigma m_i;$$

$$(46)\qquad \begin{cases} L = c\Sigma m_i y_i - b\Sigma m_i z_i, \quad M = a\Sigma m_i z_i - c\Sigma m_i x_i, \\ N = b\Sigma m_i x_i - a\Sigma m_i y_i. \end{cases}$$

Débarrassons-nous d'abord du cas particulier où $\Sigma m_i = 0$. La somme géométrique du système est nulle; le système est équivalent à un couple.

Soit maintenant $\Sigma m_i = m \neq 0$. Nous avons d'abord

$$(47)\qquad X = ma, \quad Y = mb, \quad Z = mc.$$

Puis, nous remarquons que, dans les formules (46), interviennent les expressions $\Sigma m_i x_i$, $\Sigma m_i y_i$, $\Sigma m_i z_i$, déjà rencontrées à propos du

centre des distances proportionnelles (n° 23). Si nous appelons $x, y, z$ les coordonnées du *centre* A *des distances proportionnelles des points* $A_i$ *affectés des coefficients* $m_i$, nous avons

$$\Sigma m_i x_i = m x, \qquad \Sigma m_i y_i = m y, \qquad \Sigma m_i z_i = m z.$$

Portant dans (46), il vient

$$L = myc - mzb, \qquad M = mza - mxc, \qquad N = mxb - mya$$

ou, en tenant compte de (47),

$$L = yZ - zY, \qquad M = zX - xZ, \qquad N = xY - yX.$$

On retrouve les formules (16). Il en résulte que *le système est équivalent à un vecteur unique appliqué au point* A. Ce vecteur unique s'appelle *la résultante des vecteurs parallèles* proposés.

Son point d'application A reste fixe quand on change l'orientation commune des vecteurs et quand on les fait varier proportionnellement.

# CHAPITRE IX.

RAPPORT ANHARMONIQUE. — HOMOGRAPHIE; INVOLUTION.

## I. — RAPPORT ANHARMONIQUE.

128. Rapport anharmonique de quatre points en ligne droite. — Soient quatre points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ situés sur une même droite orientée $Ox$. *On appelle rapport anharmonique de ces quatre points, pris dans l'ordre où ils sont écrits, la quantité* [1]

$$(1) \qquad (M_1 M_2 M_3 M_4) = \frac{\overline{M_1 M_3}}{\overline{M_2 M_3}} : \frac{\overline{M_1 M_4}}{\overline{M_2 M_4}}.$$

Si l'on appelle $x_i$ l'abscisse de $M_i$, on a, d'après la formule de Chasles (nº 10) et d'après la définition du nº 318 du Tome I,

$$(2) \qquad (M_1 M_2 M_3 M_4) = (x_1 x_2 x_3 x_4).$$

Dès lors, nous pouvons appliquer au rapport anharmonique de quatre points tout ce qui a été dit, au sujet du rapport anharmonique de quatre nombres, dans la Note II du Tome I. En particulier, on peut énoncer des théorèmes analogues aux théorèmes I et II du nº 318, par le seul remplacement du mot *nombre* par le mot *point*.

*Remarque.* — Si les points $M_1$ et $M_2$ sont différents, le point $M_4$ est entièrement déterminé par la connaissance des trois points $M_1$, $M_2$, $M_3$ et du rapport anharmonique $k = (M_1 M_2 M_3 M_4)$. On peut, en effet, déduire de ce dernier, d'après (1), la valeur du

(1) L'un des points peut très bien être à l'infini; par exemple,

$$(M_1 M_2 M_3 \infty) = \frac{\overline{M_1 M_3}}{\overline{M_2 M_3}} = \frac{\overline{M_3 M_1}}{\overline{M_3 M_2}}.$$

rapport $\frac{\overline{M_4M_1}}{\overline{M_4M_2}}$. Or, on sait qu'il existe un seul point divisant un segment donné dans un rapport donné.

129. Division harmonique. — On dit que *les quatre points forment une division harmonique lorsqu'un de leurs rapports anharmoniques est égal à* — 1; soit, par exemple,

$$(3) \qquad (M_1 M_2 M_3 M_4) = -1,$$

auquel cas *les points* $M_1$, $M_2$ *sont dits conjugués harmoniques par rapport aux points* $M_3$, $M_4$. On sait d'ailleurs (t. I, n° 320) que la condition (3) ne change pas quand on échange les deux points de chacun des deux groupes $M_1$, $M_2$ et $M_3$, $M_4$ ou bien quand on échange les deux groupes. C'est pourquoi l'on peut dire que *chacun des deux segments* [1] $M_1M_2$, $M_3M_4$ *est divisé harmoniquement par l'autre.*

La condition d'harmonie peut s'écrire sous différentes formes. D'abord, de la définition même résulte immédiatement la suivante :

$$(4) \qquad \frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_2M_3}} = -\frac{\overline{M_1M_4}}{\overline{M_2M_4}}$$

ou

$$(5) \qquad \frac{\overline{M_3M_1}}{\overline{M_3M_2}} + \frac{\overline{M_4M_1}}{\overline{M_4M_2}} = 0.$$

Si l'on prend $M_1$ pour origine des abscisses, la condition (6) du n° 320 (t. I) nous donne

$$(6) \qquad \frac{2}{\overline{M_1M_2}} = \frac{1}{\overline{M_1M_3}} + \frac{1}{\overline{M_1M_4}}.$$

Si l'on prend pour origine le milieu I de $M_1M_2$, la condition (7) du n° 320 nous donne

$$(7) \qquad \overline{IM_1}^2 = \overline{IM_2}^2 = \overline{IM_3}.\overline{IM_4}.$$

Cette égalité nous montre que *le segment* $M_3M_4$ *est tout entier du même côté du point* I *et qu'il empiète sur le segment* $M_1M_2$, *sans lui être intérieur*. Cela résulte de ce que $\overline{IM_3}$ et $\overline{IM_4}$ doivent

(1) Et non vecteurs.

être de même signe, leurs valeurs absolues étant l'une plus petite, l'autre plus grande que la valeur absolue de $\overline{\mathrm{IM}_1}$ ou $\overline{\mathrm{IM}_2}$.

On voit aussi que *si* $M_4$, *par exemple, va à l'infini*, $M_3$ *vient en* I, car $\overline{\mathrm{IM}_3}$ tend vers zéro [1]; et réciproquement.

*Si* $M_1$, $M_2$ *sont confondus, l'un des points* $M_3$, $M_4$ *se confond avec eux, l'autre demeure arbitraire.* Car $\mathrm{IM}_1 = \mathrm{IM}_2 = 0$; l'un des facteurs $\overline{\mathrm{IM}_3}$, $\overline{\mathrm{IM}_4}$ doit être nul, l'autre étant quelconque.

Lorsque les deux groupes de points sont définis chacun par une équation du second degré donnant leurs abscisses, la condition d'harmonie est la condition (9) du n° 321 (t. I).

130. Il arrive fréquemment que l'on doit prendre *le rapport anharmonique de quatre points situés sur une droite définie par ses équations paramétriques.* Si l'on a affaire aux équations (56) du n° 95, on sait que le paramètre $\rho$ n'est autre que l'abscisse du point M sur la droite considérée, convenablement orientée. On a donc

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = (\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4).$$

Plus généralement, *si* $x, y, z$ *se présentent sous la forme de fonctions homographiques du paramètre* $t$, on a

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = (t_1 t_2 t_3 t_4).$$

Cela résulte du théorème fondamental du n° 322 (t. I) et de ce que le rapport anharmonique de quatre points est évidemment égal au rapport anharmonique de leurs projections sur $Ox$, par exemple [2].

131. Rapport anharmonique d'un faisceau de droites. — Imaginons quatre droites concourantes et situées dans un même plan $xOy$, soient $S\lambda_1$, $S\lambda_2$, $S\lambda_3$, $S\lambda_4$. Supposons-les définies par l'équa-

---

(1) On le voit tout aussi bien sur (6).

(2) Dans une telle projection, les rapports $\frac{\overline{M_1 M_3}}{\overline{M_2 M_3}}$ et $\frac{\overline{M_1 M_4}}{\overline{M_2 M_4}}$ sont, en effet, conservés. On peut aussi observer que l'on a

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = (y_1 y_2 y_3 y_4) = (z_1 z_2 z_3 z_4) = (\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4),$$

puisque $x, y, z$ sont fonctions linéaires de $\rho$.

tion (n° 76)

(8) $$P + \lambda Q = 0,$$

où l'on doit donner à $\lambda$ quatre valeurs particulières $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ [1]. Coupons-les par une sécante quelconque D et proposons-nous d'évaluer le rapport anharmonique $(M_1 M_2 M_3 M_4)$.

Imaginons qu'on forme l'équation donnant l'abscisse [2], par exemple, du point de rencontre M de D avec la droite $O\lambda$ représentée par (8). On obtiendrait une équation de la forme

$$x(a + b\lambda) = c + d\lambda,$$

$a$, $b$, $c$, $d$ désignant des constantes. L'abscisse de M est donc une fonction homographique de $\lambda$. Dès lors, d'après le n° 130,

(9) $$(M_1 M_2 M_3 M_4) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4).$$

On voit que *ce rapport anharmonique est indépendant de la sécante* D. Il ne dépend que du faisceau $S(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. On l'appelle *rapport anharmonique de ce faisceau* et on le représente par la notation $S(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$.

Si l'on prend (P) parallèle à $Oy$ et (Q) parallèle à $Ox$, $-\lambda$ est égal au coefficient angulaire et l'on voit que le rapport anharmonique de quatre droites est *égal au rapport anharmonique de leurs coefficients angulaires*.

Si la sécante D est parallèle à $S\lambda_4$, par exemple, le point $M_4$ est à l'infini et l'on a [3]

(10) $$S(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = \frac{\overline{M_1 M_3}}{\overline{M_2 M_3}}.$$

---

[1] L'une d'elles peut être infinie, si la droite correspondante coïncide avec (Q).

[2] Si D était parallèle à $Oy$, on formerait l'équation donnant l'ordonnée.

[3] On peut démontrer, d'une façon élémentaire, la constance de $(M_1 M_2 M_3 M_4)$ en menant par $M_3$ la parallèle $M'_1 M'_2$ à $S\lambda_4$ et prouvant l'égalité

(1) $$\frac{\overline{M_1 M_3}}{\overline{M_2 M_3}} : \frac{\overline{M_1 M_4}}{\overline{M_2 M_4}} = \frac{\overline{M'_1 M_3}}{\overline{M'_2 M_3}}.$$

Les triangles semblables $M_1 M_3 M'_1$ et $M_1 M_4 S$ d'une part, $M_2 M_3 M'_2$ et $M_2 M_4 S$ d'autre part, nous donnent

$$\frac{\overline{M_1 M_3}}{\overline{M_1 M_4}} = \frac{\overline{M'_1 M_3}}{\overline{S M_4}}, \qquad \frac{\overline{M_2 M_3}}{\overline{M_2 M_4}} = \frac{\overline{M'_2 M_3}}{\overline{S M_4}}.$$

En divisant membre à membre, on obtient (1).

*Remarque.* — De la remarque faite à la fin du n° 128 résulte que, si $S\lambda_1$ et $S\lambda_2$ sont distinctes, $S\lambda_4$ est entièrement déterminée par la connaissance de $S\lambda_1$, $S\lambda_2$, $S\lambda_3$ et du rapport anharmonique.

Théorème. — *Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est égal au rapport anharmonique de leurs projections coniques sur un plan quelconque, à partir d'un point quelconque.*

Les deux rapports sont, en effet, égaux, d'après ce qui précède, au rapport anharmonique du faisceau formé par les quatre projetantes.

On exprime cette propriété en disant que le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est un *invariant projectif* ou, simplement, qu'*il est projectif*.

132. Faisceau harmonique. — *Le faisceau* $S(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ *est dit harmonique si l'un de ses six rapports anharmoniques est égal à* $-1$; soit, par exemple,

$$S(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4) = -1, \tag{11}$$

auquel cas *les rayons* $S\lambda_1$, $S\lambda_2$ *sont dits conjugués harmoniques par rapport aux rayons* $S\lambda_3$, $S\lambda_4$. On dit encore que *l'angle* $\widehat{\lambda_1 O \lambda_2}$ *est divisé harmoniquement par l'angle* $\widehat{\lambda_3 O \lambda_4}$.

*Une sécante quelconque coupe un faisceau harmonique suivant une division harmonique et réciproquement.*

En particulier, *si la sécante est parallèle à* $S\lambda_4$, par exemple, *le point* $M_3$ *doit être au milieu de* $M_1M_2$ (n° 129).

Si les deux droites $S\lambda_3$ et $S\lambda_4$ sont rectangulaires, le triangle $SM_1M_2$ est isoscèle, puisque sa médiane est la hauteur. Donc $S\lambda_3$ est bissectrice intérieure de $\widehat{\lambda_1 S \lambda_2}$, $S\lambda_4$ étant la bissectrice extérieure.

La réciproque se démontre d'une manière analogue et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si un angle est divisé harmoniquement par un angle droit, celui-ci est constitué par les bissectrices du premier. Réciproquement, les bissectrices d'un angle divisent harmoniquement cet angle.*

Supposons que les deux droites $S\lambda_1$ et $S\lambda_2$ d'une part, $S\lambda_3$ et $S\lambda_4$

d'autre part, soient définies quadratiquement par les équations

$$(12)\qquad AP^2 + 2BPQ + CQ^2 = 0, \qquad A'P^2 + 2B'PQ + C'Q^2 = 0.$$

Les nombres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ d'une part, $\lambda_3$ et $\lambda_4$ d'autre part, sont les racines des équations du second degré

$$(13)\qquad A\lambda^2 - 2B\lambda + C = 0, \qquad A'\lambda^2 - 2B'\lambda + C' = 0.$$

On sait (t. I, n° 321) que *la condition d'harmonie* de ces quatre nombres *s'écrit*

$$(14)\qquad AC' + CA' - 2BB' = 0.$$

Cette équation est, en particulier, la condition d'harmonie des faisceaux définis par les deux équations

$$(15)\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0, \qquad A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = 0.$$

On peut appliquer ceci, concurremment avec le théorème démontré plus haut, à la *recherche des bissectrices* du premier faisceau. Le second faisceau sera, en effet, constitué par les bissectrices du premier si l'on a, outre (14),

$$(16)\qquad A' + C' = 0,$$

qui exprime l'orthogonalité de ces bissectrices (n° 79).

Tenant compte de (16), (14) s'écrit

$$(C - A)A' = 2BB'.$$

On satisfait à cette équation en prenant

$$A' = B, \qquad 2B' = C - A.$$

Le faisceau des bissectrices cherchées a finalement pour équation

$$(17)\qquad B(x^2 - y^2) + (C - A)xy = 0.$$

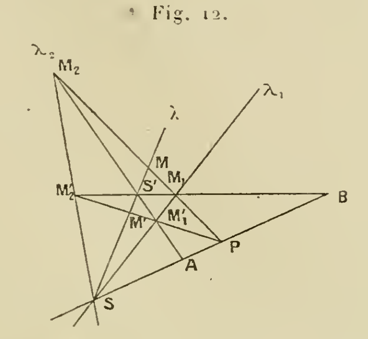
133. Polaire d'un point par rapport a un angle. — Soient deux droites $S\lambda_1$, $S\lambda_2$ et un point fixe P (*fig.* 12). Par ce point menons une sécante variable $PM_1M_2$ et cherchons le lieu du point M conjugué harmonique de P par rapport à $M_1M_2$.

Le faisceau $S(\lambda_1, \lambda_2, P, M)$ est harmonique. Le lieu de M est donc la

droite $S\lambda$ conjuguée harmonique de la droite fixe SP par rapport à $\widehat{\lambda_1 S \lambda_2}$ (¹). On l'appelle *la polaire de* P *par rapport à l'angle* $\widehat{\lambda_1 S \lambda_2}$.

On peut en donner *une construction très simple*. Prenons une deuxième sécante $PM'_1M'_2$. Soit $M'$ le point conjugué harmonique

Fig. 12.




de P par rapport à $M'_1$, $M'_2$. La polaire cherchée est la droite $MM'$. Mais, si l'on observe que les points $M_1$, $M_2$ et $M'_1$, $M'_2$ sont aussi à l'intersection de nos deux sécantes avec les droites $M_1M'_2$ et $M_2M'_1$, qui se coupent en $S'$, on s'aperçoit que $MM'$ est aussi la polaire de P par rapport à l'angle $\widehat{M_1 S' M_2}$ et, comme telle, passe par $S'$. Dès lors, *il suffit de joindre* $SS'$ *pour avoir la polaire cherchée.*

Analytiquement, soient

$$P = 0, \qquad Q = 0 \tag{18}$$

les équations de $S\lambda_1$ et $S\lambda_2$ et $(x_0, y_0)$ les coordonnées du point P. L'équation de la polaire cherchée est de la forme (8). Celle de SP est de la même forme, avec $\lambda = -\frac{P_0}{Q_0} = \lambda_0$. Les $\lambda$ correspondant à (P) et (Q) sont, d'autre part, 0 et $\infty$. On doit donc avoir $(\lambda, \lambda_0, 0, \infty) = -1$, ou (t. I, n° 320) $\lambda = -\lambda_0$. *L'équation de la polaire est donc*

$$P + \frac{P_0}{Q_0} Q = 0$$

(¹) D'après une remarque du n° 131, il n'y a qu'une droite conjuguée harmonique d'une droite donnée par rapport à deux autres droites données (sauf le cas singulier où les trois droites données sont confondues).

ou

(19) $$PQ_0 - P_0 Q = 0.$$

*Remarque.* — Nous venons de démontrer, en passant, que les droites

(20) $$P + \lambda Q = 0, \qquad P - \lambda Q = 0$$

sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites (18).

134. Quadrilatère complet. — Reprenons la figure 12. La figure formée par les quatre droites indéfinies $M_1 M_2$, $M'_1 M'_2$, $M_2 M'_2$ et $M_1 M'_1$ constitue ce qu'on appelle un *quadrilatère complet*. Les six points de rencontre de ces quatre droites deux à deux, c'est-à-dire $M_1$, $M_2$, $M'_1$, $M'_2$, PS, sont *les six sommets du quadrilatère*. Les droites $M_1 M'_2$, $M_2 M'_1$ et PS, qui joignent les couples de sommets opposés, sont *les trois diagonales*. Elles forment un triangle S'AB appelé *triangle diagonal. Chaque côté de ce triangle est la polaire du sommet opposé par rapport aux deux couples de côtés du quadrilatère qui viennent se couper sur le côté considéré du triangle.*

En effet, il résulte de la construction du n° 133 que la polaire de S', par exemple, par rapport à $\widehat{\lambda_1 S \lambda_2}$ ou $\widehat{M_2 P M'_2}$, est SP. On voit aussi que le segment $M_2 M'_1$ par exemple est divisé harmoniquement par les points S', A. C'est ce qu'on exprime en disant que *chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.*

135. Rapport anharmonique d'un faisceau de plans. — Imaginons quatre plans passant par la même droite et définis par l'équation (n° 90)

(21) $$P + \lambda Q = 0,$$

où l'on doit donner à $\lambda$ quatre valeurs particulières $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$. Coupons-les par une sécante quelconque D; nous obtenons les quatre points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$. Comme au n° 131, on démontrerait que leur rapport anharmonique est égal à $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ et, par conséquent, indépendant de D [1]. On l'appelle *rapport anharmonique des*

---

[1] On peut le démontrer géométriquement de la manière suivante. Soit une deuxième sécante quelconque D', qui coupe en $M'_1$, $M'_2$, $M'_3$, $M'_4$. Prenons une sécante auxiliaire D'', qui s'appuie à la fois sur D et D'; elle coupe en $M''_1$, $M''_2$, $M''_3$, $M''_4$. Le

*quatre plans.* Il détermine le quatrième, connaissant les trois premiers (remarque du n° 128).

On déduit de là, comme au n° 131, que *le rapport anharmonique de quatre droites se conserve dans toute projection conique.*

Les *faisceaux harmoniques de plans* se définissent comme les faisceaux harmoniques de droites et jouissent des mêmes propriétés.

Étant donnés deux plans et un point P, on définit *le plan polaire de* P par rapport aux plans proposés de la même manière qu'au n° 133. L'équation (19) représente encore ce plan, si les équations (18) représentent les plans donnés.

## II. — HOMOGRAPHIE, INVOLUTION.

136. Divisions homographiques. — Soient deux droites quelconques D et D'. Choisissons sur chacune d'elles un sens positif et une origine des abscisses. Soient maintenant un point M, d'abscisse $x$, sur D et un point M', d'abscisse $x'$, sur D'. Supposons qu'ils varient de telle manière que leurs abscisses satisfassent constamment à la relation

$$(22)\qquad A xx' + Bx + Cx' + D = 0$$

du premier degré séparément par rapport à $x$ et par rapport à $x'$.

On dit alors qu'*ils décrivent deux divisions homographiques* ou encore qu'*ils sont en correspondance homographique*. Les droites D et D' sont appelées les *bases* des divisions.

La relation (22) est dite *relation homographique;* elle définit chacune des variables comme fonction homographique (t. I, n° 244) de l'autre ([1]), car on a, par exemple,

$$(23)\qquad x = -\frac{Cx' + D}{Ax' + B}.$$

---

plan (DD'') coupe les quatre plans suivant quatre droites concourantes et l'on a, d'après le n° 131,

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = (M''_1, M''_2, M''_3, M''_4).$$

De même,

$$(M'_1, M'_2, M'_3, M'_4) = (M''_1, M''_2, M''_3, M''_4);$$

d'où

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = (M'_1, M'_2, M'_3, M'_4). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

([1]) Ceci n'est exact toutefois que si $AD - BC \neq 0$. Lorsque $AD - BC = 0$, la relation (22) se décompose. L'homographie est dite *singulière* et il n'y a plus, à proprement parler, de correspondance.

Cette définition est indépendante du choix des origines sur D et D′, car un changement d'origines transforme manifestement toute relation homographique en une relation homographique.

On peut lui donner une forme plus géométrique et presque exclusivement employée dans les applications :

*La correspondance entre les deux points doit être algébrique. De plus, à un point* M *doit correspondre un point* M′ *et un seul; inversement, à un point* M′ *doit correspondre un point* M *et un seul* (¹).

Toute correspondance satisfaisant à ces conditions est bien homographique, car elle se traduit analytiquement par une relation entre $x$ et $x'$, qui est d'abord algébrique, puis du premier degré en $x'$, puis du premier degré en $x$, donc de la forme (22).

*Ce critérium est généralement très commode* pour reconnaître que deux divisions sont homographiques. D'abord, on a rarement à se préoccuper de la condition d'algébricité, qui est, pour ainsi dire, toujours remplie dans les applications. Dans tous les cas, on reconnaît qu'il en est bien ainsi à ce fait que la construction d'un point à partir de l'autre peut se faire uniquement par l'intermédiaire de lignes ou surfaces algébriques.

Quant aux autres conditions, on s'aperçoit qu'elles sont vérifiées ou non, en essayant de construire M′ connaissant M, puis M connaissant M′. Dans les deux cas, on ne doit trouver qu'une solution (²).

**137.** Théorème fondamental. — *Le rapport anharmonique de quatre points de l'une des divisions est égal au rapport anharmonique des quatre points homologues.*

Cela résulte manifestement de ce que $x$ est fonction homographique de $x'$ et du théorème fondamental du n° 322 (t. I).

*Réciproquement, une correspondance est homographique si elle conserve le rapport anharmonique.* Soient, en effet, $M_1$, $M_2$, $M_3$ trois points fixes, M un point variable de D et soit $M'_1$, $M'_2$, $M'_3$, M′ les

(¹) Autrement dit, la correspondance doit être *algébrique et parfaite* [*cf.* t. I, p. 22, note (1)].

(²) Dans le dénombrement des solutions, il faut compter les solutions imaginaires, dont l'oubli pourrait faire croire à une correspondance univoque, alors qu'il y aurait correspondance plurivoque.

quatre points homologues de D'. L'hypothèse est qu'on a

$$(24)\qquad (M_1, M_2, M_3, M) = (M'_1, M'_2, M'_3, M'),$$

quel que soit M. Or, ceci s'écrit

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2} : \frac{x' - x'_1}{x' - x'_2},$$

relation de la forme

$$k \frac{x - x_2}{x - x_1} = k' \frac{x' - x'_2}{x' - x'_1},$$

ou

$$k(x - x_2)(x' - x'_1) - k'(x - x_1)(x' - x'_2) = 0,$$

ce qui est une relation homographique.

La propriété fondamentale que nous venons de démontrer peut, d'après cela, servir de définition, si l'on veut, aux divisions homographiques [1].

Théorème. — *Toute correspondance homographique est entièrement déterminée par la connaissance de trois couples de points homologues, lesquels peuvent être choisis arbitrairement.*

En effet, si l'on convient que les trois points arbitraires $M_1$, $M_2$, $M_3$ de D ont pour homologues les trois points arbitraires $M'_1$, $M'_2$, $M'_3$ de D', la correspondance est entièrement déterminée par l'égalité (24).

On peut aussi observer que la connaissance de trois couples de points homologues se traduit par trois équations linéaires et homogènes en A, B, C, D [coefficients inconnus de (22)], ce qui détermine, comme on sait (t. I, n° 292), ces quatre nombres, à un facteur près.

Corollaire. — *Pour que quatre couples de points* $(M_1, M'_1)$, $(M_2, M'_2)$, $(M_3, M'_3)$, $(M_4, M'_4)$ *appartiennent à une même homographie, il faut et il suffit que* $(M_1, M_2, M_3, M_4) = (M'_1, M'_2, M'_3, M'_4)$.

Les trois premiers couples déterminent, en effet, une certaine homographie. Le point $M''_4$ homologue de $M_4$ est tel que

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = (M'_1, M'_2, M'_3, M''_4);$$

---

(1) C'est ainsi que procédait Chasles.

d'où

$$(M'_1, M'_2, M'_3, M'_4) = (M'_1, M'_2, M'_3, M''_4).$$

Par conséquent, $M''_4$ coïncide avec $M'_4$ (nº 128, remarque).

C. Q. F. D.

**138.** Homologues des points a l'infini. — Supposons que M' aille à l'infini sur D', c'est-à-dire que $x'$ augmente indéfiniment. La formule (23) nous montre que $x$ a pour limite $-\frac{C}{A}$.

*Supposons d'abord* $A \neq 0$. L'homologue du point à l'infini de D' est un certain point I de D, situé à distance finie. De même, l'homologue du point à l'infini de D est un certain point J' de D', ayant pour abscisse $-\frac{B}{A}$.

*Si l'on prend ces deux points pour origines des abscisses*, on doit avoir $C = B = 0$. La relation (22) prend alors *la forme canonique*

$$xx' = k = \text{const.} \tag{25}$$

ou

$$\overline{IM}.\overline{J'M'} = k. \tag{26}$$

*Supposons maintenant* $A = 0$. La relation (22) est alors linéaire et montre que chacune des variables $x$ et $x'$ devient infinie en même temps que l'autre. Autrement dit, *les points à l'infini des deux divisions sont homologues.*

Si l'on prend pour origine des abscisses deux points homologues quelconques, $x$ et $x'$ doivent s'annuler en même temps, ce qui exige $D = 0$. La relation (22) prend alors la forme canonique

$$x = kx', \qquad (k = \text{const.}), \tag{27}$$

qui montre que deux figures homologues quelconques sont semblables, le rapport de similitude étant $k$. On dit, pour cette raison, que *les deux divisions sont semblables.*

**139.** Divisions de même base. — Jusqu'à présent, nous avons supposé que les bases D et D' étaient quelconques dans l'espace. Nous allons envisager maintenant le cas particulièrement important où elles

sont confondues. Nous supposerons que l'origine des abscisses et le sens positif sont les mêmes pour les deux divisions.

Cela posé, une question vient assez naturellement à l'esprit : *Quels sont les points qui coïncident avec leurs homologues ?* On les obtiendra en faisant $x = x'$ dans (22) :

$$(28)\qquad Ax^2 + (B + C)x + D = 0.$$

Cette équation du second degré nous donne les abscisses des points cherchés, qui sont appelés *les points doubles* de l'homographie. Il y a donc *deux points doubles*. Ils peuvent être réels et distincts, imaginaires conjugués ([1]) ou confondus, suivant la nature des racines de (28).

Théorème I. — *Si deux divisions homographiques de même base présentent plus de deux points doubles, elles sont confondues.*

Cela résulte de ce que si l'équation (28) possède plus de deux racines, elle en possède une infinité (t. I, n° 205). D'ailleurs, on a, dans cette hypothèse,

$$A = 0, \qquad B + C = 0, \qquad D = 0;$$

la relation (22) se réduit à $x = x'$.

Théorème II. — *Le rapport anharmonique des points doubles et de deux points homologues est constant.*

Soient E, F les deux points doubles; A, A' deux points homologues particuliers et M, M' deux points homologues quelconques. Je dis que

$$(29)\qquad (\text{EFMM}') = (\text{EFAA}').$$

En effet, d'après le théorème fondamental du n° 137, nous savons que

$$(30)\qquad (\text{EFAM}) = (\text{EFA}'\text{M}'),$$

ou

$$\frac{\overline{\text{AE}}}{\overline{\text{AF}}} : \frac{\overline{\text{ME}}}{\overline{\text{MF}}} = \frac{\overline{\text{A}'\text{E}}}{\overline{\text{A}'\text{F}}} : \frac{\overline{\text{M}'\text{E}}}{\overline{\text{M}'\text{F}}},$$

ou

$$\frac{\overline{\text{AE}}}{\overline{\text{AF}}} : \frac{\overline{\text{A}'\text{E}}}{\overline{\text{A}'\text{F}}} = \frac{\overline{\text{ME}}}{\overline{\text{MF}}} : \frac{\overline{\text{M}'\text{E}}}{\overline{\text{M}'\text{F}}},$$

ce qui est (29).

---

([1]) En supposant toutefois les coefficients A, B, C, D réels.

THÉORÈME III. — *Les points doubles ont même milieu que les homologues des points à l'infini.*

Le milieu des points doubles a pour abscisse la demi-somme des racines de (28), c'est-à-dire $-\frac{1}{2}\frac{B+C}{A}$. Mais c'est aussi la demi-somme des abscisses des points I et J' du nº 138.

140. DIVISIONS EN INVOLUTION. — *La relation* (22) *est dite involutive lorsqu'elle est symétrique en* $x$, $x'$, c'est-à-dire lorsqu'on a $B = C$. Toute relation homographique involutive est donc de la forme

$$(31)\qquad Axx' + B(x+x') + D = 0.$$

Si l'on garde les hypothèses faites au numéro précédent, *les divisions homographiques définies par une telle relation sont dites en involution.*

La propriété caractéristique des divisions en involution et qu'*à tout point* P *de la base commune* D *correspond le même point* Q, *que l'on considère* P *comme appartenant à la première ou à la seconde division* [1].

En effet, si $\lambda$ désigne l'abscisse de P, on doit, suivant le cas, remplacer, dans (31), $x$ ou $x'$ par $\lambda$ et résoudre par rapport à $x'$ ou à $x$. Il est clair que les deux opérations conduisent au même résultat, puisque la relation (31) ne change pas quand on intervertit $x$ et $x'$.

Réciproquement, supposons que le point Q, d'abscisse $\mu$, soit homologue du point P, ce dernier pouvant être indifféremment regardé comme un point M ou comme un point M'. La relation (22) doit être vérifiée pour $x = \lambda$, $x' = \mu$ et pour $x' = \lambda$, $x = \mu$. On a donc

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0, \qquad A\mu\lambda + B\mu + C\lambda + D = 0.$$

Retranchant ces deux équations, il vient

$$(32)\qquad (B-C)(\lambda-\mu) = 0.$$

Si l'on suppose $\lambda \neq \mu$, c'est-à-dire si P n'est pas un point double, on a nécessairement $B = C$; il y a involution. Donc :

THÉORÈME. — *Pour que deux divisions homographiques soient*

[1] On peut dire aussi que si au point P correspond le point Q, inversement, au point Q doit correspondre le point P, en considérant Q comme appartenant à la première division.

*en involution, il suffit qu'un seul point, autre qu'un point double, ait même homologue dans les deux divisions.*

Corollaire. — *Pour que les trois couples* $(M_1, M'_1)$, $(M_2, M'_2)$, $(M_3, M'_3)$ *appartiennent à une même involution, il faut et il suffit qu'on ait, par exemple,*

$$(M_1 M_2 M_3 M'_1) = (M'_1 M'_2 M'_3 M_1). \tag{33}$$

En effet, ces trois couples définissent une certaine homographie (n° 137). Pour que cette homographie soit une involution, il faut et il suffit que le couple $(M'_1, M_1)$ soit un quatrième couple de points homologues, ce qui s'exprime précisément par (33) (n° 137).

141. Outre les propriétés générales des divisions homographiques, les divisions en involution possèdent les propriétés spéciales suivantes.

Théorème I. — *Une involution est déterminée par deux couples de points homologues.*

Soient $(M_1, M'_1)$, $(M_2, M'_2)$ ces deux couples. Le couple $(M'_1, M_1)$ doit aussi appartenir à l'involution. Les trois couples $(M_1, M'_1)$, $(M_2, M'_2)$, $(M'_1, M_1)$ déterminent une homographie. Mais, cette homographie est bien une involution, parce que $M_1$ a même homologue dans les deux divisions.

On peut observer aussi que la connaissance de deux couples de points homologues se traduit par deux équations linéaires et homogènes entre les trois coefficients inconnus A, B, D de (31).

Prenons pour origine des abscisses le point homologue du point à l'infini, qu'on appelle quelquefois *point central de l'involution*. La relation (31) prend la forme canonique (25). L'équation aux points doubles s'écrit

$$x^2 = k, \qquad x = \pm\sqrt{k},$$

ce qui démontre que *le point central est au milieu des points doubles*. Si l'on pose $\sqrt{k} = a$, la relation (25) s'écrit

$$xx' = a^2, \tag{34}$$

d'où résulte (n° 129) le théorème suivant :

Théorème II. — *Tout couple de points homologues divise harmoniquement les points doubles.*

Le raisonnement ci-dessus ne s'applique pas toutefois *lorsque le point à l'infini est un point double*. On sait, dans ce cas, que les divisions sont semblables (n° 138). Le coefficient A est nul et la relation (31) se réduit à

$$(35) \qquad B(x+x')+D=0.$$

Le deuxième point double est donné par

$$2Bx+D=0.$$

Si on le prend pour origine, on a $D=0$; (35) devient

$$(36) \qquad x+x'=0.$$

Les points homologues sont symétriques par rapport à O, conformément au théorème II. On dit que *les deux divisions sont symétriques*.

142. Faisceaux homographiques. — Soient deux divisions homographiques (D) et (D′) et deux points fixes S et S′ extérieurs respectivement aux droites D et D′. Joignons S aux points de D et S′ aux points de D′. Nous obtenons deux faisceaux de droites, de sommets S et S′. *Si l'on fait correspondre les rayons des deux faisceaux qui aboutissent à des points homologues des deux divisions, on dit que les deux faisceaux sont homographiques.*

D'après le théorème fondamental du n° 137 et d'après le n° 131, *le rapport anharmonique de quatre rayons de l'un des faisceaux est egal au rapport anharmonique des quatre rayons homologues de l'autre faisceau.*

*Réciproquement*, si l'on établit entre deux faisceaux une correspondance jouissant de cette propriété, cette correspondance est homographique. Si l'on coupe, en effet, chaque faisceau par une droite ne passant pas en son sommet, on obtient, sur ces deux droites, deux divisions homographiques, en vertu de la réciproque démontrée au n° 137. On est, dès lors, ramené à la définition ci-dessus.

Si les deux faisceaux ont pour équations, dans leurs plans respectifs,

$$(37) \qquad P+\lambda Q=0, \qquad P'+\lambda' Q'=0,$$

le rapport anharmonique de quatre valeurs quelconques de λ doit

être égal au rapport anharmonique des valeurs correspondantes de $\lambda'$. Il en résulte que *la condition nécessaire et suffisante pour que les faisceaux* (37) *soient homographiques est que* $\lambda$ *et* $\lambda'$ *soient liés par une relation homographique.*

On peut, en particulier, appliquer ceci aux coefficients angulaires.

Théorème. — *Si l'on coupe deux faisceaux homographiques par deux droites quelconques, on obtient deux divisions homographiques.*

Cela se voit immédiatement par la considération du rapport anharmonique.

Théorème. — *La connaissance de trois couples de rayons homologues détermine deux faisceaux homographiques.*

Se ramène au théorème analogue du n° 137, en coupant par des droites.

*Remarque.* — Le critérium indiqué à la fin du n° 137 s'applique évidemment aux faisceaux.

143. Faisceaux ayant même plan et même sommet. — En les coupant par une droite D quelconque, on obtient deux divisions homographiques de même base. On sait que ces deux divisions ont deux points doubles. En les joignant au sommet commun S, on obtient deux rayons qui sont chacun à lui-même son propre homologue et qu'on appelle *rayons doubles.*

On peut étendre aux faisceaux les théorèmes I et II du n° 139; il suffit de couper toujours par une sécante quelconque ne passant pas par S.

*Les faisceaux sont en involution si les divisions qu'ils déterminent sur une droite quelconque le sont.* Tout rayon issu de S doit avoir même homologue, qu'on le considère comme appartenant à l'un ou à l'autre faisceau.

*Si deux faisceaux homographiques sont en involution, leurs rayons doubles sont conjugués harmoniques par rapport à tout couple de rayons homologues.*

Se ramène au théorème II du n° 141.

144. Faisceaux homographiques de plans. — Reprenons les divi-

sions homographiques du n° 136. Si nous joignons les points homologues M et M′ à deux droites fixes $\Delta$ et $\Delta'$, nous obtenons *deux faisceaux de plans homographiques.*

Ces faisceaux jouissent des mêmes propriétés que les faisceaux de droites. Ils découpent des divisions homographiques sur deux droites quelconques ne rencontrant pas l'une $\Delta$, l'autre $\Delta'$. Ils découpent des faisceaux homographiques de droites dans deux plans quelconques ne passant pas l'un par $\Delta$, l'autre par $\Delta'$; les sommets de ces faisceaux sont les points de rencontre de ces plans avec $\Delta$ et $\Delta'$. Ce que nous avons dit des équations (37) s'applique, sans aucune modification, aux équations analogues représentant des plans.

Lorsque *les droites de base* $\Delta$ et $\Delta'$ des deux faisceaux sont confondues, il existe *deux plans doubles.*

Lorsque tout plan passant par la base commune a même homologue dans les deux faisceaux, ceux-ci sont *en involution. Deux plans homologues quelconques sont alors conjugués harmoniques par rapport aux plans doubles.*

145. Extensions diverses. — On peut faire correspondre homographiquement toutes sortes d'éléments géométriques, associés en deux familles dépendant chacune d'un paramètre. Nous rencontrerons des exemples de ces sortes d'extensions dans la suite de cet Ouvrage (n^os 368, 426). Bornons-nous à signaler ici les cas suivants :

1° *Correspondance homographique entre les points d'une droite et les droites d'un faisceau;*

2° *Correspondance homographique entre les points d'une droite et les plans d'un faisceau ;*

3° *Correspondance homographique entre un faisceau de droites et un faisceau de plans.*

On peut caractériser ces correspondances par la condition que *le rapport anharmonique de quatre éléments de même nature doit être égal au rapport anharmonique des quatre éléments homologues* ou encore par ce fait que la correspondance doit être algébrique et parfaite.

Arrêtons-nous au cas particulier suivant.

146. Soit une droite fixe D. Considérons les points M situés sur D et les plans (P) qui passent par D. Établissons entre eux une correspondance homographique. Nous obtenons ce qu'on appelle une *corrélation anharmonique* ou simplement *une corrélation.*

Nous appellerons *plan asymptote de la corrélation* le plan ($P_0$) qui correspond au point à l'infini $M_0$ de D, *plan central* le plan ($P_1$) perpendiculaire à ($P_0$) et passant par D, *point central* le point $M_1$ homologue de ($P_1$).

Imaginons qu'on rapporte la corrélation aux axes suivants. Prenons D pour axe des $z$, $M_1$ pour origine, ($P_1$) pour plan des $zx$, ($P_0$) pour plan des $zy$. Soient $M_2$ et M deux points de D autres que $M_1$, $z_2$ et $z$ leurs cotes, ($P_2$) et (P) les plans homologues, $\varphi_2$ et $\varphi$ les angles polaires de ces plans relativement à $zOx$. On a, par hypothèse,

$$(M_2 M M_1 M_0) = (P_2 P P_1 P_0),$$

ou

$$(z_2, z, 0, \infty) = (\operatorname{tang}\varphi_2, \operatorname{tang}\varphi, 0, \infty),$$

ou (t. I, n° 318)

$$\frac{z}{z_2} = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\varphi_2}, \qquad z = \frac{z_2}{\operatorname{tang}\varphi_2}\operatorname{tang}\varphi.$$

Si l'on considère comme fixe le point $M_2$ et comme variable le point M, on voit qu'on a, en posant $k = \dfrac{z_2}{\operatorname{tang}\varphi_2}$,

(38) $$z = k \operatorname{tang}\varphi.$$

Cette élégante formule s'appelle la *formule de Chasles*. Le coefficient constant $k$ s'appelle le *paramètre de distribution de la corrélation*. Son signe indique le sens dans lequel tourne le plan (P) autour de D, lorsque M décrit cette droite dans un sens déterminé. Suivant que $k$ est $> 0$ ou $< 0$, cette rotation a lieu dans le sens positif ou dans le sens négatif définis par la droite D, supposée orientée dans le sens de parcours du point M.

Théorème. — *Si l'on établit sur une même droite deux corrélations différentes, il existe deux couples homologues qui leur sont communs.*

En effet, soient M et M' les points homologues d'un même plan (P) dans les deux corrélations. Ils décrivent des divisions homographiques, car on a, par exemple,

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = (P_1 P_2 P_3 P_4) = (M'_1 M'_2 M'_3 M'_4).$$

Ces divisions ont deux points doubles $F_1$, $F_2$. A chacun d'eux

correspond le même plan ($\Phi_1$ pour $F_1$, $\Phi_2$ pour $F_2$) dans les deux corrélations. Les couples ($F_1$, $\Phi_1$), ($F_2$, $\Phi_2$) sont donc bien deux couples homologues communs.

*S'il y a plus de deux couples homologues communs, les corrélations coïncident*, car il en est ainsi des divisions M, M'.

## III. — APPLICATIONS.

La théorie des divisions et faisceaux homographiques donne naissance à d'innombrables applications, dans la recherche de certains lieux et enveloppes. Ces applications reposent sur quelques théorèmes généraux, qu'il importe de très bien connaître et que nous allons maintenant passer en revue.

147. Droites joignant les points homologues de deux divisions homographiques. — Soient les deux divisions D et D' et deux points homologues quelconques M et M'. Nous nous proposons d'étudier l'ensemble des droites MM'. Plusieurs cas sont à distinguer.

Théorème I. — *Si les droites* D *et* D' *ne sont pas dans un même plan, la droite* MM' *engendre une surface du second degré.*

En effet, coupons cette surface ($\Sigma$) par une droite quelconque $\Delta$. Tout point de rencontre est donné par une droite MM' située dans un même plan avec $\Delta$. Il revient au même de dire que, pour une telle droite, les deux plans ($\Delta$, M) et ($\Delta$, M') doivent se confondre. Or, ils décrivent deux faisceaux homographiques (n° 144), ayant même droite de base $\Delta$. Ces faisceaux possèdent deux plans doubles [1]. Il y a donc deux positions de la droite MM' qui s'appuient sur $\Delta$ et, par suite, deux points de rencontre de $\Delta$ avec ($\Sigma$). La surface ($\Sigma$) est donc bien du second degré.

Elle contient évidemment la droite D, lieu de M, et la droite D', lieu de M'. Le plan tangent en M, par exemple, est DMM' (n° 447). Si la droite MM' est supposée réelle, *la surface* $\Sigma$ *ne peut être qu'un*

---

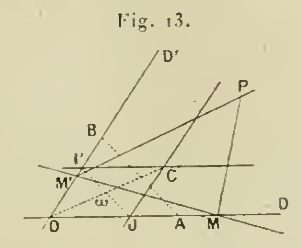
[1] Il peut arriver, pour certaines positions de la droite $\Delta$, que tous les plans soient doubles. Dans ce cas, toutes les droites MM' s'appuient sur $\Delta$, qui se trouve donc sur la surface ($\Sigma$). Ces positions particulières de la droite $\Delta$ sont tout simplement les génératrices de ($\Sigma$) du système dont ne font pas partie les droites MM', c'est-à-dire du même système que D et D' (n° 447).

*hyperboloïde à une nappe ou un paraboloïde hyperbolique* (nos 556 et 562). On distingue les deux cas en cherchant *si la droite* MM′ *peut être rejetée à l'infini*. Ceci arrive si les points à l'infini de D et D′ sont des points homologues (c'est-à-dire si les divisions sont semblables). *La surface est alors un paraboloïde.*

Théorème II. — *Si les droites* D *et* D′ *sont dans un même plan, leur point de rencontre n'étant pas à lui-même son propre homologue, la droite* MM′ *enveloppe une conique.*

Cherchons les droites MM′ qui passent par un point quelconque P du plan (*fig.* 13). Les faisceaux PM et PM′ sont homographiques.

Fig. 13.




Ils ont deux rayons doubles qui sont évidemment les droites cherchées. L'enveloppe est donc une courbe telle qu'on peut lui mener deux tangentes par tout point du plan, c'est-à-dire une courbe de seconde classe, c'est-à-dire une conique (n° 442).

*Cette conique* (Γ) *est tangente à* D. En effet, si M′ vient en O, M vient en A, quelque part sur D; MM′ se confond avec D, qui est donc bien une tangente particulière de (Γ). On sait d'ailleurs (n° 273) que *le point de contact* est la limite du point de rencontre de D avec une tangente infiniment voisine; c'est donc la limite du point M quand MM′ tend vers D; *c'est le point* A.

De même, *la conique* (Γ) *est tangente à* D′, *au point* B homologue du point O considéré comme point M.

On peut *déterminer de la manière suivante, le genre de la conique* (n° 460).

Supposons que M aille à l'infini sur D. Si M′ va à l'infini sur D′ [1], la droite de l'infini est tangente à (Γ), qui est donc une *parabole* (n° 468).

Ce cas étant écarté, soient I′ le point homologue du point à l'infini de D

[1] Les divisions sont semblables (n° 138).

et J l'homologue du point à l'infini de D'. Les parallèles I'C à D et JC à D' sont tangentes à (Γ). Comme il en est de même de D et de D', le parallélogramme OJCI' est circonscrit à la conique, dont on a, en passant, le centre ω.

Cela posé, si A et B sont extérieurs à ce parallélogramme, la conique est une *hyperbole* : s'ils lui sont intérieurs, la conique est une *ellipse* [1].

148. Nous avons supposé les points A et B distincts du point O. Si le point O est à lui-même son propre homologue, A et B sont confondus avec lui. Les droites distinctes D et D' sont tangentes au même point O à (Γ). La conique dégénère nécessairement en deux points, dont le point O (n° 142). Du reste, lorsque M et M' viennent en O, la droite MM' est indéterminée; elle doit seulement passer par O. Toutes les droites issues de O sont donc des tangentes à (Γ). Mais, elles constituent une solution singulière, sans intérêt. La véritable solution est donnée par l'autre point de dégénérescence de la conique (Γ) et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — *Si les droites* D *et* D' *sont dans un même plan, leur point de rencontre étant à lui-même son propre homologue, la droite* MM' *passe par un point fixe.*

Il est du reste aisé de donner une démonstration directe de cette proposition. Soient $M_1$, $M_2$, M trois points de D; $M'_1$, $M'_2$, M' les points homologues de D'. Les droites $M_1M'_1$, $M_2M'_2$ se coupent en un certain point P. Je dis que, quelle que soit la position du point M sur D, la droite MM' passe aussi par P. En effet, les droites PM et PM' décrivent deux faisceaux homographiques de même sommet. Or, les trois rayons PO, $PM_1$, $PM_2$ sont des rayons doubles. Donc, tous les rayons sont doubles et PM coïncide avec PM'.

C. Q. F. D.

149. Intersection de deux faisceaux homographiques situés dans le même plan. — Théorème IV. — *Le lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques de même plan et de sommets différents est une conique.*

---

[1] Ils ne peuvent être l'un intérieur, l'autre extérieur. Au reste, les droites AB et JI' doivent être parallèles, car le diamètre Oω doit passer par le milieu de AB (n° 163), comme par le milieu de JI'. Nous conseillons au lecteur de vérifier directement ce parallélisme, en se servant de la relation (22) et prenant le point O pour origine commune sur D et sur D'.

Ce théorème est corrélatif (n° 299) du théorème II et se démontre d'une manière analogue. Coupons par une droite quelconque D. Pour que le point M vienne sur D, il faut et il suffit que les points de rencontre P et P′ se confondent. Or, ils décrivent sur D deux divisions homographiques, lesquelles ont deux points doubles. Ces points doubles sont les points de rencontre de D avec le lieu, qui est donc une courbe du second degré.

Lorsque S$\lambda$ vient sur SS′, S′$\lambda'$ vient occuper une certaine position S′B, le point M vient en S′, qui appartient donc au lieu. La tangente en ce point est la position limite de S′$\lambda'$, c'est-à-dire S′B.

De même, *le lieu passe par* S, *la tangente en ce point étant* SA, *homologue de* S′S, considéré comme rayon du second faisceau.

Ce qui précède suppose toutefois que S′B et SA ne se confondent pas avec SS′, c'est-à-dire que *la ligne des sommets n'est pas à elle-même sa propre homologue*. Dans le cas particulier où il en est ainsi, la droite SS′ appartient au lieu, à titre de solution singulière (n° 59). La conique précédente se décompose en deux droites, dont l'une est SS′ et l'autre le véritable lieu. Donc :

Théorème V. — *Si la ligne des sommets est à elle-même sa propre homologue, le lieu est une droite.*

Ce théorème, corrélatif du théorème III, peut être démontré directement de la manière suivante. Soient (S$\lambda_1$, S′$\lambda'_1$), (S$\lambda_2$, S′$\lambda'_2$) deux couples de rayons homologues. Joignons, par une droite D, les points $M_1$, $M_2$ correspondants. Je dis que deux rayons homologues quelconques S$\lambda$, S′$\lambda'$ se coupent sur D. En effet, ils découpent, sur D, deux divisions homographiques admettant trois points doubles $M_0$ (point de rencontre avec SS′), $M_1$ et $M_2$ et, par suite, confondues. Autrement dit, S$\lambda$ et S′$\lambda'$ coupent constamment D en un même point. C. Q. F. D.

150. Intersection de deux faisceaux homographiques de plans. — Théorème VI. — *Le lieu des droites d'intersection des plans homologues de deux faisceaux homographiques de plans est une quadrique.*

*Premier cas : Les droites de base des deux faisceaux ne sont pas dans le même plan.* — Le plan du premier faisceau rencontre $\Delta'$

en M'; le plan du second faisceau rencontre $\Delta$ en M. La droite MM' est l'intersection des deux plans. Or, M et M' décrivent, sur $\Delta$ et $\Delta'$, deux divisions homographiques. On est, dès lors, ramené au théorème I.

*Deuxième cas : Les droites de base sont dans un même plan, qui n'est pas à lui-même son propre homologue.* — Le raisonnement ci-dessus est en défaut, car les points M et M' sont confondus avec le point de rencontre O des droites de base et ne déterminent plus, par conséquent, l'intersection $O\lambda$ des deux plans.

*Le lieu de* $O\lambda$ *est un cône du second degré et de sommet* O. C'est évidemment un cône de sommet O. Pour démontrer qu'il est du second degré, il suffit de le couper par une droite quelconque. Les deux faisceaux de plans déterminent, sur cette droite, deux divisions homographiques, dont les deux points doubles sont les points d'intersection.

*Le cône passe par* $\Delta$, *le plan tangent le long de cette droite étant homologue du plan* $\Delta' O \Delta$. Car si $\Delta' O \lambda$ tend vers $\Delta' O \Delta$, $O\lambda$ tend vers $O\Delta$ et $\Delta O \lambda$ vers le plan tangent le long de $O\Delta$.

De même, le cône passe par $\Delta'$, le plan tangent étant homologue de $\Delta O \Delta'$.

Tous ces résultats auraient d'ailleurs pu se déduire du théorème IV, en coupant les faisceaux de plans par un plan fixe quelconque, ne passant pas par O.

*Troisième cas : Le plan des droites de base est à lui-même son propre homologue.* — Le cône précédent dégénère en la solution singulière constituée par le plan $\Delta O \Delta'$ et un autre *plan, qui est la solution véritable.* On pourrait le démontrer en répétant le raisonnement fait à propos du théorème V. On peut aussi le déduire de ce théorème en coupant par un plan ne passant pas par O.

# CHAPITRE X.

## COORDONNÉES TRILINÉAIRES ET TÉTRAÉDRIQUES.

---

**151. Coordonnées trilinéaires.** — Imaginons, dans le plan, un système quelconque de coordonnées cartésiennes. Soient $\xi$, $\eta$ les coordonnées d'un point quelconque M et X, Y, T ses coordonnées cartésiennes homogènes, définies, comme on sait (n° 39), par les formules

$$\xi = \frac{X}{T}, \qquad \eta = \frac{Y}{T}. \tag{1}$$

Faisons, sur les variables X, Y, T, une substitution linéaire quelconque (t. I, n° 297) :

$$\left\{\begin{aligned} X &= a\,x + b\,y + c\,z,\\ Y &= a'x + b'y + c'z,\\ T &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

les $a, b, \ldots, c''$ étant assujettis à l'unique condition

$$m = \| a \quad b \quad c \| \neq 0. \tag{3}$$

De (2), on peut tirer inversement

$$\left\{\begin{aligned} x &= \alpha\,X + \beta\,Y + \gamma\,T,\\ y &= \alpha'X + \beta'Y + \gamma'T,\\ z &= \alpha''X + \beta''Y + \gamma''T. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Lorsque le point M est donné, on sait que X, Y, T ne sont définis qu'à un facteur près; il en est donc de même des $x$, $y$, $z$. Ces trois nombres $x$, $y$, $z$ sont appelés *les coordonnées trilinéaires homogènes du point* M.

Quand on les connaît, on peut calculer les coordonnées cartésiennes ordinaires, grâce aux formules (1) et (2), qui donnent

$$\xi = \frac{a\,x + b\,y + c\,z}{a''x + b''y + c''z}, \qquad \eta = \frac{a'x + b'y + c'z}{a''x + b''y + c''z}, \tag{5}$$

formules qui montrent bien que le point M ne change pas, quand on remplace $x$, $y$, $z$ par $\lambda x$, $\lambda y$, $\lambda z$.

152. Triangle de référence. — Les équations (4) permettent d'interpréter aisément les coordonnées trilinéaires du point M.

Observons d'abord que les équations

$$(6) \qquad x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0$$

représentent trois droites $(a)$, $(b)$, $(c)$, non concourantes, car le déterminant $\| \alpha\beta\gamma \| = \frac{1}{m}$ (t. I, n° 297) n'est pas nul (n° 80).

Ces trois droites constituent un triangle, qu'on appelle *le triangle de référence*.

A vrai dire, ce triangle peut ne pas être un triangle au sens élémentaire du mot. Il peut arriver, si deux des droites $(a)$, $(b)$, $(c)$ sont parallèles $\left(\text{si l'on a, par exemple, } \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}\right)$, qu'un de ses sommets soit à l'infini; ou bien qu'un de ses côtés coïncide avec la droite de l'infini ([1]) (si l'on a, par exemple, $\alpha'' = \beta'' = 0$).

Quoi qu'il en soit, nous représenterons toujours le triangle de référence par un triangle ordinaire ABC (*fig.* 14); le sommet A sera opposé au côté $(a)$, $(x = 0)$; le sommet B sera opposé au côté $(b)$, $(y = 0)$; le sommet C sera

Fig. 14.

opposé au côté $(c)$, $(z = 0)$. Si l'un de ces sommets est à l'infini, il faudra regarder la figure comme purement schématique.

Le sommet A, qui est à l'intersection des côtés $(b)$ et $(c)$, a pour coordonnées trilinéaires $(x, 0, 0)$, $x$ ayant une valeur quelconque non nulle. De même, B et C ont pour coordonnées $(0, y, 0)$ et $(0, 0, z)$.

Les formules (4) peuvent s'écrire

$$(7) \qquad \begin{cases} x = \mathrm{T}(\alpha\ \xi + \beta\ \eta + \gamma\ ), \\ y = \mathrm{T}(\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'), \\ z = \mathrm{T}(\alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''). \end{cases}$$

Or, on sait (n° 66) que $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma$, par exemple, est égal, à un facteur constant près, à la distance du point M à la droite $(a)$. On voit donc que *les*

([1]) De ce point de vue, les coordonnées cartésiennes homogènes X, Y, T peuvent être considérées comme des coordonnées trilinéaires, le triangle de référence étant constitué par les axes et la droite de l'infini.

*coordonnées trilinéaires du point* M *sont proportionnelles aux produits par des constantes déterminées des distances de ce point aux trois côtés du triangle de référence.* A chaque côté est affecté un certain coefficient, par lequel doit être multipliée la distance correspondante.

D'une façon plus précise, considérons le point U, dont les coordonnées trilinéaires sont égales ($x = y = z$) et que nous appellerons *le point unitaire.* Des points U et M, abaissons les perpendiculaires sur les côtés du triangle ABC. D'après ce qui précède, les coordonnées trilinéaires du point M sont de la forme

$$(8) \qquad x = \lambda\varepsilon\overline{MP}, \qquad y = \lambda\varepsilon'\overline{MQ}, \qquad z = \lambda\varepsilon''\overline{MR},$$

$\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ désignant trois nombres déterminés et $\lambda$ un facteur arbitraire. Les coordonnées du point U sont, de même,

$$(9) \qquad x' = \lambda'\varepsilon\overline{UD}, \qquad x' = \lambda'\varepsilon'\overline{UE}, \qquad x' = \lambda'\varepsilon''\overline{UF}.$$

En divisant chaque équation (8) par l'équation (9) correspondante, on a, en posant $\rho = \dfrac{\lambda x'}{\lambda'}$,

$$(10) \qquad x = \rho\frac{\overline{MP}}{\overline{UD}}, \qquad y = \rho\frac{\overline{MQ}}{\overline{UE}}, \qquad z = \rho\frac{\overline{MR}}{\overline{UF}}.$$

On voit qu'*un système de coordonnées trilinéaires est entièrement déterminé quand on connaît le triangle de référence et le point unitaire.*

Ce point unitaire peut d'ailleurs être arbitrairement choisi, pour un triangle déterminé, à condition de ne pas être sur le périmètre de ce dernier. On peut toujours, en effet, calculer $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ de façon à rendre égales les coordonnées d'un point donné, pourvu qu'aucune d'elles ne soit nulle.

153. Équations diverses. — Nous avons vu que toute courbe algébrique de degré $m$ était représentée, en coordonnées cartésiennes homogènes, par une équation algébrique homogène et de degré $m$. En faisant la substitution linéaire (2), on arrive évidemment à une équation de même forme

$$(11) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

où $f(x, y, z)$ désigne un polynome homogène et de degré $m$.

En particulier, une droite a une équation du premier degré :

$$(12) \qquad Ax + By + Cz = 0.$$

Par exemple, *la droite de l'infini* (nº 73) a pour équation $T = 0$ ou, d'après (2),

$$(13) \qquad a''x + b''y + c''z = 0.$$

L'équation générale des droites passant par l'intersection des droites $P = 0$,

$Q = 0$ est, comme au n° 76,

$$P + \lambda Q = 0 \quad (14)$$ [1]

ou

$$\lambda P + \mu Q = 0. \quad (15)$$

En particulier, toute droite passant par A a une équation de la forme

$$By + Cz = 0, \quad (16)$$

et réciproquement. De même, les droites passant par B ou C sont caractérisées par ce fait que leur équation ne renferme pas $y$ ou $z$.

Toute équation algébrique, homogène et de degré $m$ en $y$, $z$, représente un faisceau de $m$ droites issues de A. Cela se démontre en raisonnant comme au n° 77. Si l'équation est en $z$, $x$, les droites passent par B; si elle est en $x, y$, elles passent par C.

Étant données deux courbes algébriques

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0, \quad (17)$$

on obtient le faisceau des droites joignant le point A à leurs points d'intersection, en éliminant $x$ entre les équations (17). Cela se démontre en répétant le raisonnement du n° 78, où les notations seules diffèrent.

En éliminant $y$ ou $z$, on aurait un faisceau analogue, de sommet B ou C.

Tout ce qui a été dit aux n$^{os}$ 80 et 81 à propos de la condition de concours de trois droites et de l'équation de la droite joignant deux points donnés s'applique sans modification aux coordonnées trilinéaires.

Étant donnés les deux points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$, le point M de coordonnées

$$x = x_1 + \lambda x_2, \qquad y = y_1 + \lambda y_2, \qquad z = z_1 + \lambda z_2 \quad (18)$$

décrit la droite $M_1M_2$, lorsque $\lambda$ varie. En effet, si (12) est l'équation de cette droite, on a

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0, \qquad Ax_2 + By_2 + Cz_2 = 0;$$

donc

$$A(x_1 + \lambda x_2) + B(y_1 + \lambda y_2) + C(z_1 + \lambda z_2) = 0,$$

quel que soit $\lambda$.

On peut aussi remarquer qu'en portant les valeurs (18) dans (5), on obtient, pour $\xi$ et $\eta$, des fonctions homographiques de $\lambda$, de même dénominateur, c'est-à-dire les équations paramétriques d'une droite. On voit, du même coup, que si l'on donne à $\lambda$ quatre valeurs quelconques, on obtient *quatre points dont le rapport anharmonique est égal au rapport anharmonique des valeurs*

---

[1] Le rapport anharmonique de quatre de ces droites égale le rapport anharmonique des $\lambda$.

*correspondantes de* $\lambda$ *(n° 130)*. En particulier, si $M_3$ désigne le point $\lambda = 1$, on a, en remarquant que les $\lambda$ des points $M_1$ et $M_2$ sont respectivement o et $\infty$,

$$(19) \qquad (M_1\ M_2\ M\ M_3) = (0\ \infty\ \lambda\ 1) = (\lambda\ 1\ 0\ \infty) = \lambda$$

ou

$$(20) \qquad \lambda = \frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} : \frac{\overline{M_3M_1}}{\overline{M_3M_2}} = k\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} \qquad (k = \text{const.}).$$

On voit donc que $\lambda$ est proportionnel au rapport $\dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}}$.

154. Systèmes particuliers. — Suivant la position qu'occupe le point unitaire par rapport au triangle de référence, on obtient tel ou tel système de coordonnées trilinéaires. Nous examinerons seulement les deux cas suivants :

*Coordonnées barycentriques*. — Prenons *le point unitaire au centre*

Fig. 15.

*de gravité* (*fig.* 15). Le plan étant arbitrairement orienté, nous avons

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{GD}} = \frac{\text{aire MBC}}{\text{aire GBC}}.$$

Mais, aire GBC $= \frac{1}{3}$ aire ABC $= \frac{S}{3}$. Donc

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{GD}} = \frac{3}{S}\,\text{aire MBC}.$$

De même,

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{GE}} = \frac{3}{S}\,\text{aire MCA}, \qquad \frac{\overline{MR}}{\overline{GF}} = \frac{3}{S}\,\text{aire MAB}.$$

En se reportant à (10), on voit que *les coordonnées* $x, y, z$ *sont proportionnelles aux aires algébriques* MBC, MCA, MAB. Ce système porte le nom de *coordonnées barycentriques*.

On peut lui donner une autre interprétation. Je dis que M *est le centre des distances proportionnelles des points* A, B, C *affectés des coefficients respectifs* $x, y, z$. En effet, si l'on applique les formules du n° 23, on obtient,

pour les coordonnées cartésiennes, des expressions de la forme

$$(21) \qquad \xi = \frac{x\xi_1 + y\xi_2 + z\xi_3}{x+y+z}, \qquad \eta = \frac{x\eta_1 + y\eta_2 + z\eta_3}{x+y+z},$$

c'est-à-dire de la forme (5), où l'on supposerait simplement $a'' = b'' = c''$. Les nombres $x$, $y$, $z$ constituent donc bien un système de coordonnées trilinéaires. D'ailleurs, pour $y = z = 0$, M vient en A; pour $z = x = 0$, M vient en B; pour $x = y = 0$, M vient en C; pour $x = y = z$, M vient en G. Donc, ABC est le triangle de référence et G est le point unitaire [1].

D'après (21), on voit que *la droite de l'infini a pour équation, en coordonnées barycentriques,*

$$(22) \qquad x + y + z = 0.$$

155. Coordonnées normales. — Prenons *le point unitaire au centre d'un cercle inscrit ou exinscrit.* Si l'on oriente la perpendiculaire à chaque côté du triangle de telle manière que le point U se trouve dans la région positive (n° 71), on a

$$\overline{UD} = \overline{UE} = \overline{UF}.$$

D'après (10), on voit que les coordonnées $x$, $y$, $z$ *sont proportionnelles aux distances algébriques* $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{MR}$.

On les appelle *coordonnées trilinéaires normales.*

Supposons, pour fixer les idées, que U soit au centre du cercle inscrit. La perpendiculaire à chaque côté est alors orientée *vers l'intérieur du triangle.* Prenons, d'autre part, comme sens positif de rotation du plan celui qui est défini par le sens de parcours ABC du périmètre. On a, en appelant $a$, $b$, $c$ les longueurs des côtés,

$$2 \text{ aire MBC} = a\overline{PM}, \qquad 2 \text{ aire MCA} = b\overline{QM}, \qquad 2 \text{ aire MAB} = c\overline{RM}.$$

---

[1] On peut aussi donner la démonstration directe suivante. Prouvons que (n° 23)

$$(1) \qquad \vec{V} = x.\overrightarrow{MA} + y.\overrightarrow{MB} + z.\overrightarrow{MC} = 0.$$

Prenons, en effet, le moment par rapport à A. Ce moment est normal au plan et a pour mesure algébrique sur la demi-normale positive

$$\overline{V, A} = y. \text{ aire MBA} + z. \text{ aire MCA}.$$

Or. nous venons de voir que $\frac{y}{\text{aire MCA}} = \frac{z}{\text{aire MAB}} = -\frac{z}{\text{aire MBA}}$. Donc, $\overline{V, A} = 0$. De même, $\overline{V, B} = \overline{V, C} = 0$. Le vecteur $\vec{V}$, ne pouvant passer à la fois par A, B et C, est nécessairement nul. C. Q. F. D.

D'autre part (*cf.* Exercice proposé n° 26 du Chapitre VIII)

$$2 \text{ aire } MBC + 2 \text{ aire } MCA + 2 \text{ aire } MAB = 2 \text{ aire } ABC = 2S.$$

Donc,

$$(23) \qquad a\overline{PM} + b\overline{QM} + c\overline{RM} = 2S.$$

Si donc l'on pose

$$(24) \qquad x = \rho\overline{PM}, \qquad y = \rho\overline{QM}, \qquad z = \rho\overline{RM},$$

on a

$$(25) \qquad ax + by + cz = 2\rho S.$$

Si le point M va à l'infini, comme $x$, $y$, $z$ doivent rester finis, les formules (24) montrent que $\rho$ tend vers zéro. On aura donc *l'équation de la droite de l'infini*, en annulant $\rho$ dans (25), ce qui donne

$$(26) \qquad ax + by + cz = 0.$$

Le lecteur trouvera d'autres équations relatives aux coordonnées normales dans $N_1$, n° 188.

156. COORDONNÉES TÉTRAÉDRIQUES. — Imaginons, dans l'espace, un système quelconque de coordonnées cartésiennes. Soient $\xi$, $\eta$, $\zeta$ les coordonnées d'un point quelconque M et X, Y, Z, T ses coordonnées homogènes définies par (n° 39)

$$(27) \qquad \xi = \frac{X}{T}, \qquad \eta = \frac{Y}{T}, \qquad \zeta = \frac{Z}{T}.$$

Faisons, sur les variables X, Y, Z, T, une substitution linéaire quelconque (t. I, n° 297)

$$(28) \qquad \begin{cases} X = a\,x + b\,y + c\,z + e\,t, \\ Y = a'\,x + b'\,y + c'\,z + e'\,t, \\ Z = a''\,x + b''\,y + c''\,z + e''\,t, \\ T = a'''x + b'''y + c'''z + e'''t; \end{cases}$$

d'où

$$(29) \qquad \begin{cases} x = \alpha\,X + \beta\,Y + \gamma\,Z + \varepsilon\,T, \\ y = \alpha'\,X + \beta'\,Y + \gamma'\,Z + \varepsilon'\,T, \\ z = \alpha''X + \beta''\,Y + \gamma''\,Z + \varepsilon''\,T, \\ t = \alpha'''X + \beta'''Y + \gamma'''Z + \varepsilon'''T; \end{cases}$$

les déterminants $\| a \quad b \quad c \quad e \|$ et $\| \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \varepsilon \|$ étant différents de zéro.

Lorsque le point M est donné, $x$, $y$, $z$, $t$, comme X, Y, Z, T, sont définis à un facteur près et sont appelés les *coordonnées tétraédriques de* M. Quand on les connaît, les coordonnées cartésiennes ordinaires sont données

par

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{a\,x + b\,y + c\,z + e\,t}{a'''x + b'''y + c'''z + e'''t}, \\ \eta &= \frac{a'\,x + b'\,y + c'\,z + e'\,t}{a'''x + b'''y + c'''z + e'''t}, \\ \zeta &= \frac{a''x + b''y + c''z + e''t}{a'''x + b'''y + c'''z + e'''t}. \end{aligned} \right.$$

157. Les équations $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ représentent quatre plans n'ayant aucun point commun, puisque $\| \alpha \ \beta \ \gamma \ \varepsilon \| \neq 0$ (n° 89). Ces quatre plans forment un tétraèdre ABCD, appelé *tétraèdre de référence* [1]. Nous supposerons que le sommet A est opposé à la face $x = 0$; de même, B est opposé à $y = 0$, C à $z = 0$ et D à $t = 0$. Les coordonnées de ces sommets sont respectivement $(x, 0, 0, 0)$, $(0, y, 0, 0)$, $(0, 0, z, 0)$, $(0, 0, 0, t)$.

En raisonnant comme au n° 152, on voit que $x, y, z, t$ *sont proportionnels aux produits par des constantes déterminées des distances de* M *aux quatre faces du tétraèdre de référence.*

Si l'on introduit *le point unitaire* U, dont les coordonnées sont égales $(x = y = z = t)$, on a, comme au n° 152,

$$(31)\qquad x = \rho\frac{\overline{\mathrm{MP}}}{\overline{\mathrm{UE}}}, \qquad y = \rho\frac{\overline{\mathrm{MQ}}}{\overline{\mathrm{UF}}}, \qquad z = \rho\frac{\overline{\mathrm{MR}}}{\overline{\mathrm{UH}}}, \qquad t = \rho\frac{\overline{\mathrm{MS}}}{\overline{\mathrm{UK}}}.$$

158. Toute surface algébrique de degré $m$ est représentée, en coordonnées tétraédriques, par une équation de la forme

$$(32)\qquad f(x, y, z, t) = 0,$$

où $f$ désigne un polynome homogène de degré $m$. En particulier, l'équation

$$(33)\qquad \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D}t = 0$$

représente un plan. Par exemple, le plan de l'infini a pour équation

$$(34)\qquad a'''x + b'''y + c'''z + e'''t = 0.$$

L'équation générale des plans passant par l'intersection des plans (P), (Q), (R) est, comme au n° 88,

$$(35)\qquad \lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q} + \nu\mathrm{R} = 0.$$

En particulier, les plans passant par A ou B ou C ou D sont caractérisés par le fait que leur équation ne renferme pas $x$ ou $y$ ou $z$ ou $t$.

La condition de concours de quatre plans est la même qu'au n° 89.

---

[1] Ce tétraèdre peut avoir 1, 2 ou 3 sommets à l'infini.

Une droite est définie par deux équations du premier degré

$$(36)\qquad P = 0, \qquad Q = 0.$$

Les plans passant par cette droite ont pour équation générale

$$(37)\qquad \lambda P + \mu Q = 0.$$

Par exemple, l'arête BD a pour équations

$$(38)\qquad x = 0, \qquad z = 0;$$

tout plan passant par BD a une équation de la forme

$$(39)\qquad Ax + Cz = 0.$$

Le plan passant par trois points donnés se détermine comme au n° 91.

Étant donnés deux points $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$, le point M de coordonnées

$$(40)\qquad x = x_1 + \lambda x_2, \qquad y = y_1 + \lambda y_2, \qquad z = z_1 + \lambda z_2, \qquad t = t_1 + \lambda t_2$$

décrit la droite $M_1M_2$, lorsque $\lambda$ varie. Le rapport anharmonique de quatre points de cette droite égale le rapport anharmonique de leurs $\lambda$. On a encore l'équation (20).

159. Suivant la position du point unitaire, on obtient tel ou tel système de coordonnées tétraédriques.

En le prenant au centre de gravité, on obtient le système des *coordonnées barycentriques*, qui s'interprète comme au n° 154 : $x, y, z, t$ sont proportionnels aux volumes algébriques (n° 93) MBCD, MADC, MABD, MACB [1]; ou bien, ce sont les coefficients dont il faut affecter les points A, B, C, D pour que leur centre des distances proportionnelles soit en M.

En prenant le point unitaire au centre d'une sphère inscrite ou exinscrite, on obtient le système des *coordonnées normales*, pour lequel $x, y, z, t$ sont proportionnels aux distances algébriques $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{MR}$, $\overline{MS}$ (*cf.* $X_{III}$, n° 71).

160. Mode d'emploi des coordonnées trilinéaires et tétraédriques. — Les coordonnées trilinéaires ou tétraédriques ne sont d'un emploi commode que *dans les questions où n'interviennent aucune propriété métrique ni aucun rapport autre qu'un rapport anharmonique*. Elles sont spécialement indiquées lorsque, les conditions précédentes étant réalisées, il existe, dans la

---

[1] Il faut bien prendre garde à l'ordre dans lequel on énonce les sommets. On se débarrasse de cette préoccupation en convenant que *chacun des quatre volumes est positif ou négatif, suivant qu'il se trouve du même côté que le tétraèdre de référence ou du côté opposé.*

question, un triangle ou un tétraèdre jouant un rôle particulièrement important, qu'on prend alors comme triangle ou tétraèdre de référence, le point unitaire demeurant arbitraire ou étant choisi, lorsque cela est possible, de manière à amener encore quelques simplifications.

Malgré ce qui vient d'être dit plus haut, on peut quelquefois utiliser les coordonnées trilinéaires ou tétraédriques pour l'établissement de certaines propriétés métriques. Il suffit de se donner arbitrairement les équations de la droite de l'infini ou du plan de l'infini, lorsque les seuls éléments métriques intervenant dans la question sont des rapports de la forme $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$, où A, B, M désignent trois points en ligne droite. On remplace ce rapport par le rapport anharmonique (ABMN), en appelant N le point à l'infini de la droite AB.

Si l'on a affaire à des angles, il faut, en outre, se donner une équation du second degré, destinée à représenter un certain cercle ou une certaine sphère, de manière à déterminer, de concert avec l'équation de la droite ou du plan de l'infini, les points cycliques (n° 163) ou le cercle imaginaire de l'infini (n° 179). On applique ensuite les propriétés signalées aux n$^{os}$ 164, 180 et 181.

Si l'on a affaire à des distances, on peut encore se tirer d'embarras, en convenant que l'on s'est donné, par exemple, une sphère de rayon 1 ou bien en introduisant une certaine forme quadratique (*cf.* $X_1$, n$^{os}$ 184, 186). Mais on est conduit à des calculs compliqués, sur lesquels nous n'insistons pas.

Observons, pour terminer, que, pour l'étude des propriétés métriques, il peut être avantageux d'utiliser des systèmes particuliers de coordonnées, tels que les coordonnées normales.

# CHAPITRE XI.

## LE CERCLE.

**161.** Distance de deux points. — Soient deux points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, que nous supposons d'abord rapportés à deux axes rectangulaires. Soient $d$ leur distance et $\varphi$ l'angle polaire du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$. On a

$$(1) \qquad x_2 - x_1 = d\cos\varphi, \qquad y_2 - y_1 = d\sin\varphi.$$

Élevons au carré et ajoutons

$$(2) \qquad d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Telle est la formule qui donne, *en axes rectangulaires*, le carré de la distance de deux points.

Bien qu'on s'en serve peu souvent, nous allons aussi établir la formule en axes obliques. Soit d'abord à calculer la distance OM. On a l'égalité géométrique (n° 21)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}.$$

Formons le carré scalaire (n° 104)

$$(3) \qquad \overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta,$$

$\theta$ désignant l'angle des axes. Posons

$$(4) \qquad \psi(x, y) \equiv x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta.$$

Pour avoir la distance $M_1M_2$, il suffit de porter l'origine en $M_1$. Les nouvelles coordonnées de $M_2$ sont $x_2 - x_1$ et $y_2 - y_1$, et l'on a

$$(5) \qquad \overline{M_1M_2}^2 = \psi(x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

**162.** Équation du cercle. — Soit un cercle (C) de centre $C(\alpha, \beta)$ et de rayon R. Pour qu'un point $M(x, y)$ soit sur ce cercle, il faut et

il suffit qu'on ait $\overline{CM}^2 = R^2$ ou, d'après (2),

$$(6)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0.$$

Telle est, *en coordonnées rectangulaires*, l'équation du cercle de centre $C(\alpha, \beta)$ et de rayon R.

En coordonnées obliques, l'équation est, d'après (5),

$$(7)\qquad \psi(x-\alpha, y-\beta)-R^2=0.$$

Développons l'équation (6), nous obtenons

$$(8)\qquad x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0,$$

en posant

$$(9)\qquad \alpha^2+\beta^2-R^2=\gamma.$$

Je dis que, réciproquement, toute équation de la forme (8) représente un cercle, quelles que soient les constantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. En effet, cette équation est identique à l'équation (6), si l'on prend

$$(10)\qquad R^2=\alpha^2+\beta^2-\gamma.$$

Elle représente donc bien un cercle, *dont le centre a pour coordonnées* $\alpha$, $\beta$ et dont le rayon est donné par (10). Il est à remarquer que ce rayon n'est réel que si $\alpha^2+\beta^2-\gamma>0$.

Si $\alpha^2+\beta^2-\gamma<0$, le rayon est imaginaire pur (t. I, n° 28). L'équation (8) n'est vérifiée pour aucun point réel; le cercle est imaginaire (n° 55).

Si $\alpha^2+\beta^2-\gamma=0$, le rayon est nul. L'équation (8) se réduit à

$$(11)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0$$

ou

$$(12)\qquad y-\beta=\pm i(x-\alpha).$$

Le cercle se décompose en deux droites imaginaires conjuguées issues du point C, qui en est le seul point réel. On dit que c'est un *cercle évanouissant* ou *dégénéré* ou *de rayon nul*.

163. Points cycliques. — Coupons le cercle (8) par la droite de l'infini. A cet effet, imaginons qu'on rende l'équation homogène et

qu'on y fasse ensuite $T = 0$ (n° 73). Il reste l'équation

$$(13) \qquad x^2 + y^2 = 0,$$

qui se décompose en

$$(14) \qquad y = ix, \qquad y = -ix.$$

Les points à l'infini du cercle ont pour coordonnées homogènes $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$. On voit qu'ils sont indépendants des coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Donc, *tous les cercles du plan ont les mêmes points à l'infini.*

Ces points, qui sont imaginaires conjugués, sont appelés *points cycliques* ou *points circulaires à l'infini*. Nous désignerons toujours le premier par la lettre I et le second par la lettre J.

Théorème. — *Pour qu'une courbe du second degré soit un cercle, il faut et il suffit qu'elle passe par les points cycliques.*

En effet, nous savons déjà que la condition est nécessaire. Démontrons qu'elle est suffisante. Les axes étant supposés rectangulaires, toute courbe du second degré a une équation de la forme

$$(15) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Si on la coupe par la droite de l'infini, on obtient deux points situés sur le faisceau

$$(16) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

Ces points étant, par hypothèse, les points cycliques, le faisceau (16) doit coïncider avec le faisceau (13). Identifiant les deux équations, il vient

$$(17) \qquad B = 0, \qquad A = C.$$

Mais alors, si l'on divise (15) par A, on obtient une équation du type (8), qui, nous le savons, représente un cercle. C.Q.F.D.

Corollaire. — *Pour qu'une équation du second degré, en coordonnées obliques, représente un cercle, il faut et il suffit que l'ensemble des termes du second degré soit proportionnel à $\psi(x, y)$.*

Car, l'équation du faisceau joignant l'origine aux points cycliques est

$$(18) \qquad \psi(x, y) = 0.$$

Ce corollaire pourrait aussi s'établir directement par identification avec (7).

**164. Droites isotropes.** — On appelle *droite isotrope* toute droite passant par l'un des points cycliques ou, ce qui revient au même, ayant, en axes rectangulaires, un coefficient angulaire égal à $+i$ ou à $-i$.

*Par tout point* P *du plan passent deux droites isotropes.* Ces deux droites sont imaginaires conjuguées, si P est réel. Si $\alpha$ et $\beta$ sont les coordonnées de P, elles ont pour équations les équations (12) et *constituent le cercle de rayon nul de centre* P. Elles sont définies quadratiquement par l'équation (11). En particulier, les isotropes de l'origine sont représentées par (13) ou (14).

Les droites isotropes jouissent de propriétés fort curieuses, dont les applications en Géométrie sont innombrables.

Théorème I. — *Tout segment de droite isotrope a une longueur nulle.*

En effet, soient les deux points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ situés sur une même isotrope, ce qui se traduit, par exemple, par la condition

$$(19) \qquad y_2 - y_1 = i(x_2 - x_1).$$

On a

$$\overline{M_1M_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2(1 + i^2) = 0.$$

*Réciproquement*, si deux points $M_1$, $M_2$ sont à une distance nulle l'un de l'autre, ils sont sur une même isotrope. On pourrait le montrer par un calcul inverse du précédent. On peut aussi observer que le point $M_2$ se trouve sur le cercle de rayon nul de centre $M_1$ et, par conséquent, sur une des isotropes qui passent par $M_1$.

Pour rappeler cette propriété, les droites isotropes sont appelées quelquefois *droites de longueur nulle*.

Théorème II. — *Toute droite isotrope fait avec elle-même un angle indéterminé.*

Appliquons en effet la formule (25) du n° 68, en y faisant $m = m' = i$. Il vient

$$\operatorname{tang} V = \frac{0}{1 + i^2} = \frac{0}{0},$$

ce qui est bien une expression indéterminée (t. I, n° 126).

*Réciproquement, si une droite fait avec elle-même un angle non nul, c'est une droite isotrope.*

En effet, si tang V ne s'annule pas pour $m = m'$, il faut qu'on ait $1 + mm' = 0$ ou $m^2 + 1 = 0$, $m = \pm i$.

En particulier, *toute droite isotrope est perpendiculaire à elle-même et réciproquement.*

Corollaire. — *Si un angle de grandeur constante tourne autour de son sommet, ses côtés décrivent deux faisceaux homographiques, dont les rayons doubles sont les droites isotropes issues du sommet fixe.*

En effet, soit $(\widehat{O\lambda, O\lambda'}) = V =$ const. Connaissant $O\lambda$, nous en déduirons $O\lambda'$ par une rotation de l'angle V. Inversement, connaissant $O\lambda'$, nous en déduisons $O\lambda$ par une rotation de l'angle $-V$. Il y a donc bien correspondance homographique entre les deux rayons, ce qu'on peut du reste voir aussi en observant que, d'après la formule (25) du n° 68, les coefficients angulaires $m$ et $m'$ sont liés par une relation homographique.

Pour que $O\lambda$ se confonde avec $O\lambda'$, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que ce soit une droite isotrope. Les rayons doubles sont donc bien les isotropes issues de O.

*Lorsque l'angle est droit, et dans ce cas seulement, les deux faisceaux sont en involution.* Car, c'est le seul cas où la rotation de l'angle $+V$ et la rotation de l'angle $-V$ conduisent à la même droite. On peut aussi remarquer que c'est le seul cas où la relation

$$(20)\qquad (1 + mm') + (m - m')\cot V = 0$$

est involutive.

En vertu d'un théorème du n° 143, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème III. — *Pour que deux droites soient rectangulaires, il faut et il suffit qu'elles soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites isotropes issues de leur point de rencontre;* ou encore, en coupant par la droite de l'infini : *Pour que deux points soient à l'infini dans deux directions rectangulaires, il faut et il suffit qu'ils soient conjugués harmoniques par rapport aux points cycliques.*

On peut utiliser ce théorème pour mener les perpendiculaires en coordonnées obliques. Pour avoir la perpendiculaire à $O\lambda$, il suffit de prendre la polaire d'un de ses points par rapport aux isotropes issues de O.

Théorème IV. — *L'angle d'une droite isotrope avec une droite quelconque autre qu'elle-même est constant.*

On a, en effet,

$$(21)\qquad \operatorname{tang} V = \frac{m - i}{1 + mi} = \frac{1}{i}\,\frac{im - i^2}{1 + mi} = -i\,\frac{im + 1}{1 + im} = -i = \text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème V. — *Soient $O\lambda$ et $O\lambda'$ deux droites quelconques. Si l'on désigne par $\rho$ le rapport anharmonique* $O(IJ\lambda\lambda')$, *on a*

$$(22)\qquad V = (\widehat{O\lambda, O\lambda'}) = \frac{i}{2}\log\rho.$$

En effet, on a

$$\rho = \frac{m-i}{m+i} : \frac{m'-i}{m'+i} = \frac{(m-i)(m'+i)}{(m+i)(m'-i)} = \frac{mm'+1-i(m'-m)}{mm'+1+i(m'-m)},$$

$$\rho = \frac{1 - i\dfrac{m'-m}{1+mm'}}{1+i\dfrac{m'-m}{1+mm'}} = \frac{1-i\tang V}{1+i\tang V} = \frac{\cos V - i\sin V}{\cos V + i \sin V} = \frac{e^{-iV}}{e^{+iV}} \quad (^1),$$

$$\rho = e^{-2iV}, \qquad 2iV = -\log\rho, \qquad V = \frac{i}{2}\log\rho.$$

C. Q. F. D.

La formule (22) est connue sous le nom de *formule de Laguerre*. Elle s'écrit aussi

(23) $$\rho = e^{-2iV}.$$

Si les droites $O\lambda$ et $O\lambda'$ varient de telle manière que $V$ ou $\rho$ demeurent constants, on retombe sur le corollaire du théorème II et l'on démontre du même coup sa réciproque.

Si $V = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\rho = e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1;$$

le faisceau $O(IJ\lambda\lambda')$ est harmonique. Réciproquement, si $\rho = -1$, on a

$$\cos 2V - i \sin 2V = -1;$$

d'où

$$2V = (2k+1)\pi, \qquad V = k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

On retrouve le théorème III.

**165. Équations paramétriques du cercle. Tangente.** — Nous pouvons nous fixer la position du point M sur le cercle de centre C par l'angle polaire $\varphi$ du vecteur $\overrightarrow{CM}$. Nous avons alors, en projetant sur $Ox$ et $Oy$,

(24) $$x = \alpha + R\cos\varphi, \qquad y = \beta + R\sin\varphi.$$

Telles sont les équations paramétriques du cercle.

On peut vérifier aisément sur elles *les propriétés élémentaires de la tangente au cercle*. Les paramètres directeurs de cette tangente

---

(1) Tome I, n° 109, I.

sont (n° 192) $\frac{dx}{d\varphi}$ et $\frac{dy}{d\varphi}$, c'est-à-dire $-R\sin\varphi$ et $R\cos\varphi$. On peut prendre pour cosinus directeurs

$$-\sin\varphi \quad \text{et} \quad \cos\varphi \qquad \text{ou} \qquad \cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right),$$

ce qui nous donne $\varphi+\frac{\pi}{2}$ pour angle polaire de la demi-tangente positive. On voit bien qu'elle est perpendiculaire au rayon CM. Son équation est

$$\frac{x-\alpha-R\cos\varphi}{-\sin\varphi}=\frac{y-\beta-R\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

ou

$$(25) \qquad (x-\alpha)\cos\varphi+(y-\beta)\sin\varphi-R=0.$$

On a l'équation sous la forme normale (n° 65). On vérifie que la distance du centre à la tangente est R.

Cette dernière propriété est très commode pour trouver *l'équation tangentielle* (n° 207). Il suffit d'écrire que le point $C(\alpha, \beta)$ est à une distance R de la droite

$$(26) \qquad ux+vy+w=0;$$

ce qui donne, en appliquant la formule (16) du n° 66,

$$R^2=\frac{(u\alpha+v\beta+w)^2}{u^2+v^2}$$

ou

$$(27) \qquad (u\alpha+v\beta+w)^2-R^2(u^2+v^2)=0.$$

166. Puissance d'un point par rapport a un cercle. — Soient le cercle (C) représenté par l'équation (8) et un point $P(x_0, y_0)$. Menons par ce dernier une sécante quelconque $P\lambda$ de cosinus directeurs $a, b$. Elle rencontre le cercle aux points M, M'. Je dis que le produit $p=\overline{PM}.\overline{PM'}$ demeure constant, lorsque $P\lambda$ pivote autour de P.

Pour évaluer commodément ce produit, prenons les équations paramétriques de $P\lambda$ (n° 72), en posant $\overline{PN}=\rho$. Les coordonnées de N sont $x_0+\rho a$, $y_0+\rho b$. L'équation aux $\rho$ des points d'intersec-

tion est donc

(28) $$f(x_0+\rho a,\ y_0+\rho b)=0,$$

en appelant $f(x,y)$ le premier membre de (8).

Les racines de cette équation du second degré en $\rho$ sont $\overline{\text{PM}}$ et $\overline{\text{PM}'}$. Il s'agit d'en évaluer le produit. Pour cela, il nous faut le coefficient de $\rho^2$ et le terme indépendant de $\rho$. On a immédiatement ce dernier en faisant $\rho=0$ dans le premier membre de (28); cela donne $f(x_0,y_0)$. Quant au coefficient de $\rho^2$, il provient évidemment des termes

$$(x_0+\rho a)^2+(y_0+\rho b)^2,$$

qui donnent, comme termes en $\rho^2$,

$$\rho^2a^2+\rho^2b^2=\rho^2(a^2+b^2)=\rho^2,$$

puisque $a$ et $b$ sont des cosinus directeurs. On a finalement

(29) $$p=f(x_0,y_0).$$

Cette quantité est bien indépendante des cosinus directeurs $a$, $b$, donc de la direction de la sécante P$\lambda$. On l'appelle *puissance du point* P *par rapport au cercle*. D'après la formule (29), nous pouvons énoncer la règle suivante :

Règle. — *Pour avoir la puissance d'un point par rapport à un cercle, on substitue les coordonnées du point aux coordonnées courantes dans le premier membre de l'équation du cercle, supposée écrite tout entière dans un même membre et de telle manière que le coefficient de $x^2+y^2$ soit égal à l'unité.*

167. Axe radical; centre radical. — Soient deux cercles

(30) $$C\equiv x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0,$$

(31) $$C'\equiv x^2+y^2-2\alpha' x-2\beta' y+\gamma'=0.$$

Le lieu des points qui ont même puissance par rapport à ces deux cercles a pour équation

(32) $$C-C'\equiv 2(\alpha'-\alpha)x+2(\beta'-\beta)y+\gamma-\gamma'=0.$$

C'est donc une droite. On vérifie qu'elle est perpendiculaire à la direction de paramètres directeurs $2(\alpha'-\alpha)$, $2(\beta'-\beta)$ (n° 66),

c'est-à-dire à la ligne des centres. Elle passe évidemment par les points communs aux deux cercles, car ces points annulent C et C', donc C − C'. On l'appelle *axe radical des deux cercles.*

Soit maintenant un troisième cercle : $C'' = 0$. Les axes radicaux de ces trois cercles associés deux à deux ont pour équations respectives

$$(33) \qquad C - C' = 0, \qquad C' - C'' = 0, \qquad C'' - C = 0.$$

En ajoutant membre à membre, on obtient une identité. Donc (n° 80) les trois droites sont concourantes. Leur point de concours est appelé *centre radical des trois cercles.* On aurait ses coordonnées en résolvant deux quelconques des équations (33) par rapport à $x$, $y$.

Problème. — *Exprimer que deux cercles donnés par leurs équations sont tangents.*

On peut écrire la condition élémentaire bien connue :

$$d = R \pm R',$$

où $d$ désigne la distance des centres. On peut aussi écrire que l'axe radical est tangent à l'un quelconque des cercles, en se servant de l'équation tangentielle.

168. Angle de deux cercles. — On appelle *angle de deux cercles* l'angle V des tangentes en un quelconque de leurs points de rencontre.

On peut arriver à une définition plus précise, en procédant de la manière suivante. Orientons arbitrairement les deux cercles et menons les demi-tangentes positives (n° 11) en un de leurs points de rencontre. L'angle V de ces demi-tangentes sera, par définition, *l'angle des deux cercles orientés* ou, suivant l'expression créée par Laguerre, *l'angle des deux cycles. Cet angle n'est pas orienté*, car si l'on voulait, par exemple, prendre pour côté origine la demi-tangente au cercle (C), le sens de l'angle changerait quand on remplacerait le point M par le point N (*fig.* 16). *Le cosinus de l'angle V est donc seul déterminé sans ambiguïté.*

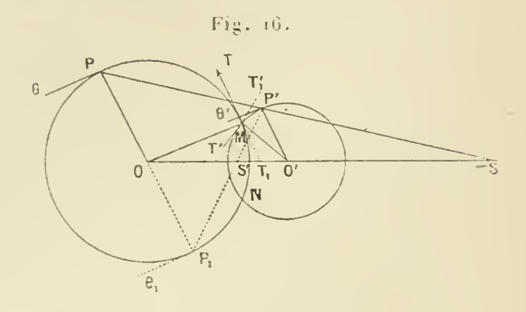
Nous allons calculer ce cosinus. Pour obtenir une formule générale, nous ferons la convention suivante. Le plan étant supposé orienté, *nous regarderons comme positif le rayon de tout cercle orienté dans le sens positif et comme négatif le rayon de tout cercle orienté dans le sens négatif* [1].

---

[1] La demi-normale positive est dirigée vers le centre du cercle, dans le premier cas; vers l'extérieur, dans le second cas.

Cela posé, appelons R et R′ les rayons algébriques des cycles (C) et (C′). Si ces rayons sont de même signe, les cycles ont même orientation, leur angle est $\widehat{TMT'}$ ou $\widehat{T_1MT'_1}$ : il est égal à $\widehat{OMO'}$.

Fig. 16.




Or, le triangle OMO′ nous donne

$$\overline{OO'}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{O'M}^2 - 2\,OM.O'M\cos\widehat{OMO'}.$$

On a donc, dans ce cas, en appelant $d$ la distance des centres,

$$(34)\qquad \cos V = \frac{R^2 + R'^2 - d^2}{2RR'}.$$

Si R et R′ sont de signes contraires, l'angle V est $\widehat{TMT'_1}$ ou $\widehat{T_1MT'}$; il est supplémentaire de $\widehat{OMO'}$, son cosinus est $-\cos\widehat{OMO'}$. Mais, comme le produit RR′ a changé de signe, on a encore *la formule* (34), *qui est donc toujours vraie, en grandeur et en signe.*

Supposons que nos deux cercles soient définis par les équations (30) et (31). Nous avons

$$R^2 + R'^2 - d^2$$
$$= \alpha^2 + \beta^2 - \gamma + \alpha'^2 + \beta'^2 - \gamma' - (\alpha - \alpha')^2 - (\beta - \beta')^2 = 2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' - \gamma - \gamma'.$$

Donc

$$(35)\qquad \cos V = \frac{2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' - \gamma - \gamma'}{2RR'}.$$

On dit que *deux cycles sont tangents, lorsque leur angle est nul.* La formule (34) donne alors

$$R^2 + R'^2 - d^2 = 2RR';$$

d'où

$$(36)\qquad d^2 = (R - R')^2, \qquad d = \pm(R - R').$$

Si les cercles ont même orientation, ils sont tangents intérieurement; sinon, ils sont tangents extérieurement.

Les deux cycles sont dits *semi-tangents*, *quand leur angle est égal à* $\pi$. On a alors

$$d = \pm(R + R') \tag{37}$$

et les conclusions inverses des précédentes.

169. Centre de similitude de deux cycles. — On sait que deux cercles sont homothétiques l'un de l'autre de deux manières différentes, ce qui donne lieu à deux centres de similitude. Lorsque les cercles sont orientés, on convient d'appeler *centre de similitude des deux cycles* celui qui correspond à une homothétie dans laquelle les demi-tangentes positives aux points homologues sont non seulement parallèles, mais aussi de même sens. C'est le centre de similitude externe S (*fig.* 16), lorsque les cycles ont même orientation; c'est le centre de similitude interne S', lorsqu'ils ont des orientations différentes. Dans tous les cas, on a la formule

$$\frac{\overline{SO}}{\overline{SO'}} = \frac{R}{R'}, \tag{38}$$

d'où l'on déduit les coordonnées de S (n° 23)

$$x = \frac{\alpha R' - \alpha' R}{R' - R}, \qquad y = \frac{\beta R' - \beta' R}{R' - R}. \tag{39}$$

170. Cercles orthogonaux. — Deux cercles sont orthogonaux, lorsque leur angle est droit. D'après (34), il faut et il suffit qu'on ait

$$d^2 = R^2 + R'^2; \tag{40}$$

ou que le rayon OM soit tangent à (C') ou que O'M soit tangent à (C); ou que la puissance de O par rapport à (C') soit $R^2$, carré du rayon de (C).

Théorème. — *Si deux cercles sont orthogonaux, tout diamètre de l'un est divisé harmoniquement par l'autre et réciproquement.*

En effet, si (C) et (C') sont orthogonaux, on a (*fig.* 17)

$$\overline{ON'}\,\overline{OP'} = R^2 = \overline{ON}^2 = \overline{OP}^2. \tag{41}$$

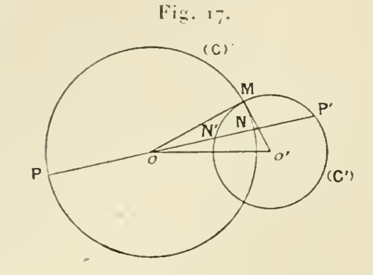
Donc (n° 129), N et P sont conjugués harmoniques par rapport à N', P'.

Réciproquement, si cela est, on a (41); d'où, etc.

*La condition d'orthogonalité des cercles* (30) *et* (31) *s'écrit*, d'après (35),

$$2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' = \gamma + \gamma'. \tag{42}$$

Fig. 17.




Théorème. — *Si les coefficients de l'équation d'un cercle variable vérifient une relation linéaire à coefficients constants, ce cercle reste orthogonal à un cercle fixe.*

Supposons que les coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ de (30) varient tout en étant liés par la condition

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d = 0. \tag{43}$$

Nous allons déterminer $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ de telle manière que la condition (42), qui est, elle aussi, linéaire en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, soit identique à (43). Nous avons

$$\frac{2\alpha'}{a} = \frac{2\beta'}{b} = -\frac{1}{c} = -\frac{\gamma'}{d};$$

d'où

$$\alpha' = -\frac{a}{2c}, \qquad \beta' = -\frac{b}{2c}, \qquad \gamma' = \frac{d}{c}.$$

L'identification est donc possible, tant que $c \neq 0$. Lorsque $c = 0$, l'équation (43) ne renferme plus que $\alpha$ et $\beta$ et montre que le centre C décrit une droite. Cette droite est alors un diamètre pour tous les cercles (C), qu'elle coupe orthogonalement. Si on la considère comme un cercle de rayon infini, le théorème est encore vrai dans ce cas particulier.

171. Faisceaux de cercles. — Étant donnés deux cercles $(C_1)$ et $(C_2)$, *les cercles* (C) *qui passent par leur intersection* ont pour équation générale

$$C_1 + \lambda C_2 = 0. \tag{44}$$

Cela se démontre en répétant le raisonnement du n° 76 et s'appuyant

sur ce que deux cercles coïncident nécessairement quand ils ont trois points communs.

Ces cercles (C) constituent ce qu'on appelle un *faisceau* de cercles ; ($C_1$) et ($C_2$) sont les *cercles de base;* leurs points de rencontre sont les *points de base*.

Pour simplifier l'étude du faisceau, prenons pour axe des $x$ la ligne des centres et pour axe des $y$ l'axe radical de ($C_1$) et de ($C_2$). Les polynomes $C_1$ et $C_2$ sont alors de la forme

$$(45)\qquad C_1 \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x + \gamma, \qquad C_2 \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x + \gamma,$$

le terme constant $\gamma$ étant le même, comme égal à la puissance commune de O par rapport à ($C_1$) et ($C_2$). L'équation (44) devient alors, en remplaçant $\lambda$ par $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$,

$$(46)\qquad (\lambda_1 + \lambda_2)(x^2 + y^2 + \gamma) - 2(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2)x = 0.$$

Si $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, elle se réduit à $x = 0$ et représente O$y$, *qui doit être regardé comme le cercle de rayon infini du faisceau.*

Si $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, l'équation (46) est de la forme

$$(47)\qquad x^2 + y^2 - 2\lambda x + \gamma = 0,$$

$\lambda$ étant arbitraire.

Sous cette forme, on voit tout de suite que l'axe radical de deux cercles quelconques du faisceau est O$y$ ; on l'appelle *l'axe radical du faisceau.*

Les points de base s'obtiennent en faisant $x = 0$ dans (47), ce qui donne

$$(48)\qquad y = \pm\sqrt{-\gamma}.$$

Ils sont réels si $\gamma < 0$, imaginaires conjugués si $\gamma > 0$, confondus si $\gamma = 0$. Dans ce dernier cas, tous les cercles du faisceau sont tangents en O à O$y$.

Le carré du rayon du cercle (47) est $\lambda^2 - \gamma$. Il est nul, pour

$$(49)\qquad \lambda = \pm\sqrt{\gamma}.$$

Le faisceau comprend donc *deux cercles de rayon nul*, dont les centres, donnés par (49), sont appelés *points limites*. Ils sont symétriques par rapport à O$y$. Ils sont réels quand les points de base sont imaginaires, imaginaires quand les points de base sont réels, confondus avec O quand les points de base sont confondus avec O.

Théorème. — *Les points limites sont conjugués* (n° 132) *par rapport à tout cercle du faisceau.*

En effet, l'équation aux abscisses des points de rencontre de $Ox$ avec le cercle (47) s'écrit

$$x^2 - 2\lambda x + \gamma = 0.$$

Les racines ont pour produit $\gamma = \overline{OL}^2 = \overline{OL'}^2$, en appelant L et L' les points limites. De là résulte le théorème énoncé, en vertu du n° 129.

172. Constructions diverses. — I. *Construction des points limites.* — Du point O, on mène une tangente OT à un cercle quelconque du faisceau et on la rabat en OL et OL', sur la ligne des centres, de part et d'autre du point O.

II. *Cercle du faisceau passant par un point donné* M. — Cette construction, ainsi que les deux suivantes sont évidentes quand les points de base sont réels. Occupons-nous donc seulement du cas contraire.

Menons par M un cercle quelconque (C') qui coupe ($C_1$) en deux points réels P et Q. La droite PQ, axe radical de (C') et de ($C_1$), rencontre l'axe radical du faisceau en un point S, par où passe l'axe radical de (C') et du cercle cherché (C), puisque les trois axes radicaux doivent concourir. Joignant SM, nous avons cet axe radical; il rencontre (C') en un deuxième point M', par où doit passer aussi le cercle cherché. La perpendiculaire au milieu de MM' rencontre la ligne des centres du faisceau au centre de (C).

III. *Cercle du faisceau ayant un centre* C *donné.* — Le rayon R de ce cercle est donné par $R^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OL}^2$. Sa construction est évidente.

IV. *Cercle du faisceau ayant un rayon donné.* — Son centre est donné par $\overline{OC}^2 = R^2 + \overline{OL}^2$. Sa construction est évidente.

173. Faisceaux orthogonaux. — Les faisceaux de cercles se présentent dans le problème suivant : *Trouver les cercles orthogonaux à deux cercles donnés.*

Cherchons, par exemple, les cercles orthogonaux aux cercles ($C_1$) et ($C_2$) précédents. Soit

$$x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0$$

l'équation d'un tel cercle (Γ). On doit avoir (n° 170)

$$2\alpha_1 \alpha' = \gamma + \gamma', \qquad 2\alpha_2 \alpha' = \gamma + \gamma'.$$

Retranchant membre à membre, il vient $\alpha' = 0$, puis $\gamma' = -\gamma$. Par conséquent, les cercles cherchés ont pour équation générale

$$(50) \qquad x^2 + y^2 - 2\mu y - \gamma = 0,$$

$\mu$ étant arbitraire. *Ils forment un faisceau*, dont la ligne des centres est $Oy$ et l'axe radical $Ox$. *Les points de base sont les points limites du faisceau précédent et les points limites sont les points de base de ce même faisceau.*

Si l'on écrit la condition d'orthogonalité des cercles (47) et (50), on obtient une identité. Donc, *tout cercle du premier faisceau est orthogonal à tout cercle du second.* Pour cette raison, on dit que *les deux faisceaux sont orthogonaux.*

174. Réseaux de cercles. — Soient trois cercles $(C_1)$, $(C_2)$, $(C_3)$ n'appartenant pas à un même faisceau.

Les cercles $(C)$ définis par l'équation

$$(51) \qquad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0$$

constituent un *réseau de cercles*, dont $(C_1)$, $(C_2)$, $(C_3)$ sont les cercles de base.

Prenons pour origine le centre radical de ceux-ci [1]. En répétant un calcul analogue à celui du n° 171, on trouve que l'équation (51) prend la forme [2]

$$(52) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

$\alpha$, $\beta$ étant arbitraires et $\gamma$ une constante égale à la puissance commune de O par rapport aux trois cercles de base.

On voit que l'axe radical de deux cercles quelconques du réseau passe par O, qui est appelé *centre radical du réseau.* On voit également que tout cercle du réseau est orthogonal au cercle $\Gamma$ de centre O et de rayon $\sqrt{\gamma}$ et réciproquement. Ce cercle $\Gamma$ est appelé *cercle orthotomique* du réseau ou des cercles $(C_1)$, $(C_2)$, $(C_3)$.

175. Cercles isogonaux. — Soient deux cycles $(C_1)$ et $(C_2)$ définis par les

---

(1) Ceci est en défaut, si les axes radicaux des cercles de base sont parallèles. On voit alors aisément que le réseau se compose de tous les cercles qui ont leurs centres sur une droite donnée.

(2) On élimine ainsi les cercles de rayon infini constitués par les droites passant par O.

équations ([1])

$$(53) \qquad x^2+y^2-2\alpha_1 x+a=0, \qquad x^2+y^2-2\alpha_2 x+a=0$$

et par les rayons algébriques $R_1$, $R_2$.

Un cercle (C) est dit *isogonal* à ces deux cycles, s'il les coupe sous le même angle. Peu importe d'ailleurs son orientation, car le changement de celle-ci ne fait qu'ajouter $\pi$ aux deux angles de (C) avec ($C_1$) et ($C_2$) et, par conséquent, les laisse égaux s'ils l'étaient primitivement.

Si R désigne le rayon de (C), on a, d'après (35), la condition

$$\frac{2\alpha\alpha_1-\gamma-a}{2RR_1}=\frac{2\alpha\alpha_2-\gamma-a}{2RR_2}$$

ou

$$2\alpha(\alpha_1 R_2-R_1\alpha_2)=(\gamma+a)(R_2-R_1).$$

Si l'on appelle $\xi$ l'abscisse du centre de similitude S des deux cycles proposés (n° 169), cette condition s'écrit, d'après (39),

$$2\alpha\xi=\gamma+a.$$

Mais, ceci est la condition d'orthogonalité du cercle (C) et du cercle (Γ), défini par l'équation

$$(54) \qquad x^2+y^2-2\xi x+a=0.$$

*Ce cercle* (Γ) *a pour centre* S *et appartient au faisceau* ($C_1$, $C_2$). Nous l'appellerons le *cercle d'isogonalité* des deux cycles donnés. Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Pour qu'un cercle soit isogonal aux cycles* ($C_1$), ($C_2$), *il faut et il suffit qu'il soit orthogonal à leur cercle d'isogonalité.*

176. Soient maintenant trois cycles ($C_1$), ($C_2$), ($C_3$). Appelons ($\Gamma_1$), ($\Gamma_2$), ($\Gamma_3$) les cercles d'isogonalité de ($C_2$), ($C_3$), de ($C_3$), ($C_1$) et de ($C_1$), ($C_2$).

Tout cercle (C) isogonal à ($C_2$), ($C_3$) et à ($C_1$), ($C_3$) est isogonal à ($C_1$), ($C_2$). Donc, tout cercle orthogonal à ($\Gamma_1$) et à ($\Gamma_2$) est orthogonal à ($\Gamma_3$). Il s'ensuit (n° 173), que ($\Gamma_1$), ($\Gamma_2$), ($\Gamma_3$) appartiennent à un même faisceau ($\varphi$). Les centres $S_1$, $S_2$, $S_3$ de ces cercles sont donc sur une même droite, qui est l'*axe de similitude des trois cycles.*

*Les cercles* (C) *isogonaux à la fois à* ($C_1$), ($C_2$), ($C_3$) *constituent*, d'après ce qui précède, *le faisceau* ($f$) *orthogonal à* ($\varphi$) (n° 173). Ce faisceau admet l'axe de similitude pour axe radical.

Si, au lieu de cycles, on donne simplement des cercles, on peut, en les orientant de toutes les manières possibles, obtenir différents faisceaux de

([1]) On prend donc pour axe des $x$ la ligne des centres et pour axe des $y$ l'axe radical des deux cercles.

cercles isogonaux. On peut toujours supposer le rayon $R_1$ de $(C_1)$ positif, grâce à un choix convenable de l'orientation du plan. On a alors, pour les deux autres rayons, les quatre combinaisons de signes :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_2$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $R_3$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |

A chacune d'elles correspondent un faisceau $(f)$ et, par conséquent, un axe de similitude.

On peut observer, d'autre part, que le cercle orthogonal aux trois cercles donnés (1) (n° 174) fait partie à la fois des quatre faisceaux, car l'orthogonalité de deux cercles est indépendante de leur orientation.

En résumé, on voit qu'*il existe quatre faisceaux de cercles isogonaux à trois cercles donnés; ils sont déterminés par le cercle orthogonal, d'une part et les quatre axes de similitude, d'autre part.*

---

(1) Lorsque les trois cercles donnés appartiennent à un même faisceau (F), ce faisceau coïncide avec le faisceau $(\varphi)$ du texte; donc, $(f)$ coïncide avec le faisceau orthogonal à $(\Gamma)$. Les quatre faisceaux de cercles isogonaux se confondent avec le faisceau des cercles orthogonaux.

# CHAPITRE XII.

## LA SPHÈRE.

177. Distance de deux points. — Soient deux points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$, que nous supposons rapportés à trois axes rectangulaires. Soient $d$ leur distance et $a$, $b$, $c$ les cosinus directeurs du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$. On a

$$x_2 - x_1 = d.a, \qquad y_2 - y_1 = d.b, \qquad z_2 - z_1 = d.c.$$

Elevons au carré et ajoutons; il vient, en tenant compte de la formule (16) du n° 24,

$$(1) \qquad d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Telle est la formule qui donne, *en axes rectangulaires*, le carré de la distance de deux points quelconques de l'espace.

En axes obliques, nous commençons par calculer le carré de la distance de l'origine au point $M(x, y, z)$. Partant de l'égalité géométrique

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z},$$

faisons le carré scalaire :

$$(2) \qquad \overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu,$$

où $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sont les angles des axes, à savoir $\widehat{yOz}$, $\widehat{zOx}$, $\widehat{xOy}$.

Si l'on pose

$$(3) \qquad \psi(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu,$$

on a, comme au n° 161,

$$(4) \qquad \overline{M_1M_2}^2 = \psi(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

178. Equation de la sphère. — En coordonnées rectangulaires, l'équation de la sphère (S), de centre $C(\alpha, \beta, \gamma)$ et de rayon $R$,

s'écrit, d'après ce qui précède,

(5) $$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2=0.$$

En coordonnées obliques, l'équation est

(6) $$\psi(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)-R^2=0.$$

Développons l'équation (5) : nous obtenons

(7) $$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\delta=0,$$

en posant
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-R^2=\delta.$$

Réciproquement, toute équation de la forme (7) représente une sphère de centre $(\alpha, \beta, \gamma)$ et dont le rayon est donné par

(8) $$R^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta.$$

Ce rayon peut d'ailleurs être réel, imaginaire pur ou nul. Dans ce dernier cas, la sphère est dite *évanouissante* ou *de rayon nul*. Elle n'a qu'un seul point réel, qui est son centre C; elle dégénère, comme nous le verrons un peu plus loin (nº 180), en un cône imaginaire de sommet C.

179. Cercle imaginaire de l'infini. — Coupons la sphère (7) par le plan de l'infini. En passant par l'intermédiaire des coordonnées homogènes, on voit que la section est la même que celle du cône imaginaire du second degré défini par l'équation (nº 375)

(9) $$x^2+y^2+z^2=0.$$

Comme cette équation est indépendante des coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, on voit que *toutes les sphères de l'espace ont mêmes points à l'infini*.

Ces points, tous imaginaires, doivent être regardés comme constituant un cercle, puisqu'ils sont obtenus comme intersection d'une sphère avec un plan, à savoir le plan de l'infini. Ce cercle est appelé *le cercle imaginaire de l'infini* ou encore *l'ombilicale*. Nous le désignerons, dans les numéros suivants, par la lettre $(\Gamma)$.

Théorème. — *Pour qu'une surface du second degré soit une*

*sphère, il faut et il suffit qu'elle passe par le cercle imaginaire de l'infini.*

Même démonstration qu'au n° 163.

Corollaire. — *Pour qu'une équation du second degré, en coordonnées obliques, représente un cercle, il faut et il suffit que l'ensemble de ses termes du second degré soit proportionnel à* $\psi(x, y, z)$.

180. Cônes, droites, plans isotropes. — On appelle *cône isotrope* tout cône ayant pour base le cercle imaginaire de l'infini. C'est ainsi que le cône (9) est le cône isotrope de sommet O. *C'est aussi une sphère de rayon nul*, de centre O.

On appelle *droite isotrope* toute droite qui rencontre le cercle imaginaire de l'infini, ou, ce qui revient au même, dont les paramètres directeurs vérifient l'équation (9). Les droites isotropes, ainsi définies, qui appartiennent à un plan donné (P) ne sont autres que les isotropes de ce plan définies au n° 164. En effet, ce sont les droites qui, situées dans (P), passent par l'un ou l'autre des *deux points de rencontre de* (P) *avec le cercle de l'infini*. Or, ces points *ne sont autres que les points cycliques de* (P), car tout cercle tracé dans (P), se trouvant sur une sphère, coupe le plan de l'infini en deux points appartenant nécessairement à (Γ).

Les droites isotropes de l'espace jouissent, d'après cela, des diverses propriétés établies au n° 164. En particulier, ce sont des *droites de longueur nulle* (¹).

Théorème I. — *Pour que deux droites* (D) *et* (D′) *de l'espace soient rectangulaires, il faut et il suffit qu'elles percent le plan de l'infini en deux points conjugués* (n° 432) *par rapport au cercle imaginaire de l'infini.*

En effet, menons les droites parallèles à (D) et (D′) par un même point O,

---

(¹) Dans le plan, ce sont les seules courbes de longueur nulle. Dans l'espace, il n'en va plus de même. *Toute courbe gauche dont les tangentes sont isotropes est une courbe de longueur nulle.* En effet, la longueur d'un arc quelconque d'une telle courbe est donnée par (t. I, n° 172)

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

Or, si les tangentes sont isotropes (et dans ce cas seulement), on a $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$; d'où $s = 0$.

soient $O\lambda$ et $O\lambda'$. Pour que ces deux droites soient rectangulaires, il faut et il suffit que leurs points à l'infini M et M', qui sont aussi les points à l'infini de (D) et (D'), soient conjugués harmoniques par rapport aux points cycliques I et J du plan $\lambda O \lambda'$ (n° 164). Comme ces points ne sont autres que les points de rencontre de la droite MM' avec (Γ), le théorème est démontré.

THÉORÈME II. — *Une droite et un plan perpendiculaires ont pour traces sur le plan de l'infini un point et une droite qui sont pôle et polaire par rapport à l'ombilicale.*

En effet, supposons que $O\lambda$ reste fixe et que $O\lambda'$ décrive, autour de O, un plan (P) perpendiculaire à $O\lambda$. Le point M reste fixe; M' se déplace dans le plan de l'infini, en restant conjugué de M par rapport à (Γ) et décrit, par conséquent, la polaire de M par rapport à ce cercle (n° 432). Comme le lieu de M' n'est autre que la droite de l'infini du plan (P), le théorème est démontré.

181. On appelle *plan isotrope* tout plan tangent au cercle de l'infini.

Pour qu'un plan soit isotrope, *il faut et il suffit qu'il soit parallèle à ses perpendiculaires*. Car, pour que sa droite de l'infini soit tangente à (Γ), il faut et il suffit qu'elle contienne son propre pôle (n° 433).

De cette simple remarque résulte que la condition pour que le plan

$$ux + vy + wz + h = 0 \tag{10}$$

soit isotrope est, en coordonnées rectangulaires,

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0. \tag{11}$$

Cette équation exprime, en effet, que le plan (10) est parallèle à la droite de paramètres directeurs $(u, v, w)$, qui est, comme on sait, perpendiculaire audit plan.

L'équation (11) est *l'équation tangentielle du cercle de l'infini.*

THÉORÈME III. — *Pour que deux plans soient perpendiculaires, il faut et il suffit que leurs traces sur le plan de l'infini soient conjuguées par rapport au cercle de l'infini* (n° 443) *ou encore qu'ils soient conjugués harmoniques par rapport aux deux plans isotropes issus de leur intersection.*

En effet, pour que deux plans (P) et (P') soient perpendiculaires, il faut et il suffit que l'un d'eux, (P), par exemple, soit parallèle aux droites perpendiculaires à l'autre. Ceci revient à dire que la droite de l'infini (D) de (P) doit passer par le pôle de la droite de l'infini (D') de (P') par rapport à (Γ). Or, c'est la condition de conjugaison de ces deux droites (n° 443). Ceci veut dire aussi que (D) et (D') doivent être conjuguées harmoniques par rapport aux

tangentes à (Γ) issues de leur point de rencontre (n° 443) et, par conséquent, que (P) et (P′) doivent être conjugués harmoniques par rapport aux plans isotropes issus de leur intersection, puisque ces plans contiennent évidemment les tangentes précédentes.

*Remarque.* — Les points cycliques d'un plan isotrope sont confondus. Tout cercle d'un tel plan est donc une conique du genre parabole (n° 460).

**182. Équations paramétriques de la sphère. Plan tangent.** — Nous pouvons fixer la position d'un point M sur la sphère (S) de centre C par les angles polaires (n° 30) $\theta$, $\varphi$ du vecteur $\overrightarrow{CM}$. Nous avons alors, en projetant sur les axes,

$$(12)\quad x = \alpha + R\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = \beta + R\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = \gamma + R\cos\theta,$$

équations paramétriques de la sphère.

Le plan tangent au point $M(x, y, z)$ de la sphère (7) a pour équation (n° 204)

$$(13)\qquad (X - x)(x - \alpha) + (Y - y)(y - \beta) + (Z - z)(z - \gamma) = 0.$$

Les coefficients de X, Y, Z étant les projections du vecteur $\overrightarrow{CM}$ sur les axes, on vérifie que ce plan est perpendiculaire au rayon CM.

Si l'on remplace, dans (13), $x$, $y$, $z$ par (12), on obtient

$$(14)\quad (X - \alpha)\sin\theta\cos\varphi + (Y - \beta)\sin\theta\sin\varphi + (Z - \gamma)\cos\theta - R = 0,$$

équation canonique du plan tangent.

*L'équation tangentielle de la sphère* s'obtient en écrivant que la distance du centre à un plan quelconque est égale au rayon, ce qui donne (n° 84)

$$(15)\qquad (u\alpha + v\beta + w\gamma + r)^2 - R^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

**183. Puissance.** — La puissance d'un point par rapport à une sphère se calcule en répétant le raisonnement du n° 166; elle est soumise à la même règle que la puissance d'un point par rapport à un cercle.

*Le plan radical* des deux sphères $S = 0$, $S' = 0$ a pour équation

$$S - S' = 0.$$

Les plans radicaux des trois sphères (S), (S′), (S″) associées deux

à deux ont pour équations

$$S - S' = 0, \qquad S' - S'' = 0, \qquad S'' - S = 0.$$

Ils passent par une même droite, comme on le voit en ajoutant leurs équations (n° 90). Cette droite est l'*axe radical* des trois sphères.

Les six plans radicaux de quatre sphères ont un point commun, appelé *centre radical*. Par ce point passent aussi les quatre axes radicaux des sphères associées trois à trois.

**184. Angle de deux sphères.** — C'est l'angle des plans tangents en un de leurs points de rencontre.

*On peut orienter une sphère* de deux manières différentes, suivant la manière d'orienter chaque plan tangent ou, ce qui revient au même, la normale à ce plan (n° 27). Si la demi-normale positive est dirigée vers le centre de la sphère, nous conviendrons de regarder le rayon comme positif. Sinon, le rayon sera négatif.

Deux sphères étant ainsi orientées, leur angle est égal à l'angle des demi-normales positives en un de leurs points communs.

Il est donné par la formule (*cf.* n° 168)

$$\text{(16)} \qquad \cos V = \frac{R^2 + R'^2 - d^2}{2RR'}$$

ou

$$\text{(17)} \qquad \cos V = \frac{2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' + 2\gamma\gamma' - \delta - \delta'}{2RR'}.$$

Les deux sphères sont *tangentes* ou *semi-tangentes*, suivant que l'angle V est nul ou égal à $\pi$. Suivant le cas, on a

$$d = \pm(R - R') \qquad \text{ou} \qquad d = \pm(R + R').$$

Le *centre de similitude* de deux sphères orientées se définit et se détermine comme celui de deux cercles orientés (n° 169).

**185. Sphères orthogonales.** — Deux sphères sont orthogonales lorsque leur angle est droit. La condition d'orthogonalité prend les différentes formes énoncées, au n° 170, pour l'orthogonalité de deux cercles [1]. En fonction des coefficients des équations, elle s'écrit

$$\text{(18)} \qquad 2(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = \delta + \delta',$$

---

[1] Le cône circonscrit à chaque sphère le long du cercle d'intersection a pour sommet le centre de l'autre sphère.

ce qui donne lieu à un théorème analogue à celui du n° 170.

186. Faisceaux et réseaux de sphères. — Étant données deux sphères $(S_1)$ et $(S_2)$, toutes les sphères qui passent par leur intersection sont définies par l'équation

$$S_1 + \lambda S_2 = 0. \tag{19}$$

Elles forment *un faisceau*, dont $(S_1)$ et $(S_2)$ sont les *sphères de base*, leur cercle d'intersection étant le *cercle de base*.

Si l'on prend pour axe des $z$ la ligne des centres de $(S_1)$ et de $(S_2)$ et pour plan des $xy$ leur plan radical, l'équation (19) prend la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\gamma z + \delta = 0, \tag{20}$$

où $\gamma$ est un paramètre arbitraire et $\delta$ une constante.

Si l'on y fait $z = 0$, on obtient l'équation du cercle de base dans son plan $xOy$ :

$$x^2 + y^2 + \delta = 0. \tag{21}$$

Ce cercle est réel, imaginaire ou évanouissant, suivant que $\delta$ est $< 0$, $> 0$ ou $= 0$. Dans ce dernier cas, toutes les sphères du faisceau sont tangentes en O à $xOy$ (n° 206).

Le faisceau comprend deux sphères de rayon nul, dont les centres, appelés *points limites*, ont pour cotes $\pm\sqrt{\delta}$ et jouissent des mêmes propriétés que les points limites d'un faisceau de cercles (n° 171).

187. Étant données trois sphères $(S_1)$, $(S_2)$, $(S_3)$ n'appartenant pas à un même faisceau, les sphères qui passent par leur intersection ont pour équation générale

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 = 0. \tag{22}$$

Ces sphères forment un *réseau*, dont $(S_1)$, $(S_2)$, $(S_3)$ sont les *sphères de base*, leurs deux points communs étant les *points de base*.

Prenons pour axe des $z$ l'axe radical de ces dernières [1] et pour plan des $xy$ le plan de leurs centres. Un calcul analogue à celui du n° 174 montre que

---

[1] Ceci n'est pas possible, lorsque cet axe radical est rejeté à l'infini, ce qui arrive quand les centres $C_1$, $C_2$, $C_3$ sont sur une même droite $\Delta$. Le lecteur constatera, sans difficulté, que, dans ce cas, le réseau comprend toutes les sphères ayant leur centre sur $\Delta$.

l'équation (22) prend la forme

$$(23)\qquad x^2+y^2+z^2-2\lambda x-2\mu y+\delta=0,$$

$\lambda$ et $\mu$ étant arbitraires.

Deux sphères quelconques du réseau ont un plan radical passant par $Oz$. Trois sphères quelconques du réseau ont pour axe radical $Oz$, qui, pour cette raison, est appelé *l'axe radical du réseau*. Les points de base A et B sont les points de $Oz$ ayant pour cotes $\pm\sqrt{-\delta}$. Ils sont réels, imaginaires conjugués ou confondus, suivant que $\delta$ est $<0$, $>0$ ou $=0$. Dans ce dernier cas, les sphères du réseau sont toutes tangentes en O à $Oz$.

La sphère (23) a un rayon nul si l'on a

$$(24)\qquad \lambda^2+\mu^2=\delta.$$

Il y a donc, dans le réseau, *une infinité de sphères de rayon nul;* le lieu de leurs centres est le cercle du plan des $xy$ qui a pour centre O et pour rayon $\sqrt{\delta}$. On l'appelle le *cercle limite* du réseau. Il peut être regardé comme l'intersection des deux sphères de rayon nul qui ont pour centres les points de base, ainsi que le vérifiera aisément le lecteur.

188. Soient les deux sphères $(S_1)$, $(S_2)$ définies par les équations

$$(25)\qquad x^2+y^2+z^2-2\gamma_1 z+a=0,\qquad x^2+y^2+z^2-2\gamma_2 z+a=0.$$

Cherchons toutes les sphères $(\Sigma)$ qui leur sont orthogonales. Une telle sphère étant représentée par l'équation (7), on doit avoir

$$2\gamma\gamma_1=a+\delta,\qquad 2\gamma\gamma_2=a+\delta;$$

d'où

$$(26)\qquad \gamma=0,\qquad \delta=-a.$$

Telles sont les uniques conditions. L'équation générale de nos sphères $(\Sigma)$ est donc

$$(27)\qquad x^2+y^2+z^2-2\lambda x-2\mu y-a=0,$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont arbitraires.

Elles forment un réseau. *Toute sphère de ce réseau est orthogonale à toute sphère du faisceau*

$$(28)\qquad x^2+y^2+z^2-2\nu z+a=0.$$

dont $(S_1)$ et $(S_2)$ sont les sphères de base. *Le réseau et le faisceau sont dits orthogonaux.*

Les points de base du réseau sont les points limites du faisceau. Le cercle de base du faisceau est le cercle limite du réseau. Il est orthogonal à toutes les sphères du réseau.

Si l'on cherchait les sphères orthogonales à trois sphères n'appartenant pas

à un même faisceau, on trouverait, par un calcul analogue au précédent, les sphères d'un faisceau orthogonal au réseau défini par les sphères proposées.

**189. Le cercle dans l'espace.** — Un cercle dans l'espace est défini par les équations d'une sphère et d'un plan ou bien de deux sphères. Dans ce dernier cas, le plan du cercle est d'ailleurs le plan radical des deux sphères.

Un cercle (C) étant défini comme l'intersection d'un plan (P) avec une sphère (S) de centre I et de rayon R, le centre I' de ce cercle est la projection de I sur (P) et son rayon est $\sqrt{R^2 - \overline{II'}^2}$.

On appelle *axe du cercle* la perpendiculaire II' à son plan menée par son centre.

On peut écrire les équations paramétriques d'un cercle (C) défini par son centre, son plan et son rayon. Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les coordonnées du centre C. Soit R le rayon. Soient enfin $(a, b, c)$ et $(a', b', c')$ les cosinus directeurs de deux demi-droites rectangulaires $C\lambda$ et $C\mu$ situées dans le plan du cercle. Fixons la position d'un point quelconque M de (C) par l'angle $(\widehat{C\lambda, CM}) = \varphi$, le plan $\lambda C \mu$ étant d'ailleurs orienté de $C\lambda$ vers $C\mu$. Si nous projetons M en P sur $C\lambda$ et en Q sur $C\mu$, nous avons

$$\overline{CP} = R\cos\varphi, \qquad \overline{CQ} = R\sin\varphi. \tag{29}$$

D'autre part,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}.$$

Projetant cette égalité géométrique sur les axes de coordonnées, nous avons les coordonnées de M en fonction de $\varphi$ :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \alpha + Ra\cos\varphi + Ra'\sin\varphi, \\ y &= \beta + Rb\cos\varphi + Rb'\sin\varphi, \\ z &= \gamma + Rc\cos\varphi + Rc'\sin\varphi. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

**190. Le cercle sur la sphère.** — Soit la sphère (S), d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \tag{31}$$

Tout cercle (C) tracé sur cette sphère peut être défini par l'équation (31) et par celle d'une sphère quelconque. Pour cette dernière, on peut prendre le plan (II) du cercle ou bien la sphère ($\Sigma$) orthogo-

nale à (S) le long de (C), soit (¹)

$$(32) \qquad x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+R^2=0.$$

Le plan (Π), ou plan radical de (S) et (Σ), a pour équation

$$(33) \qquad \alpha x+\beta y+\gamma z-R^2=0.$$

C'est le plan polaire (n° 432) du centre P de (Σ) par rapport à (S); propriété du reste évidente, si l'on se rappelle que le cône circonscrit à (S) le long de (C) a pour sommet P (n° 435).

Soient deux cercles (C) et (C′) tracés sur (S). Ils se coupent en deux points (réels ou imaginaires), intersection de (S) avec la droite d'intersection de leurs plans (Π) et (Π′). Soit M l'un de ces points, supposé réel. Soient enfin P et P′ les centres des sphères (Σ) et (Σ′) orthogonales à (S) suivant (C) et suivant (C′). Menons les tangentes MT, MT′. Joignons, d'autre part, MP et MP′. Ces quatre droites sont dans le plan tangent en M à (S). De plus, MP est perpendiculaire à MT et MP′ perpendiculaire à MT′. Il s'ensuit que l'angle $\widehat{TMT'}$ est égal à l'angle $\widehat{PMP'}$ ou en est supplémentaire. Il en résulte que *l'angle des deux cercles* (C) et (C′) *égale l'angle des deux sphères* (Σ) *et* (Σ′).

La condition d'orthogonalité s'écrit, d'après la formule (18),

$$(34) \qquad \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'-R^2=0.$$

C'est aussi la condition pour que les deux points P et P′ soient conjugués par rapport à la sphère (S) (n° 432). On sait d'ailleurs (n° 443) que deux points sont conjugués en même temps que leurs plans polaires. Donc :

Théorème. — *Pour que deux cercles tracés sur une sphère soient orthogonaux, il faut et il suffit que leurs plans soient conjugués par rapport à cette sphère.*

Cela est, du reste, évident géométriquement. Car, si les cercles (C) et (C′) sont orthogonaux, la tangente MT, par exemple, passe par P′. Ce dernier point, pôle de (Π′), se trouve donc dans (Π) et les deux plans sont conjugués.

Réciproquement, si P′ se trouve dans (Π), la droite MP′, qui est tangente à (S), coïncide nécessairement avec MT; l'angle $\widehat{PMP'}$ est droit, les cercles sont orthogonaux.

**191.** Si le plan (Π) tourne autour d'une droite fixe (Δ), le cercle (C) passe

(¹) Le terme constant est $R^2$, puissance de O par rapport à (Σ).

par deux points fixes A et B, intersection de $(\Delta)$ avec $(S)$. Il engendre, sur la sphère, *un faisceau*, dont A et B sont *les points de base* et $(\Delta)$ *l'axe radical*. Il y a, dans ce faisceau, deux cercles de rayon nul, dont les centres A', B' sont les points de contact des plans tangents à $(S)$ menés par $(\Delta)$ et sont appelés *points limites* du faisceau. Ils sont réels, quand les points de base sont imaginaires et *vice versa*. Ils peuvent être considérés comme l'intersection de $(S)$ avec la droite $(\Delta')$ conjuguée de $(\Delta)$.

Si un cercle $(C')$ est orthogonal à deux cercles donnés $(C_1)$ et $(C_2)$, son plan passe par les pôles $P_1$ et $P_2$ des plans $(\Pi_1)$ et $(\Pi_2)$ de ces cercles et réciproquement. *Les cercles orthogonaux à deux cercles donnés sont donc les cercles du faisceau qui a pour axe radical la droite conjuguée* (n° 436) *de la droite d'intersection des plans de ces deux cercles.*

Tout cercle $(C)$ du faisceau $(f)$ défini par $(C_1)$ et $(C_2)$ est alors orthogonal à tout cercle $(C')$ du faisceau $(f')$ précédent, car les plans de ces deux cercles sont conjugués, comme passant par deux droites conjuguées. *Les deux faisceaux sont dits* orthogonaux. *Les points de base de chacun d'eux sont les points limites de l'autre.*

Dans le *cas particulier où* $(\Delta)$ *est tangente à* $(S)$, les points de base A et B de $(f)$ sont confondus; les cercles $(C)$ sont tous tangents en A à $(\Delta)$. La droite $(\Delta')$ est aussi tangente à $(S)$ en A et d'ailleurs perpendiculaire à $(\Delta)$. Les cercles $(C')$ sont tangents en A à $(\Delta')$.

Le lecteur n'est pas sans remarquer l'analogie de ces propriétés avec celles qui ont été établies, au Chapitre précédent, à propos des faisceaux de cercles dans un plan. On peut d'ailleurs ramener les deux théories l'une à l'autre, en faisant une inversion ayant son pôle sur $(S)$.

## CHAPITRE XIII.

### TANGENTES ET PLANS TANGENTS.

---

**192. Tangente a une courbe définie paramétriquement.** — Soit une courbe quelconque (C) de l'espace, dont les coordonnées du point courant sont supposées exprimées en fonction d'un paramètre quelconque $t$. Soient $M(x, y, z)$ le point de paramètre $t$ et $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ le point de paramètre $t+\Delta t$. La droite $MM'$ a pour paramètres directeurs $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, ou, si l'on veut, $\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}$. Supposons que $\Delta t$ tende vers zéro et, par suite, $M'$ vers $M$ [1]. Les rapports précédents tendent vers les dérivées $x'$, $y'$, $z'$ de $x$, $y$, $z$ par rapport à $t$, *en supposant toutefois que ces dérivées existent. Si elles ne sont pas toutes trois nulles*, elles constituent les paramètres directeurs d'une direction bien déterminée, direction limite de la sécante $MM'$.

On peut donc affirmer que, moyennant les hypothèses faites sur $x'$, $y'$, $z'$, la droite $MM'$ tend vers une position limite déterminée, quand $M'$ tend vers $M$ sur la courbe [2]. Cette position limite est, par définition, *la tangente en* M *à la courbe*. *Elle a pour paramètres directeurs* $x'$, $y'$, $z'$; comme elle passe par le point M, elle est parfaitement connue.

On peut aussi prendre *pour paramètres directeurs de la tan-*

---

[1] En supposant toutefois les fonctions $x$, $y$, $z$ continues pour la valeur considérée de $t$.

[2] Lorsque les dérivées $x'$, $y'$, $z'$ n'existent pas toutes trois ou bien sont toutes nulles, on peut chercher les parties principales des infiniment petits $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, en prenant $\Delta t$ pour infiniment petit principal. En divisant par une puissance convenable de $\Delta t$, on aura, à la limite, trois quantités non toutes nulles, paramètres directeurs de la tangente. Si l'un au moins des accroissements $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ n'a pas de partie principale déterminée, il peut arriver que la tangente n'existe pas. Nous ne nous occuperons pas de ces singularités, qui se rattachent à l'Analyse plutôt qu'à la Géométrie.

*gente les différentielles* $dx$, $dy$, $dz$, qui sont proportionnelles aux dérivées $x'$, $y'$, $z'$ (t. I, n° 137). Cela est tout indiqué quand on tient à ne pas préciser le choix du paramètre $t$, comme il arrive, en particulier, dans certains problèmes, où l'on doit raisonner sur une courbe inconnue, qu'on se propose, par exemple, de déterminer (n° 348).

193. Demi-tangente positive. — Imaginons qu'on ait choisi, sur la courbe, un système d'abscisses curvilignes (n° 11). Soient $s$ et $s+\Delta s$ les abscisses curvilignes des points M et M'. Supposons $\Delta s > 0$. Les cosinus directeurs de la demi-droite qui va de M vers M' sont $\frac{\Delta x}{l}$, $\frac{\Delta y}{l}$, $\frac{\Delta z}{l}$, en appelant $l$ la longueur de la corde MM'. Or, on peut écrire, par exemple,

$$\frac{\Delta x}{l} = \frac{\Delta x}{\Delta s}\frac{\Delta s}{l}.$$

Lorsque $\Delta s$ tend vers zéro par valeurs positives, il est clair que la demi-droite MM' tend vers *la demi-tangente positive en* M (n° 11). D'autre part, $\frac{\Delta x}{\Delta s}$ tend vers $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{\Delta s}{l}$ tend vers 1 ([1]) (t. I, n° 172). Donc, $\frac{\Delta x}{l}$ a pour limite $\frac{dx}{ds}$. Un calcul analogue donne les limites de $\frac{\Delta y}{l}$ et de $\frac{\Delta z}{l}$. Il suit de là que *la demi-tangente positive en* M *à la courbe* (C) *a pour cosinus directeurs*

$$a = \frac{dx}{ds}, \qquad b = \frac{dy}{ds}, \qquad c = \frac{dz}{ds}. \tag{1}$$

194. Lorsqu'on emploie des *coordonnées homogènes ou tétraédriques*, on peut raisonner de la manière suivante. La sécante MM' est déterminée par les deux points

$$M(x, y, z, t) \quad \text{et} \quad M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t).$$

Mais on peut remplacer M' par le point $M''(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$ (n° 158), qui, lorsque M' tend vers M, a pour limite le point $P(dx, dy, dz, dt)$. *Les points* M *et* P *déterminent la tangente en* M.

---

([1]) Vers $+1$ et non vers $-1$, puisque $\Delta s$ et $l$ sont $> 0$.

195. *Un plan est dit tangent à la courbe* (C), lorsqu'il contient une de ses tangentes. L'équation générale des plans tangents en M est donc l'équation générale des plans passant par MT. On peut la mettre sous différentes formes (n° 90). Signalons la suivante :

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ désignent trois nombres arbitraires, qui sont, par exemple, les paramètres directeurs d'une droite du plan tangent non parallèle à MT.

196. Tout ce qui précède *s'applique à la Géométrie plane;* il suffit de supposer $z=0$. En particulier, *si $\alpha$ désigne l'angle polaire de la demi-tangente positive, on a*

$$(2) \qquad \frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha.$$

Si la courbe est définie par une équation de la forme

$$(3) \qquad y = f(x),$$

on peut prendre $x$ pour paramètre $t$. Les paramètres directeurs de la tangente sont alors 1 et $\frac{dy}{dx}\cdot$ *Le coefficient angulaire de la tangente est donc* $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ (*cf.* t. I, n° 60).

Dans le cas particulier où la courbe passe à l'origine, une règle assez communément employée consiste à prendre pour coefficient angulaire de la tangente la *limite du rapport* $\frac{y}{x}$ quand $x$ tend vers zéro. Cela se justifie d'après la définition même de la tangente, puisque $\frac{y}{x}$ est le coefficient angulaire de la sécante joignant le point O de la courbe au point infiniment voisin $(x, y)$.

L'équation de la tangente en M à la courbe (3) est

$$Y - y = y'(X - x).$$

Si l'on y fait $Y = 0$, on obtient, en appelant P la projection de M

sur $Ox$ et T le point de rencontre de la tangente avec cet axe,

$$\overline{PT} = X - x = -\frac{y}{y'}.$$

Cette quantité s'appelle la *sous-tangente*.

197. Tangente a une courbe plane définie par une équation implicite. — Soit la courbe plane définie par l'équation

$$(4) \qquad f(x, y) = 0.$$

Si l'on imagine $x$ et $y$ exprimés en fonction d'un certain paramètre, d'ailleurs quelconque, l'équation de la tangente au point $M(x, y)$ est, d'après le numéro précédent,

$$(5) \qquad \frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy},$$

où X et Y désignent les coordonnées courantes. Or, $x$ et $y$ vérifient identiquement l'équation (4); on a donc, en différentiant (t. I, nº 140),

$$(6) \qquad f'_x\,dx + f'_y\,dy = 0.$$

Éliminant $dx$ et $dy$ entre (5) et (6), nous avons

$$(7) \qquad (X - x)f'_x + (Y - y)f'_y = 0.$$

*Telle est l'équation de la tangente.*

Dans le cas où $f(x, y)$ est un polynome, on peut la transformer comme il suit. Le terme constant

$$-(xf'_x + yf'_y)$$

fait songer assez naturellement à l'identité d'Euler (t. I, nº 134). Si l'on désigne par $f'_t$ la *dérivée par rapport à la variable d'homogénéité* (t. I, nº 227), on a

$$(8) \qquad xf'_x + yf'_y + f'_t \equiv mf(x, y),$$

$m$ désignant le degré de $f(x, y)$. Or, pour les coordonnées du point M, $f(x, y)$ est nul; dès lors, (8) devient

$$xf'_x + yf'_y + f'_t = 0;$$

d'où

$$-(xf'_x + yf'_y) = f'_t.$$

L'équation (7) peut donc s'écrire

$$(9) \qquad X f'_x + Y f'_y + f'_t = 0.$$

Si l'on passe en coordonnées homogènes, elle devient

$$(10) \qquad X F'_x + Y F'_y + T F'_t = 0,$$

où $F(x, y, t)$ désigne le polynome $f(x, y)$ rendu homogène.

Au reste, il est aisé d'établir directement l'équation (10). Il suffit, en effet, de vérifier qu'elle est satisfaite pour les points

$$M(x, y, t) \quad \text{et} \quad P(dx, dy, dt) \qquad (\text{n}^\circ\ 194),$$

c'est-à-dire qu'on a

$$(11) \qquad x F'_x + y F'_y + t F'_t = 0$$

et

$$(12) \qquad F'_x\, dx + F'_y\, dy + F'_t\, dt = 0.$$

Or, l'équation (11) n'est autre, en vertu de l'identité d'Euler, que l'équation de la courbe, qui est vérifiée identiquement par les coordonnées de M. Quant à (12), c'est la même équation différentiée; elle est également satisfaite.

Il est à remarquer que ce raisonnement convient tout aussi bien pour des *coordonnées trilinéaires quelconques, auxquelles s'applique donc l'équation* (10).

198. Points multiples. — L'équation (10) devient illusoire quand les trois dérivées partielles $F'_x$, $F'_y$, $F'_t$ sont nulles simultanément. Ceci ne peut arriver que pour des points particuliers de courbes particulières, car les trois équations homogènes

$$(13) \qquad F'_x = 0, \qquad F'_y = 0, \qquad F'_t = 0$$

n'admettent pas, en général, d'autre solution que la solution zéro. Il existe, néanmoins, des courbes admettant de tels points, qui sont désignés sous la rubrique générale de *points singuliers*. On peut les caractériser géométriquement en étudiant l'intersection de la courbe, que nous supposerons algébrique ([1]), avec une sécante quelconque passant par M.

Déterminons cette sécante par un point quelconque $M'(x', y', t')$, autre que M. Les coordonnées d'un point quelconque P de la droite MM' sont de la

([1]) On pourrait aussi la supposer transcendante, pourvu que la formule de Taylor, écrite plus bas, lui fût applicable. Mais l'étude des points multiples n'a d'intérêt, à notre point de vue, que pour les courbes algébriques.

forme (n° 153)

$$x + \lambda x', \qquad y + \lambda y', \qquad t + \lambda t',$$

le point P venant d'ailleurs en M pour $\lambda = 0$.

L'équation aux $\lambda$ des points d'intersection de la sécante avec la courbe s'écrit

$$(14) \qquad F(x + \lambda x', y + \lambda y', t + \lambda t') = 0$$

ou, en développant par la formule de Taylor (t. I, n^os 132, 136),

$$(15) \quad F(x, y, t) + \lambda(x' F'_x + y' F'_y + t' F'_t) + \frac{\lambda^2}{2}(x' F'_x + y' F'_y + t' F'_t)^{(2)} + \ldots$$
$$+ \frac{\lambda^p}{p!}(x' F'_x + y' F'_y + t' F'_t)^{(p)} + \ldots + \lambda^m F(x', y', t') = 0.$$

Le point M se trouvant sur la courbe, $F(x, y, t)$ est nul. On vérifie que l'équation (15) admet $\lambda = 0$ pour racine. Si le point M n'est pas singulier et si le point M' n'est pas sur la tangente en M, le coefficient de $\lambda$ n'est pas nul, la racine $\lambda = 0$ est simple : on dit qu'un seul point d'intersection se confond avec le point M.

Au contraire, si M' se trouve sur la tangente en M, la racine $\lambda = 0$ est au moins double et il y a au moins deux points d'intersection confondus avec le point M. Ainsi donc, *la tangente en un point non singulier est caractérisée par la propriété de couper la courbe en au moins deux points confondus avec le point de contact* [1].

Supposons maintenant qu'on ait affaire à un point singulier. Quel que soit M', l'équation (15) admet la racine $\lambda = 0$ à un ordre de multiplicité au moins égal à 2. Il en résulte que *la propriété caractéristique d'un point singulier est que toute sécante passant par ce point coupe la courbe en au moins deux points confondus avec lui.*

Envisageant tout de suite le cas le plus général, imaginons que toutes les dérivées partielles de $F(x, y, t)$ soient nulles au point M, jusqu'à l'ordre $p$ exclusivement, auquel cas on dit que M est un *point multiple d'ordre p*. Quel que soit M', l'équation (15) admet $\lambda = 0$ comme racine multiple d'ordre $p$. Autrement dit, toute sécante issue de M coupe la courbe en $p$ points confondus avec M et $p$ seulement, du moins tant que la sécante est quelconque. Il y a au contraire au moins $p + 1$ points d'intersection confondus avec M, si le point M' vérifie l'équation

$$(16) \qquad (x' F'_x + y' F'_y + t' F'_t)^{(p)} = 0.$$

Cette équation, algébrique et de degré $p$ en $x'$, $y'$, $t'$, représente nécessai-

---

[1] Cette propriété est, du reste, assez intuitive, d'après la définition même de la tangente. Lorsque la sécante MM' tend vers la tangente MT, le point d'intersection M' vient se confondre avec le point M, qui appartenait déjà à l'intersection.

rement un faisceau de $p$ droites issues de M, car si elle est vérifiée par un point M', elle l'est aussi par tous les points de la droite MM', qui donnent, en effet, tous la même sécante.

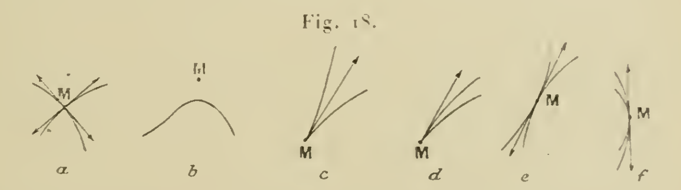
On voit donc que, parmi les sécantes issues de M, il y en a $p$ qui donnent $p+1$ points d'intersection confondus avec M. Par analogie avec le cas de $p=1$, nous dirons que ces $p$ droites sont les tangentes au point M. On démontre d'ailleurs que, dans l'hypothèse actuellement envisagée, la courbe affecte, au voisinage du point M, la forme de $p$ branches se croisant en ce point et tangentes respectivement aux $p$ droites ci-dessus déterminées (¹). Certaines de ces branches, comme d'ailleurs certaines des $p$ tangentes en M, peuvent être imaginaires. Plusieurs tangentes peuvent aussi se confondre. L'étude des diverses particularités que peut présenter une courbe au voisinage d'un point singulier est fort difficile et complètement en dehors du cadre de cet Ouvrage. Contentons-nous de résumer les résultats précédents en un énoncé qui, seul, devra rester dans la mémoire du lecteur :

*Un point* M *est multiple d'ordre* $p$ *lorsque toute sécante issue de ce point coupe la courbe en* $p$ *points confondus avec lui et* $p$ *seulement. Il y a* $p$ *droites qui coupent en au moins* $p+1$ *points confondus avec* M : *ce sont les* $p$ *tangentes en* M.

*Analytiquement, un tel point est caractérisé par le fait que les dérivées partielles du premier membre de l'équation homogène de la courbe doivent s'y annuler jusqu'à l'ordre* $p$ *exclusivement.*

Lorsque $p=2$, on dit aussi qu'on a un *point double*. Les deux tangentes en ce point peuvent alors être réelles et distinctes, imaginaires ou confondues. Dans le premier cas, deux branches réelles se croisent

Fig. 18.




en M (*fig.* 18, *a*). Le point est appelé *point nodal*. Dans le second

(¹) On peut observer que si M' se déplace sur l'une de ces branches, en se rapprochant indéfiniment du point M, la sécante MM', qui, primitivement, coupait la courbe en $p$ points confondus avec M et en un point confondu avec M', la coupera, à la limite, en $p+1$ points confondus avec M et sera devenue, par conséquent, une des $p$ droites que nous avons appelées *tangentes* au point M.

cas, les branches qui se croisent en M sont imaginaires; à part le point M, la courbe ne possède aucun point réel au voisinage de ce point, qui est appelé, pour cette raison, *point double isolé* (*fig.* 18, *b*). Dans le troisième cas, deux branches arrivent en M, tangentiellement à une même droite. Ordinairement, la courbe affecte la disposition (*c*); le point M est dit *point de rebroussement*. Mais on peut aussi avoir l'une des dispositions (*d*), (*e*), (*f*). Il peut arriver aussi que les deux branches de courbe qui arrivent en M soient imaginaires conjuguées ([1]). La discussion des conditions dans lesquelles se trouve réalisée l'une ou l'autre des dispositions ne rentre pas dans le cadre de cet Ouvrage ([2]).

Lorsque $p = 3, 4, \ldots$, le point M est appelé *point triple*, *quadruple*, ....

*Remarque.* — Les calculs précédents sont évidemment valables pour des coordonnées trilinéaires quelconques. De plus, le point M peut très bien être à l'infini. Ce cas sera étudié à part au Chapitre XV.

199. Point multiple a l'origine. — Il est particulièrement commode de reconnaître la nature d'un point, au point de vue multiplicité, lorsque ce point est à l'origine des coordonnées ([3]).

Ordonnons l'équation de la courbe, en coordonnées cartésiennes non homogènes, par groupes homogènes de degrés croissants; soit

$$(17) \qquad \varphi_p(x, y) + \varphi_{p+1}(x, y) + \ldots + \varphi_m(x, y) = 0,$$

où $\varphi_q(x, y)$ désigne un polynome homogène et de degré $q$. La courbe passant à l'origine, son équation ne renferme pas de terme constant, de sorte que $p$ est $\geqq 1$.

Menons, par O, une sécante quelconque O$\lambda$, de paramètres directeurs $a$, $b$. Les coordonnées d'un quelconque de ses points sont de la forme $\rho a$, $\rho b$. L'équation aux $\rho$ de ses points d'intersection avec la

([1]) Nous supposons, bien entendu, que le point M et les coefficients de l'équation de la courbe sont réels.

([2]) *Cf.* N II, n^os 28 à 31.

([3]) Dans la pratique, lorsqu'on soupçonne qu'un point à distance finie est multiple, *on y transporte l'origine des coordonnées*. On a alors un moyen facile pour reconnaître l'ordre de multiplicité et pour avoir les tangentes.

courbe s'écrit dès lors

$$(18)\qquad \rho^p\varphi_p(a,b)+\rho^{p+1}\varphi_{p+1}(a,b)+\ldots+\rho^m\varphi_m(a,b)=0.$$

Si la sécante est quelconque, elle admet la racine $\rho=0$ comme racine multiple d'ordre $p$; $p$ points d'intersection sont confondus avec O, qui est un point $p^{\text{uple}}$. En annulant le coefficient de $\rho^p$, soit

$$(19)\qquad \varphi_p(a,b)=0,$$

on obtient la condition pour que O$\lambda$ coupe en au moins $p+1$ points confondus avec O. Comme $a$ et $b$ sont, en somme, les coordonnées d'un point quelconque de cette droite, on peut dire que l'équation

$$(20)\qquad \varphi_p(x,y)=0$$

définit le faisceau des $p$ tangentes en O (n° 77).

Nous pouvons finalement énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Lorsque les termes de moindre degré d'une équation algébrique en $x$, $y$ sont de degré $p$, l'origine des coordonnées est un point multiple d'ordre $p$, dont les tangentes sont obtenues en annulant l'ensemble de ces termes de moindre degré.*

Il est à remarquer que cet énoncé est valable pour $p=1$, c'est-à-dire *quand O est un point simple;* en annulant l'ensemble des termes du premier degré, on obtient l'équation de la tangente en ce point.

**200.** L'emploi des coordonnées trilinéaires donne lieu à un théorème analogue. Imaginons, par exemple, qu'on ordonne l'équation suivant les puissances décroissantes de $z$ :

$$(21)\qquad z^{m-p}\varphi_p(x,y)+z^{m-p-1}\varphi_{p+1}(x,y)+\ldots+\varphi_m(x,y)=0.$$

En répétant le raisonnement ci-dessus, on verra que toute sécante issue du sommet A (0, 0, 1) coupe la courbe en $p$ points confondus avec ce sommet, qui est un point multiple d'ordre $p$. Le faisceau des tangentes en ce point a pour équation

$$(22)\qquad \varphi_p(x,y)=0.$$

**201.** Points multiples d'une courbe définie paramétriquement. —

Soit la courbe plane [1] définie par les équations

$$x = f(t), \qquad y = g(t).$$

On reconnaît que cette courbe admet un point $M_0(x_0, y_0)$ pour point multiple d'ordre $p$ à ce fait qu'il existe $p$ valeurs différentes de $t$, soient $t_1, t_2, \ldots, t_p$, qui donnent à $x$ et $y$ les valeurs $x_0$ et $y_0$ [2]. A chacune de ces valeurs $t_k$, correspond une branche de courbe passant par $M_0$, dont les points sont obtenus en donnant à $t$ des valeurs voisines de $t_k$. La tangente en $M_0$ à cette branche a naturellement pour paramètres directeurs $f'(t_k)$, $g'(t_k)$.

De ce qui précède, résulte la *méthode générale de recherche des points multiples*, en équations paramétriques. On calcule, si elles existent, les solutions du système

$$f(t) - f(t') = 0, \qquad g(t) - g(t') = 0,$$

pour lesquelles $t \neq t'$.

Lorsque les fonctions $f$ et $g$ sont rationnelles, on peut se débarrasser de cette dernière restriction, en remarquant que les premiers membres des équations précédentes sont divisibles par $t - t'$: on effectue la division et l'on obtient, comme quotients, des fonctions symétriques de $t$, $t'$ [3]. C'est en égalant ces quotients à zéro qu'on obtient le véritable système donnant les points multiples. Comme il est symétrique, il y aura généralement avantage à *prendre pour inconnues auxiliaires les fonctions symétriques élémentaires* $p = t + t'$, $q = tt'$ (t. I, n° 239).

En général, chaque solution en $p$, $q$ donnera un point double, puisqu'il lui correspond seulement deux valeurs différentes de $t$ donnant les mêmes valeurs à $x$, $y$. Mais on conçoit très bien que deux solutions différentes $(p, q)$ et $(p_1, q_1)$ puissent donner deux couples $(t, t')$ et $(t_1, t'_1)$ admettant une valeur commune, par exemple $t_1 = t'$ [4]. Dans une telle hypothèse, on aura trois valeurs différentes de $t$ donnant les mêmes valeurs à $x$, $y$, donc un point triple. On généralise sans peine.

---

(1) Ce que nous allons dire s'applique aussi aux courbes gauches. Dans ce cas, les trois coordonnées $x$, $y$, $z$ doivent reprendre plusieurs fois les mêmes valeurs.

(2) On suppose, bien entendu, que ceci n'a pas lieu pour tous les points de la courbe, c'est-à-dire que la représentation paramétrique est propre (n° 264).

(3) La fraction $\dfrac{f(t) - f(t')}{t - t'}$ garde, en effet, la même valeur, quand on échange $t$ et $t'$.

(4) On le reconnait à ce que les équations $t^2 - pt + q = 0$ et $t^2 - p_1 t + q_1 = 0$ ont une racine commune.

202. *Points de rebroussement.* — Imaginons qu'*une solution* $(p, q)$ *conduise à une racine double en* $t$, c'est-à-dire que l'on ait $t = t'$. Les deux branches de courbe qui passent au point correspondant $M_0$ sont alors confondues; *on doit donc avoir un point de rebroussement* [1].

Si l'on observe que le quotient $\frac{f(t) - f(t')}{t - t'}$ tend, lorsque $t'$ tend vers $t$, vers la dérivée $f'(t)$, on voit que, dans le cas particulier actuellement considéré, la racine double $t$ *doit annuler à la fois* $f'(t)$ *et* $g'(t)$. Or, il n'est pas difficile de voir que c'est là une *propriété caractéristique du point de rebroussement.*

En effet, si $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ s'annulent simultanément pour $t = t_0$, lorsque $t$ traverse, en croissant, cette valeur particulière, $x$ et $y$ doivent simultanément changer de sens de variation, c'est-à-dire passer par un maximum ou par un minimum. Il s'ensuit, de manière évidente, que le point $M(x, y)$ ne peut continuer à se déplacer dans la même direction. Il rebrousse chemin, suivant une nouvelle branche de courbe. A vrai dire, nous ne savons pas si cette nouvelle branche sera tangente à la première, autrement dit, nous ignorons si l'on n'aura pas un point anguleux (t. I, p. 73, note). Pour le discerner, il faut étudier le rapport $\frac{dy}{dx}$, au voisinage de $t = t_0$. On cherche sa limite lorsque $t$ tend vers $t_0$ successivement par valeurs inférieures, puis par valeurs supérieures; on obtient ainsi les coefficients angulaires des tangentes aux deux branches. S'ils sont confondus, on a un point de rebroussement dont on connaîtra, du même coup, la tangente [2]. Ajoutons que cela arrive toujours lorsqu'on a affaire à une courbe algébrique, car on démontre que le point anguleux ne peut exister que dans les courbes transcendantes (XII, n° 22).

203. Plan tangent a une surface. — Soit une surface (S) que nous supposerons d'abord définie paramétriquement. Par le point M, de paramètres $u$, $v$ et de coordonnées $x$, $y$, $z$, traçons une ligne quelconque (C), située sur la surface. Les paramètres directeurs de la tangente MT à cette ligne sont $dx$, $dy$, $dz$ (n° 192), c'est-à-dire

$$\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

---

(1) D'une façon plus précise, on peut concevoir une courbe, dont les coefficients dépendraient d'un paramètre variable $\lambda$, de telle manière qu'un point double $(t, t')$ tende, lorsque $\lambda$ tend vers $\lambda_0$, vers un point de rebroussement $(t_0, t_0)$.

(2) Cette tangente n'est plus donnée par la règle ordinaire, puisque $x'$ et $y'$ sont nuls.

Les équations paramétriques de cette tangente sont donc (n° 95)

$$
(23)\quad \begin{cases}
X - x = \rho\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}du + \dfrac{\partial x}{\partial v}dv\right), \\
Y - y = \rho\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}du + \dfrac{\partial y}{\partial v}dv\right), \\
Z - z = \rho\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}du + \dfrac{\partial z}{\partial v}dv\right).
\end{cases}
$$

En éliminant $\rho\,du$ et $\rho\,dv$ entre ces trois équations, nous avons l'équation du lieu engendré par MT, quand on fait varier la ligne (C) sur la surface, tout en la faisant passer par M,

$$
(24)\quad \begin{vmatrix}
X - x & \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\
Y - y & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\
Z - z & \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Cette équation représente un plan [1], qui est appelé *le plan tangent en* M *à la surface.*

*Remarque.* — *Le plan tangent dépend*, comme son point de contact, *des deux paramètres indépendants* $u$ *et* $v$. Il en est, du moins, toujours ainsi en apparence. Cependant, nous verrons (n° 281) qu'*il existe des surfaces*, appelées *surfaces développables*, *dont le plan tangent ne dépend que d'un seul paramètre*. Effectivement, on peut très bien concevoir que l'équation (24), tout en ayant l'air de dépendre à la fois de $u$ et de $v$, ne renferme ces deux paramètres que par l'intermédiaire d'une certaine fonction $\lambda$ de $u$ et de $v$. Dans

---

[1] A condition, toutefois, que les trois mineurs

$$
\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}
$$

ne soient pas simultanément nuls. Lorsqu'il en est ainsi, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ sont proportionnels à $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$; la tangente MT est fixe, d'après les équations (23). Tout ce qui précède suppose aussi, bien entendu, l'existence des dérivées partielles $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, ... au point M considéré.

ce cas, le plan tangent ne dépendra que de la valeur de $\lambda$. Mais alors, il touchera la surface en une infinité de points, à savoir tous les points dont les $u$, $v$ donneront la même valeur à la fonction $\lambda$. Nous verrons d'ailleurs que ces points sont en ligne droite (nº 281).

204. Soit maintenant une surface (S) définie par l'équation

$$f(x, y, z) = 0. \tag{25}$$

Menons encore, par le point M($x$, $y$, $z$) et sur la surface, une ligne (C) quelconque. La tangente MT à cette ligne a pour équations

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}. \tag{26}$$

Or, quelle que soit la ligne (C), du moment qu'elle est tracée sur (S), les coordonnées de ses différents points satisfont à (25), donc aussi à l'équation différentiée

$$f'_x\, dx + f'_y\, dy + f'_z\, dz = 0. \tag{27}$$

L'élimination des paramètres homogènes $dx$, $dy$, $dz$ entre (26) et (27) est immédiate et donne

$$(X - x) f'_x + (Y - y) f'_y + (Z - z) f'_z = 0. \tag{28}$$

Cette équation représente encore un plan, lieu des tangentes telles que MT; c'est *l'équation du plan tangent*.

On peut remarquer son analogie avec l'équation (7). Un calcul entièrement analogue à celui du nº 197 permet aussi de l'écrire sous la forme

$$X f'_x + Y f'_y + Z f'_z + f'_t = 0, \tag{29}$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$X\, F'_x + Y\, F'_y + Z\, F'_z + T\, F'_t = 0, \tag{30}$$

équation qu'on peut aussi vérifier directement, comme au nº 197.

Il arrive quelquefois qu'on donne l'équation de la surface sous la forme

$$z = \varphi(x, y). \tag{31}$$

L'équation (28) devient alors

$$(Z - z) = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y),$$

ou, en posant, suivant une notation courante, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$,

$$(32) \qquad (Z - z) = p(X - x) + q(Y - y).$$

**205.** Tangente a une courbe de l'espace définie par deux équations implicites. — Soit la courbe définie par les équations

$$(33) \qquad f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0.$$

Elle est à la fois sur les deux surfaces $(f)$ et $(g)$. Donc, sa tangente est à l'intersection des plans tangents à ces deux surfaces ; elle a pour équations

$$(34) \qquad \begin{cases} (X - x)f'_x + (Y - y)f'_y + (Z - z)f'_z = 0, \\ (X - x)g'_x + (Y - y)g'_y + (Z - z)g'_z = 0. \end{cases}$$

**206.** Points multiples. — L'équation (30) devient illusoire quand les quatre dérivées partielles $F'_x$, $F'_y$, $F'_z$, $F'_t$ sont nulles. On dit alors que le point M est un *point singulier*.

En répétant exactement les mêmes calculs qu'au n° 198, on obtient les résultats suivants, que nous nous contenterons d'énoncer :

1° *Les tangentes à une surface en un point non singulier sont caractérisées par la propriété de couper cette surface en deux points confondus avec ledit point.*

2° *Un point M est multiple d'ordre p lorsque toute sécante issue de ce point coupe la surface en p points confondus avec lui et p seulement. Il y a une infinité de droites qui coupent en au moins p + 1 points confondus avec M ; on les appelle les tangentes en M ; leur lieu est un cône de degré p* (¹).

*Analytiquement, un tel point est caractérisé par le fait que les dérivées partielles du premier membre de l'équation homogène de la surface doivent s'y annuler jusqu'à l'ordre p exclusivement.*

---

(¹) Pour cette raison, un point multiple $(p > 1)$ est aussi appelé *point conique*. Bien entendu, il peut arriver que le cône dégénère : par exemple, il peut se décomposer en $p$ plans, réels ou imaginaires, distincts ou confondus.

3° *Lorsque le point est à l'origine des coordonnées, l'ordre de multiplicité est égal au degré des termes de moindre degré; le cône des tangentes est obtenu en annulant l'ensemble de ces termes.*

Cette dernière partie de l'énoncé s'établit en raisonnant comme au n° 199 et s'étend (*cf.* n° 200) au cas où le point étudié est, en coordonnées tétraédriques, un sommet du tétraèdre de référence.

207. Équation tangentielle d'une courbe plane. — Étant donnée une courbe (C) dans le plan $xOy$, on appelle *équation tangentielle* de cette courbe la condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients $u$, $v$, $w$ pour que la droite

(35) $$ux + vy + w = 0$$

lui soit tangente (*cf.* n° 293).

On peut imaginer *diverses méthodes* pour la calculer.

D'abord, lorsque la courbe (C) est définie géométriquement, on peut quelquefois *utiliser une propriété caractéristique simple de sa tangente*. C'est ainsi que nous avons procédé pour le cercle (n° 165).

On peut aussi, et c'est souvent assez pratique, *exprimer que la droite* (35) *coupe la courbe en deux points confondus*. A cet effet, on forme l'équation qui détermine, par l'intermédiaire d'une inconnue quelconque, le plus convenablement choisie ([1]), les points d'intersection de la droite avec la courbe. Puis, on écrit que cette équation a une racine double.

Lorsque la courbe est donnée par des équations paramétriques, on peut, en outre de la méthode précédente, identifier l'équation (35) avec l'équation de la tangente en un point quelconque, de paramètre $t$. Puis, on élimine ce dernier entre les équations d'identification obtenues.

Supposons enfin que la courbe soit définie par l'équation

(36) $$f(x, y) = 0.$$

([1]) Cette inconnue sera, par exemple, l'abscisse, l'ordonnée, ou bien un paramètre $\rho$ ou $\lambda$ (n° 72) relatif à la droite, ou bien un paramètre $t$ relatif à la courbe, lorsqu'on connaît des équations paramétriques de cette dernière.

Identifions l'équation (35) avec l'équation (9) de la tangente au point $M(x, y)$ :

$$(37) \qquad \frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_t}{w}.$$

Pour que la droite (35) soit tangente, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer $x$ et $y$, vérifiant à la fois (36) et (37).

On peut observer que l'on doit avoir aussi

$$(38) \qquad ux + vy + w = 0,$$

puisque M doit se trouver aussi bien sur la tangente que sur la courbe. Mais ce n'est pas là une nouvelle condition à ajouter aux précédentes, dont elle est une simple conséquence algébrique. La valeur commune des rapports (37) est, en effet, égale à

$$\frac{xf'_x + yf'_y + f'_t}{ux + vy + w} = \frac{mf(x, y)}{ux + vy + w},$$

comme on le voit en multipliant haut et bas le premier rapport par $x$, le deuxième par $y$, le troisième par $z$ et ajoutant terme à terme. Dès lors, si l'on a (36), on a aussi (38), car les rapports (37) ne peuvent être nuls tous trois, sans quoi le point M serait un point singulier et l'équation (9), qui nous a servi de point de départ, ne serait plus applicable. Réciproquement, si l'on a (38), on a aussi (36), car les rapports (37) ne peuvent être tous trois infinis, puisque les coefficients $u$, $v$, $w$ ne sauraient s'annuler simultanément. Il est donc loisible d'adjoindre aux équations (37), soit l'équation (36), soit l'équation (38). D'où la règle suivante :

Règle. — *Pour former l'équation tangentielle de la courbe* (36), *on élimine $x$ et $y$ entre les équations* (37) *et* (36) *ou bien entre les équations* (37) *et* (38) (1).

*Remarque. — L'équation tangentielle d'une courbe algébrique est algébrique.* Car elle est obtenue par des calculs algébriques.

---

(1) En général, l'équation (38) est préférable à (36). D'abord, elle est de degré moindre. Ensuite, l'élimination entre (37) et (36) offre l'inconvénient, implicitement signalé dans le texte, de conduire à une équation qui, *a priori*, doit être vérifiée identiquement, quand la courbe présente un point double. Pour éviter cette difficulté, il faut bien prendre garde, dans les calculs de l'élimination, de rejeter toutes les valeurs de $x$, $y$ qui annuleraient les rapports (37).

208. ÉQUATION TANGENTIELLE D'UNE COURBE DE L'ESPACE OU D'UNE SURFACE. — C'est la condition pour que le plan

$$uX + vY + wZ + r = 0 \tag{39}$$

soit tangent à la courbe ou à la surface.

*S'il s'agit d'une courbe, on exprimera généralement qu'elle coupe le plan en deux points confondus.* On peut aussi procéder par identification de l'équation (39) avec l'équation générale des plans tangents.

S'il s'agit d'une surface définie paramétriquement, on identifie (39) avec l'équation (24). Puis on élimine les paramètres [qu'il faudra désigner par d'autres lettres que $u$ et $v$, pour éviter toute confusion avec les coefficients de (39)] entre les relations obtenues.

Si la surface est, au contraire, définie par l'équation (25), on identifie (39) avec (29) :

$$\frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{w} = \frac{f'_t}{r}. \tag{40}$$

Puis, *on élimine $x, y, z$ entre* (40) *et* (25) *ou bien entre* (40) *et* (41) (*cf.* n° 207) :

$$ux + vy + wz + r = 0. \tag{41}$$

En général, cette élimination *conduit à une seule condition entre $u, v, w, r$*. Lorsque cette condition est remplie, les équations (40) et (41), par exemple, ont une seule solution commune en $x, y, z$ ; le plan (39) est tangent en un seul point à *la surface, qui n'est pas développable* (n° 203).

Il peut arriver, au contraire, que l'élimination conduise à *deux équations tangentielles*. Lorsqu'elles sont vérifiées, on doit constater que le système (40), (41) admet une infinité de solutions en $x, y, z$, à savoir les coordonnées des points d'une droite, tout le long de laquelle le plan (39) est tangent à la surface. Le plan tangent ne dépend plus que d'un paramètre ; *la surface est développable* (n° 203).

Il ne rentre pas dans le cadre de cet Ouvrage de chercher à quelle condition doit satisfaire la fonction $f(x, y, z)$ pour que la surface (25) soit développable. Contentons-nous de faire observer au lecteur que, s'il fait son élimination correctement, sans se tenir nécessairement

pour satisfait dès qu'il a obtenu une relation entre $u, v, \alpha, r$, il saura toujours reconnaître les cas où il se trouve dans cette circonstance particulière.

209. Normales et plans normaux. — On appelle *normale à une courbe* toute perpendiculaire à une tangente MT à cette courbe, menée par le point de contact M, qui s'appelle aussi le *pied de la normale*. Les normales en un point donné sont en nombre infini et engendrent le *plan normal* à la courbe, qui est le plan, mené par M, perpendiculairement à la tangente MT. Il a pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$(42) \qquad (X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0,$$

puisque les paramètres directeurs de la tangente sont $dx, dy, dz$. On aura une normale quelconque en adjoignant à cette équation l'équation d'un plan quelconque passant par M.

En Géométrie plane, il n'y a qu'une seule normale, située dans le plan de la courbe. Lorsque cette dernière est orientée, nous conviendrons d'appeler *demi-normale positive* la demi-droite déduite de la demi-tangente positive par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$. Si $\alpha$ désigne, comme au n° 196, l'angle polaire de la demi-tangente positive, celui de la demi-normale positive sera donc $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Soit P la projection de M sur $Ox$ et soit N le point de rencontre de la normale avec cet axe. On appelle *sous-normale* la quantité $\overline{PN}$. Si les axes sont rectangulaires, on a (n° 196)

$$\overline{PN} = -\frac{\overline{PM}^2}{\overline{PT}} = -\frac{y^2}{-\frac{y}{y'}} = yy'.$$

210. On appelle *normale à une surface*, en un de ses points, la perpendiculaire menée, par ce point, au plan tangent.

Si la surface est définie paramétriquement, en coordonnées rectangulaires, elle a pour paramètres directeurs

$$(43) \qquad \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

comme il résulte de l'équation (24).

Si la surface est définie par l'équation (25), la normale en $M(x, y, z)$ a pour paramètres directeurs $f'_x, f'_y, f'_z$, comme il résulte de l'équation (28).

On appelle *plan normal* à une surface tout plan passant par une de ses normales.

Lorsqu'une courbe de l'espace est définie par deux équations implicites, telles que (33), son plan normal en $M(x, y, z)$ est défini par les normales aux deux surfaces $(f)$ et $(g)$, que nous supposons non tangentes en M [1]. Il a pour équation (n° 91)

$$(44)\qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Les paramètres directeurs d'une quelconque des normales en M sont

$$(45)\qquad f'_x+\lambda g'_x, \quad f'_y+\lambda g'_y, \quad f'_z+\lambda g'_z,$$

où $\lambda$ désigne un paramètre arbitraire.

211. Problèmes divers. — A propos des tangentes et plans tangents, normales et plans normaux, on peut se poser différents problèmes, dont nous allons dire quelques mots.

Problème I. — *Déterminer les tangentes à une courbe plane, qui passent par un point donné de son plan.*

Si l'on connaît l'équation de la tangente en fonction d'un paramètre $t$, comme cela arrive lorsque la courbe est donnée par des équations paramétriques, il suffit d'y remplacer les coordonnées courantes par les coordonnées $x_0$, $y_0$ du point donné. On obtient l'équation aux $t$ des tangentes cherchées.

Si la courbe est donnée par l'équation (4), on écrit que l'équation (9) est vérifiée pour $X = x_0$, $Y = y_0$. On obtient une équation en $x$, $y$ qui, jointe à (4), permet de calculer les coordonnées des points de contact des tangentes cherchées.

Si l'on connaît l'équation tangentielle de la courbe, soit

$$(46)\qquad \varphi(u, v, w) = 0,$$

[1] Lorsque les surfaces sont tangentes, *voir* n° 343.

il suffit d'adjoindre à cette équation la suivante :

$$ux_0 + vy_0 + w = 0, \tag{47}$$

qui exprime que la droite (35) passe par le point donné. Éliminant $w$ entre ces deux équations, on a

$$\varphi(u, v, -ux_0 - vy_0) = 0, \tag{48}$$

équation homogène en $u$, $v$, qui détermine les directions des tangentes cherchées. En particulier, si l'on remplace $u$ par $m$ et $v$ par $-1$, on obtient l'*équation aux coefficients angulaires*

$$\varphi(m, -1, y_0 - mx_0) = 0. \tag{49}$$

**212.** Classe d'une courbe plane algébrique. — C'est *le nombre des tangentes qu'on peut mener à cette courbe par un point quelconque de son plan*. Ce nombre est évidemment égal au degré de l'équation (48) en $u$, $v$, c'est-à-dire *égal au degré de l'équation tangentielle* (46).

On peut aussi calculer la classe en partant de l'équation ponctuelle (4). Les points de contact des tangentes issues du point $P(x_0, y_0)$ sont à l'intersection de la courbe proposée avec la courbe représentée par l'équation

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_t = 0. \tag{50}$$

Si $m$ est le degré de (4), $m-1$ est celui de (50). D'où il résulte que les points de contact cherchés sont au nombre de $m(m-1)$ (n° 46). *La classe d'une courbe algébrique de degré m est donc égale à* $m(m-1)$.

Il importe d'observer que cet énoncé doit être néanmoins soumis à des restrictions. Les équations (4) et (50) sont, en effet, toutes deux vérifiées pour $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_t = 0$, c'est-à-dire par les coordonnées des points singuliers, lorsqu'il y en a. Or, les droites joignant ces points au point P ne sont pas des tangentes; de sorte qu'il convient de réduire la classe précédemment calculée du nombre d'unités fourni par les points singuliers dans le dénombrement des points d'intersection des courbes (4) et (50).

Il y a là une source de difficultés, que nous ne pouvons aborder ici. Contentons-nous de signaler, sans démonstration, que, dans le cas où la courbe présente $d$ points doubles et $r$ points de rebroussement, sans présenter d'autres singularités, la classe est égale à $m(m-1) - 2d - 3r$, d'après Plücker [1].

---

[1] *Cf.* $X_{II}$, n° 15.

**213.** Problème II. — *Déterminer les plans tangents menés par une droite donnée à une courbe donnée de l'espace ou à une surface donnée non développable.*

Ce problème se résout d'une manière analogue au précédent. Contentons-nous de dire que si

$$(51)\qquad \varphi(u, v, w, r) = 0$$

est l'équation tangentielle de la courbe ou de la surface et si

$$(52)\qquad u_1 x + v_1 y + w_1 z + r_1 = 0, \qquad u_2 x + v_2 y + w_2 z + r_2 = 0$$

sont les équations de la droite donnée, les plans tangents cherchés ont pour équation

$$(53)\qquad (u_1 + \lambda u_2)x + (v_1 + \lambda v_2)y + (w_1 + \lambda w_2)z + r_1 + \lambda r_2 = 0.$$

$\lambda$ étant déterminé par l'équation

$$(54)\qquad \varphi(u_1 + \lambda u_2, v_1 + \lambda v_2, w_1 + \lambda w_2, r_1 + \lambda r_2) = 0.$$

Lorsque la courbe ou la surface sont algébriques, l'équation (51) l'est aussi et son degré est égal au degré de l'équation (54) par rapport à $\lambda$. Il indique le *nombre des plans tangents qui passent par toute droite de l'espace*, nombre qui est appelé *la classe de la courbe ou de la surface.*

Problème III. — *Exprimer qu'une droite donnée de l'espace est tangente à une surface donnée.*

On exprime qu'elle coupe la surface en deux points confondus ou bien (n° 306) que, parmi les plans tangents qui la contiennent, il y en a deux qui se confondent.

**214.** Problème IV. — *Mener, par un point donné, les normales à une courbe ou à une surface donnée.*

S'il s'agit d'une courbe en Géométrie plane, on écrit que la normale en un point quelconque passe par le point donné. On obtient l'équation aux $t$ des pieds des normales, si la courbe est définie paramétriquement. Si la courbe est définie par l'équation (4), on obtient

$$(55)\qquad (x_0 - x)f'_y - (y_0 - y)f'_x = 0.$$

Cette équation représente une courbe, qui coupe la proposée aux pieds des normales cherchées. Remarquons que si la courbe donnée est algébrique et de degré $m$, il en est de même, en général, de la courbe (55); de sorte que le problème comporte $m^2$ solutions. Mais il peut y avoir des exceptions à cette règle.

S'il s'agit d'une courbe dans l'espace, que nous supposerons définie paramétriquement, on écrit que le plan normal passe par le point donné. On obtient l'équation aux $t$ des pieds des normales.

S'il s'agit d'une surface, on écrit que la normale passe par le point donné. On obtient deux équations qui, jointes à l'équation de la surface, déterminent les pieds des normales cherchées.

215. Podaires. — On appelle *podaire d'une courbe ou d'une surface* relativement à un point O le lieu des projections de O sur les tangentes ou plans tangents à la courbe ou la surface proposées.

La podaire d'une courbe C est une courbe Γ ([1]). La podaire d'une surface S est une surface Σ ou une courbe Γ, suivant que S n'est pas ou est développable.

Dans le cas d'une courbe plane, lorsque l'on connaît l'équation canonique de la tangente

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - f(\varphi) = 0,$$

on peut écrire immédiatement l'équation polaire de la podaire par rapport à l'origine :

$$\rho = f(\omega).$$

On appelle *antipodaire* d'une courbe ou d'une surface une courbe ou une surface admettant la proposée pour podaire. Les antipodaires se déterminent par la théorie des enveloppes (Chap. XIX).

---

([1]) Si l'on définissait cette podaire comme lieu des projections de O sur les plans tangents à C, ce serait une surface engendrée par des cercles passant par O ou, si l'on veut, l'inverse d'une surface réglée (n° 367).

# CHAPITRE XIV.

## ÉTUDE D'UNE COURBE AU VOISINAGE D'UN DE SES POINTS.

---

**216. Méthode générale.** — Soit une courbe (C), dont nous imaginons les coordonnées $x$, $y$, $z$ du point courant M exprimées en fonction d'un paramètre $t$. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point particulier, de paramètre $t_0$. On peut se proposer d'étudier certaines propriétés de cette courbe, ne faisant intervenir que les points voisins de $M_0$, c'est-à-dire dont le paramètre est voisin de $t_0$. Il est alors commode de procéder de la manière suivante.

Posons $t - t_0 = h$ $\left(\text{ou } \frac{1}{t} = h, \text{ si } t_0 = \infty\right)$. Puis, calculons les développements limités, d'ordre $n$ (t. I, n° 110), de $x$, $y$, $z$ suivant les puissances croissantes de $h$, soient

$$(1)\qquad \begin{cases} x = x_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots + a_n h^n + \alpha h^{n+1}, \\ y = y_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \ldots + b_n h^n + \beta h^{n+1}, \\ z = z_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \ldots + c_n h^n + \gamma h^{n+1}, \end{cases}$$

les $a$, $b$, $c$ désignant des constantes et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ des fonctions de $h$, qui restent finies pour $h = 0$.

Les fonctions

$$(2)\qquad \begin{cases} \xi = x_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots + a_n h^n, \\ \eta = y_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \ldots + b_n h^n, \\ \zeta = z_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \ldots + c_n h^n \end{cases}$$

représentent, comme on sait, $x$, $y$, $z$, avec une approximation d'ordre $n + 1$, si $h$ est infiniment petit du premier ordre. Il s'ensuit que *la courbe* $(\gamma)$ [1], *définie par les équations paramétriques* (2), *peut remplacer la courbe* (C), *au voisinage de* $M_0$, avec la même

---

[1] Elle est algébrique, unicursale, de degré $n$. Ses points à l'infini sont tous confondus ; pour cette raison, on dit quelquefois que c'est une *parabole d'ordre* $n$, par analogie avec le cas de $n = 2$.

approximation. La distance des points homologues $M(x, y, z)$ et $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ est

$$(3)\quad M\mu = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} = h^{n+1}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2};$$

elle est infiniment petite d'ordre au moins égal à $n+1$.

217. Position d'une courbe plane par rapport a sa tangente. — La courbe (C) étant supposée plane, menons la tangente $M_0T_0$ au point $M_0$. Si l'on donne à $h$ de petites valeurs positives, le point M décrit un petit arc, aboutissant au point $M_0$, que nous appellerons, pour abréger, l'*arc élémentaire positif*. Si l'on donne à $h$ des valeurs négatives, ayant de petites valeurs absolues, M décrit, au contraire, l'*arc élémentaire négatif*. Supposons maintenant, pour fixer les idées, que $M_0T_0$ ne soit pas parallèle à $Oy$ (1) et menons, par $M_0$, cette parallèle, soit $M_0\lambda$. Nous formons ainsi quatre angles : 1, 2, 3, 4.

Cela posé, nous nous proposons de *reconnaître successivement dans lequel de ces quatre angles se trouve chacun des deux arcs élémentaires positif et négatif précédemment définis.*

C'est en cela que consiste, d'une façon précise, l'*étude de la position d'une courbe plane par rapport à sa tangente.*

Soit

$$(4)\quad AX + BY + C = 0$$

l'équation de la tangente $M_0T_0$. Pour savoir de quel côté se trouve le point $M(x, y)$ par rapport à cette tangente, il suffit (n° 71) de connaître le signe de la quantité

$$(5)\quad V = Ax + By + C.$$

De même, pour savoir de quel côté se trouve le point M par rapport à $M_0\lambda$, il suffit de connaître le signe de $x - x_0$. Or, ces deux quantités sont infiniment petites avec $h$ : on aura donc leurs signes, pour les petites valeurs de $h$, *en calculant leurs parties principales* (t. I, n° 123). Ces parties principales étant acquises, on y supposera successivement $h > 0$, puis $h < 0$. La considération des signes obtenus donnera la réponse à la question posée (2).

---

(1) Si $M_0T_0$ était parallèle à $Oy$, on mènerait $M_0\lambda$ parallèlement à $Ox$.

(2) Bien entendu, il faudra, au préalable, déterminer la région positive de la droite $M_0T_0$, définie par l'équation (4).

**218.** Entrons un peu dans le détail des calculs, en nous bornant au cas où les coefficients $a_1$, $b_1$ des développements (1) ne sont pas simultanément nuls [1]. Si nous remarquons que ce sont les valeurs des dérivées $\frac{dx}{dh}$, $\frac{dy}{dh}$, pour $h=0$, l'équation de la tangente $M_0T_0$ s'écrit

$$\frac{X-x_0}{a_1}=\frac{Y-y_0}{b_1}$$

ou

$$(6)\qquad a_1(Y-y_0)-b_1(X-x_0)=0.$$

Telle est l'équation qui doit jouer le rôle de l'équation (4). On a donc

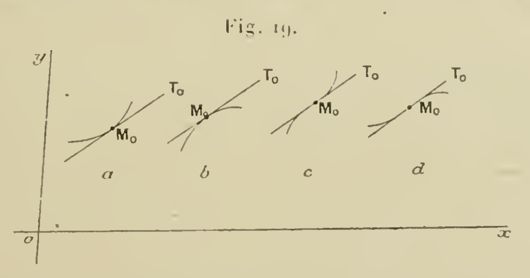
$$(7)\qquad V=a_1(y-y_0)-b_1(x-x_0).$$

Pour calculer la partie principale de cette expression, nous devons (t. I, nº 122) remplacer $x$ et $y$ par les développements (1), poussés jusqu'au moment où l'on obtient un terme non nul dans V. Le terme en $h$ disparaît identiquement. Le terme en $h^2$ est $(a_1b_2-b_1a_2)h^2$. En général, il n'est pas nul et constitue la partie principale cherchée.

Quant à celle de $x-x_0$, elle est égale à $a_1h$, car $a_1\neq 0$, du fait qu'on a supposé $M_0T_0$ non parallèle à $Oy$. Supposons, par exemple, $a_1>0$. La région positive de $M_0T_0$ est celle qui contient le point à l'infini sur la partie positive de $Oy$.

Si $a_1b_2-b_1a_2>0$, V est $>0$, quel que soit le signe de $h$. Donc, les deux arcs élémentaires issus de $M_0$ sont au-dessus de $M_0T_0$. l'arc

Fig. 19.




positif à droite, l'arc négatif à gauche (*fig.* 19, *a*). On dit que la courbe est *concave, en* $M_0$, *vers les y positifs*.

---

(1) Ce cas est d'ailleurs le plus fréquent. Lorsque $a_1=b_1=0$, le point $M_0$ est, en effet, un point de rebroussement (nº 202), circonstance évidemment exceptionnelle.

Si $a_1 b_2 - b_1 a_2 < 0$, V est $< 0$ : on a la disposition de la figure 19, *b* : la courbe est *concave vers les y négatifs.*

Examinons maintenant le cas particulier où $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$. Le terme en $h^3$ de V est $(a_1 b_3 - a_3 b_1) h^3$. Il n'est pas nul, en général. Si $a_1 b_3 - a_3 b_1 > 0$, V a le signe de $h$ : on a la disposition de la figure 19, *c*. Si $a_1 b_3 - a_3 b_1 < 0$, V a le signe contraire à $h$ ; on a la disposition de la figure 19, *d*. Dans les deux cas, *la courbe traverse sa tangente*. Le point $M_0$ est appelé *point d'inflexion.*

Il peut arriver, plus particulièrement, que le coefficient de $h^3$ s'annule à son tour, en même temps que le coefficient de $h^2$. Soit, d'une manière générale, $(a_1 b_p - b_1 a_p) h^p$ le premier terme non nul du développement de V. Si $p$ est pair, on a l'une des dispositions des figures 19, *a*, et 19, *b*, suivant le signe de $a_1 b_p - b_1 a_p$ : si $p$ est impair, on a un point d'inflexion.

**219.** Ordre du contact de la tangente. — Les calculs précédents se rattachent à l'étude du point de vue infinitésimal de *la distance* MP *du point* M *à la tangente* $M_0T_0$. On sait, en effet, que cette distance est proportionnelle à V (nº 66) ; elle a donc le même ordre infinitésimal.

D'autre part, la distance $M_0M = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ a pour partie principale $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.h$, quantité non nulle, puisque $a_1$ et $b_1$ ne sont pas tous deux nuls (nº 218). Il en résulte que $h$ est du même ordre que $M_0M$.

Cela posé, *si* $M_0$ *est un point ordinaire*, V a pour partie principale $(a_1 b_2 - b_1 a_2) h^2$ ; on en conclut que *la distance* MP *est infiniment petite du second ordre par rapport à* $M_0M$. On dit que la tangente $M_0T_0$ a un *contact du premier ordre* ou *contact simple* avec la courbe.

*Si* $M_0$ *est un point d'inflexion*, V est en général du troisième ordre ; donc, *la distance* MP *est infiniment petite du troisième ordre par rapport à* $M_0M$. On dit que la tangente $M_0T_0$ ou *tangente d'inflexion* a un *contact du second ordre* avec la courbe.

Dans le cas où V est d'un ordre infinitésimal $p$ encore plus élevé, la tangente $M_0T_0$ a *un contact d'ordre* $p - 1$, la distance MP étant infiniment petite du $p^{\text{ième}}$ ordre.

On peut aussi caractériser l'ordre du contact, en comptant le

nombre des points d'intersection de la courbe avec $M_0T_0$, qui sont confondus en $M_0$. L'équation aux $h$ des points d'intersection est, en effet, $V = 0$. *Lorsqu'il y a contact d'ordre* $p - 1$, elle renferme $h^p$ en facteur; donc, *il y a $p$ points d'intersection confondus avec* $M_0$.

En particulier, la tangente en un point ordinaire coupe la courbe en deux points confondus avec ce point, ce que nous savons déjà. Une tangente d'inflexion coupe, au contraire, en trois points confondus avec le point d'inflexion [1].

**220. Cas de la courbe $y = f(x)$.** — On a vu, dans l'étude précédente, le rôle important que jouent les coefficients successifs $a_i$, $b_i$ des développements (1). Nous n'avons pas à revenir ici sur la méthode à suivre pour les calculer; nous avons traité à fond cette question au Chapitre VIII du Tome I. Rappelons seulement que, théoriquement, on peut effectuer les développements par la formule de Taylor (t. I, n° 115); les coefficients $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont alors $x'_0$, $\frac{1}{2}x''_0$, $\frac{1}{6}x'''_0$, ... et les coefficients $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sont de même $y'_0$, $\frac{1}{2}y''_0$, $\frac{1}{6}y'''_0$, ..., en désignant par $x'_0, x''_0, \ldots, y'_0, y''_0, \ldots$ les valeurs des dérivées successives, pour $t = t_0$, des fonctions $x$ et $y$ de $t$.

On obtient des résultats particulièrement élégants, en appliquant ceci au cas où la courbe est définie par une équation de la forme

$$y = f(x). \tag{8}$$

Si l'on prend $x$ pour paramètre, on a

$$x = t = x_0 + h.$$

Donc tous les coefficients $a_i$ sont nuls, sauf le premier $a_1$, qui est égal à 1. Quant aux coefficients $b_1$, $b_2$, $b_3$, ..., ils ont pour valeurs $y'_0$, $\frac{1}{2}y''_0$, $\frac{1}{6}y'''_0$, ..., les $y'$, $y''$, $y'''$, ... désignant, cette fois, les dérivées successives de $y$ par rapport à $x$.

Reprenons, dès lors, les résultats du n° 218, en remarquant que,

---

[1] On s'en rend très bien compte, géométriquement, de la manière suivante. Joignons $M_0$ à un point voisin M. Cette sécante rencontre de nouveau la courbe en M', de l'autre côté de $M_0$. Lorsque M tend vers $M_0$, c'est-à-dire lorsque la sécante tend vers la tangente, on voit bien que M' tend aussi vers $M_0$ et, à la limite, les trois points $M_0$, M, M' viennent se confondre suivant $M_0$.

dans l'hypothèse actuelle, $a_1$ est bien positif, comme nous le supposions au numéro précité.

Les coefficients de $h^2$, $h^3$, ... se réduisent à $\frac{1}{2}y''_0$, $\frac{1}{6}y'''_0$, .... On peut donc énoncer la proposition suivante [1] :

Théorème. — *La courbe* (8) *est concave, en* $M_0$, *vers les* $y$ *positifs ou négatifs, suivant que la dérivée seconde* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *prend, en ce point, une valeur positive ou négative. Si cette dérivée s'annule, la dérivée troisième restant différente de zéro, on a un point d'inflexion. Plus particulièrement, si les dérivées successives sont nulles, jusqu'à l'ordre* $p$ *exclusivement, on a un point d'inflexion, lorsque* $p$ *est impair; lorsque* $p$ *est pair, la courbe est concave vers les* $y$ *positifs ou négatifs, suivant que la dérivée* $y_0^{(p)}$ *est positive ou négative.*

221. Recherche pratique des points d'inflexion. — Nous venons de voir comment on reconnait qu'un point donné d'une courbe donnée est un point d'inflexion. Mais on peut se proposer aussi de *determiner tous les points d'inflexion d'une courbe donnée* [2].

La méthode à suivre varie, d'après le mode de définition de la courbe.

I. *Si elle est donnée sous la forme* (8), l'équation aux $x$ des points d'inflexion est

$$f''(x) = 0. \tag{9}$$

II. *Si elle est donnée sous forme paramétrique quelconque*, l'équation aux $t$ des points d'inflexion est

$$x'y'' - y'x'' = 0, \tag{10}$$

comme il résulte des nos 218 et 220.

*Remarque.* — L'une ou l'autre des équations (9) et (10) exprime que la dérivée du coefficient angulaire de la tangente est nulle ; autrement dit, que *ce coefficient angulaire passe par un maximum ou par un minimum lorsque le point de contact traverse un point d'inflexion.* C'est, du reste, ce que

---

(1) On en trouvera une démonstration directe dans $N_{II}$, nos 2 et 3.

(2) Nous entendons ici par point d'inflexion tout point où la tangente a un contact d'ordre au moins égal à 2. Mais il peut arriver, si le contact est d'ordre impair, que, malgré cela, la courbe ne traverse pas sa tangente et n'ait pas l'aspect, par conséquent, d'un véritable point d'inflexion ou, comme on dit encore, d'un *point à visible inflexion*. On dit, dans ce cas, qu'on a un *point méplat*.

montre très bien la figure 19 ($c$ : minimum ; $d$ : maximum) : le sens de rotation de la tangente change à la traversée du point d'inflexion.

De cette observation résulte d'abord qu'on peut, dans l'équation (10), remplacer $x'$, $y'$ par un système quelconque de paramètres directeurs $\alpha$, $\beta$ de la tangente, c'est-à-dire par des quantités proportionnelles à $x'$, $y'$. C'est, du reste, ce qu'il est aisé de vérifier par un calcul direct. Si l'on remplace $x'$ et $y'$ par $\rho\alpha$ et $\rho\beta$ dans (10), on obtient

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = 0. \tag{11}$$

Une deuxième conséquence est la suivante. Le sens de rotation de la tangente ne change pas seulement quand on traverse un point d'inflexion, mais aussi quand on passe par un point à l'infini, qui n'est pas un point d'inflexion et qui admet une asymptote (n° 234). On peut donc prévoir que *l'équation (10) ou l'équation (11) donnent non seulement les $t$ des points d'inflexion, mais aussi les $t$ des points à l'infini.* C'est ce que montre très bien le calcul suivant.

Soit

$$x = \frac{A}{C}, \qquad y = \frac{B}{C}.$$

Les $t$ des points à l'infini sont les racines de C. Or, on peut prendre

$$\alpha = CA' - AC', \qquad \beta = CB' - BC'. \tag{12}$$

Portant dans (11), il vient, après un calcul facile,

$$C\Delta = 0, \tag{13}$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}. \tag{14}$$

On voit que C se trouve bien en facteur, de sorte que *l'équation véritable aux $t$ des points d'inflexion est non pas l'équation* (11), *mais l'équation*

$$\Delta = 0. \tag{15}$$

Il est bon de ne pas oublier l'existence de cet inconvénient que présente l'équation (11). Dans les applications, en effet, on effectue généralement les calculs indiqués par les formules (12) ; puis on porte, dans (11), les valeurs obtenues pour $\alpha$ et $\beta$ et l'on arrive à l'équation (13), sans s'apercevoir de sa décomposition.

Il convient donc de *retenir une fois pour toutes que l'équation* (11) [*ou* (10)] *est divisible par le facteur qui donne les points à l'infini*, à moins qu'on ne préfère écrire tout de suite l'équation (15), ce qui, somme toute, est encore plus pratique [1].

---

[1] Nous allons d'ailleurs retrouver cette équation au n° 222.

222. III. Une autre méthode de recherche des points d'inflexion consiste à *chercher les droites* (D) *qui coupent la courbe en trois points confondus* (*cf.* n° 267). Analytiquement, cela revient à exprimer qu'une certaine équation a une racine triple. La connaissance de cette racine donne le point d'inflexion, dont la tangente est la droite (D).

IV. On peut appliquer ce procédé *en coordonnées trilinéaires*. Soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées trilinéaires du point courant de la courbe, exprimées en fonction du paramètre $t$. Si

$$(16) \qquad ux + vy + wz = 0$$

est l'équation d'une tangente d'inflexion, la valeur de $t$ correspondant à son point de contact doit vérifier, outre l'équation (16), les deux équations dérivées (t. I, n° 226)

$$(17) \qquad ux' + vy' + wz' = 0, \qquad ux'' + vy'' + wz'' = 0.$$

Si nous éliminons $u$, $v$, $w$ entre ces trois équations, nous obtenons

$$(18) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation aux $t$ des points d'inflexion. Elle s'applique, en particulier, *en coordonnées cartésiennes homogènes*. C'est ainsi qu'on retrouve l'équation (15), en prenant $x = A$, $y = B$, $z = C$.

Nous ne nous occuperons pas de la recherche des points d'inflexion d'une courbe définie par une équation implicite. Contentons-nous de faire observer qu'on peut toujours calculer $\frac{d^2 y}{dx^2}$ (t. I, n° 135); en l'égalant à zéro, on obtient une équation à laquelle doivent satisfaire tous les points d'inflexion (¹).

On démontre qu'une courbe algébrique de degré $m$, qui possède $d$ points doubles et $r$ points de rebroussements, a $3m(m-2) - 6d - 8r$ points d'inflexion. Cette formule est due à Plücker.

223. Étude d'une courbe algébrique définie par une équation implicite, au voisinage d'un point simple (²). — On commence par transporter l'origine en ce point. Les termes de moindre degré sont alors du premier degré, puisque le point est simple (n° 199). En les annulant, on a, comme on sait, l'équation de la tangente. Si nous appelons $m$ le coefficient angulaire de celle-ci, supposée non confondue avec $Oy$ (³), nous pouvons écrire l'équation

(¹) Pour plus de détails, *voir* $N_{II}$, n°ˢ 6 à 9.

(²) Lorsque le point est multiple, le problème peut devenir fort difficile. *Cf* $N_{II}$, Chap. IV.

(³) Si la tangente était $Oy$, on échangerait, dans ce qui suit, les rôles de $x$ et $y$.

de la courbe, ordonnée par groupes homogènes de degrés croissants, sous la forme

$$(19) \qquad y - mx + \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \ldots + \varphi_n(x, y) = 0.$$

Cela posé, pour connaître la position de $M(x, y)$ par rapport à la tangente OT, d'équation $Y - mX = 0$, nous devons chercher le signe de la quantité $V = y - mx$. A cet effet, nous allons chercher sa partie principale, en prenant $x$ pour infiniment petit principal.

La relation entre V et $x$ s'obtient par élimination de $y$ :

$$(20) \quad V + \varphi_2(x, mx + V) + \varphi_3(x, mx + V) + \ldots + \varphi_n(x, mx + V) = 0.$$

Nous aurons la partie principale de V, en réduisant cette relation à ses termes d'ordre infinitésimal minimum, ce à quoi on arrive en comparant les différents termes et négligeant tout terme dès qu'on a reconnu qu'il en existe un d'ordre moindre.

Tout d'abord, dans $\varphi_2(x, mx + V)$, $\varphi_3(x, mx + V)$, ..., nous pouvons supprimer tous les termes renfermant V, car chacun d'eux est formé du produit de V par une certaine puissance de $x$, ou bien contient V à une puissance supérieure à la première; dans tous les cas, ces termes sont tous d'ordre infinitésimal supérieur à l'ordre de V, premier terme de (20). La relation (20) se réduit maintenant à

$$(21) \qquad V + x^2 \varphi_2(1, m) + x^3 \varphi_3(1, m) + \ldots + x^n \varphi_n(1, m) = 0.$$

En général, $\varphi_2(1, m)$ n'est pas nul; les termes en $x^3$, $x^4$, ... sont à négliger devant le terme en $x^2$ et la partie principale de V est $-x^2\varphi_2(1, m)$. Si l'on observe que V est positif du côté des $y$ positifs, on voit que *la courbe est concave vers les y positifs ou vers les y négatifs, suivant que $\varphi_2(1, m)$ est négatif ou positif.*

*Si* $\varphi_2(1, m) = 0$, V est d'ordre infinitésimal $\geqq 3$; *on a un point d'inflexion.* Si $\varphi_p(1, m)$ est le premier coefficient non nul $(p \geqq 3)$, l'inflexion est visible lorsque $p$ est impair, invisible lorsque $p$ est pair.

**224.** Position d'une courbe gauche par rapport a ses plans tangents. Plan osculateur. — Supposons maintenant que (C) soit une courbe gauche. Soit

$$(22) \qquad AX + BY + CZ + D = 0$$

l'équation d'un quelconque des plans tangents en $M_0$. Pour savoir de quel côté se trouve le point M par rapport à ce plan, nous devons déterminer le signe de la quantité

$$(23) \qquad V = Ax + By + Cz + D.$$

A cet effet, nous calculons sa partie principale, $h$ étant toujours pris pour infiniment petit principal.

Supposons que le point $M_0$ ne soit pas un point singulier. Les coefficients $a_1$, $b_1$, $c_1$ des développements (1) ne peuvent alors s'annuler simultanément et constituent les paramètres directeurs de la tangente. On a donc, puisque le plan (22) doit contenir cette tangente,

$$(24)\qquad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \qquad Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 = 0.$$

Dès lors, si, dans V, on remplace $x$, $y$, $z$ par les développements (1), on voit que le premier terme non identiquement nul est

$$(Aa_2 + Bb_2 + Cc_2)h^2.$$

Si $Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 \neq 0$, il constitue la partie principale cherchée. Dans ce cas, V garde un signe constant quand $h$ traverse la valeur zéro; autrement dit, les deux arcs élémentaires issus de $M_0$ sont d'un même côté du plan tangent.

De plus, la distance MP de M au plan tangent est infiniment petite du second ordre par rapport à la distance $M_0M$ (*cf.* n° 219). On dit que le plan (22) a un *contact du premier ordre* avec la courbe.

Si, comme nous le supposerons, $a_2$, $b_2$, $c_2$ ne sont pas tous trois nuls, et, de plus, ne sont pas proportionnels à $a_1$, $b_1$, $c_1$, les équations (24) et la suivante

$$(25)\qquad Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 = 0$$

déterminent, de manière unique, des quantités proportionnelles à A, B, C, D [1]. Parmi les plans tangents, il y en a donc un et un seul, (II), pour lequel V est infiniment petit d'ordre supérieur au second.

En général, la partie principale de V est, pour ce plan,

$$(Aa_3 + Bb_3 + Cc_3)h^3,$$

---

[1] On a (t. I, n° 292)

$$A = \rho(b_1c_2 - c_1b_2), \qquad B = \rho(c_1a_2 - a_1c_2), \qquad C = \rho(a_1b_2 - b_1a_2);$$

puis,

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0),$$

$\rho$ désignant un facteur arbitraire.

$Aa_3 + Bb_3 + Cc_3$ étant, par conséquent, supposé $\neq 0$. On voit que V change de signe avec $h$; donc, les arcs élémentaires issus de $M_0$ sont de part et d'autre de (Π), qui est traversé par la courbe.

On voit aussi que la distance de M à (Π) est infiniment petite du troisième ordre par rapport à la distance $M_0M$; le plan (Π) et la courbe ont un *contact du second ordre*.

Le plan (Π) est appelé *plan osculateur* en $M_0$ à la courbe. Résumons tous ces résultats en l'énoncé suivant :

Théorème. — *Étant donné un point quelconque* $M_0$ *d'une courbe gauche, tout plan tangent en* $M_0$ *laisse, en général, la courbe, au voisinage de* $M_0$, *d'un même côté de ce plan. La distance d'un point* M *de la courbe, voisin de* $M_0$, *au plan considéré est infiniment petite du second ordre par rapport à la distance* $M_0M$.

*Cependant, il y a un plan tangent particulier, appelé* plan osculateur, *qui traverse la courbe en* $M_0$. *La distance de* M *à ce plan est infiniment petite du troisième ordre.*

Bien entendu, cet énoncé peut souffrir des exceptions, lorsque les coefficients des développements (1) ont des valeurs particulières. Quand il en est ainsi, on dit que le point $M_0$ présente des singularités. Ce n'est pas ici le lieu de les étudier. Contentons-nous d'observer que, quelles qu'elles soient, on saura toujours, par la méthode précédemment exposée, reconnaître la position de la courbe, au voisinage de $M_0$, par rapport à n'importe lequel des plans tangents en ce point.

225. Autres propriétés du plan osculateur. — Le plan osculateur peut être caractérisé par d'autres propriétés.

Théorème I. — *Le plan osculateur coupe la courbe en trois points confondus.*

Car l'équation aux $h$ des points d'intersection, soit $V = 0$, admet une racine triple nulle.

Théorème II. — *Le plan osculateur en* $M_0$ *est la limite du plan* $M_0T_0M$, *lorsque* M *tend vers* $M_0$.

En effet, le plan $M_0T_0M$ est représenté par l'équation (22) si l'on a,

outre (24),

(26) $$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$x$, $y$, $z$ désignant toujours les coordonnées de M. Or, si l'on remplace, dans cette dernière équation, $x$, $y$, $z$ par les développements (1), le terme constant et le terme en $h$ disparaissent, en vertu de (24). Divisant par $h^2$, il vient

(27) $$A a_2 + B b_2 + C c_2 + h(\ldots) = 0.$$

Si $h$ tend vers zéro, (27) devient (25), équation qui caractérise, comme nous l'avons vu, le plan osculateur [1].

Théorème III. — *Le plan osculateur en* $M_0$ *est la limite du plan mené par* $M_0T_0$ *parallèlement à la tangente en* M, *quand* M *tend vers* $M_0$.

En effet, ce plan est représenté par (22), si l'on a, outre (24),

$$A\frac{dx}{dh} + B\frac{dy}{dh} + C\frac{dz}{dh} = 0.$$

En tenant compte de la deuxième équation (24) et divisant par $2h$, on retrouve (27). Le raisonnement s'achève comme précédemment.

On énonce quelquefois ce théorème, en disant que *tout plan osculateur est parallèle à deux tangentes infiniment voisines.*

*Remarque.* — Il résulte de l'un ou l'autre de ces deux derniers théorèmes que *le plan osculateur d'une courbe plane est le plan de cette courbe.*

226. Équation du plan osculateur. — Il importe de savoir écrire l'équation du plan osculateur en un point quelconque d'une courbe donnée.

A cet effet, imaginons que les développements (1) aient été obtenus

(1) Ce théorème explique très bien le précédent. Il montre aussi pourquoi le plan osculateur traverse la courbe. Si l'on considère, en effet, le plan tangent $M_0T_0M$, les deux arcs élémentaires issus de $M_0$ sont d'un même côté de ce plan. L'un de ces arcs est d'ailleurs $\overset{\frown}{M_0M}$. Lorsque le plan tangent tend vers le plan osculateur, il devient de plus en plus petit et finalement disparait. La courbe, qui traversait le plan tangent en M, traverse maintenant le plan osculateur en $M_0$.

par la formule de Taylor. Nous avons alors

$$a_1 = x'_0;\quad b_1 = y'_0,\quad c_1 = z'_0;\quad a_2 = \frac{x''_0}{2},\quad b_2 = \frac{y''_0}{2},\quad c_2 = \frac{z''_0}{2}.$$

Si nous nous reportons aux conditions (24) et (25) et si nous supprimons les indices o, pour simplifier l'écriture, nous voyons que *le plan osculateur en* M ($x$, $y$, $z$) *est représenté par l'équation*

$$(28)\qquad A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

*à condition que l'on ait*

$$(29)\qquad Ax'+By'+Cz'=0,\qquad Ax''+By''+Cz''=0.$$

Éliminant A, B, C entre (28) et (29), nous avons *l'équation du plan osculateur* sous la forme

$$(30)\qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

On peut quelquefois simplifier cette équation par la remarque suivante, d'une assez grande importance pratique :

*Si* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *sont des quantités seulement proportionnelles à* $x'$, $y'$, $z'$, *c'est-à-dire un système quelconque de paramètres directeurs de la tangente, l'équation du plan osculateur peut s'écrire*

$$(31)\qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, soient

$$x'=\rho\alpha,\qquad y'=\rho\beta,\qquad z'=\rho\gamma,$$

$\rho$ désignant un facteur quelconque. Portons dans (30)

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \rho\alpha & \rho\beta & \rho\gamma \\ \rho'\alpha+\rho\alpha' & \rho'\beta+\rho\beta' & \rho'\gamma+\rho\gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant se décompose en deux (t. I, n° 281). L'un des déterminants partiels a pour dernière ligne $\rho'\alpha$, $\rho'\beta$, $\rho'\gamma$ : il est nul, parce que cette ligne est proportionnelle à la seconde (t. I, n° 281).

L'autre déterminant est visiblement égal au déterminant (31), multiplié par $\frac{\rho^2}{dt}$. Notre remarque est donc justifiée.

227. Au lieu d'utiliser les équations (30) ou (31), il est quelquefois plus simple d'employer des procédés particuliers. Il peut arriver, par exemple, que l'on découvre des coefficients A, B, C vérifiant les équations (29). Portant dans (28), on a l'équation du plan osculateur.

On peut aussi, dans certains cas, chercher un plan qui coupe la courbe en trois points confondus. On est alors ramené à écrire qu'une certaine équation a une racine triple, laquelle racine triple donne le point d'osculation (*cf.* n° 222).

Appliquons ce procédé *en coordonnées tétraédriques*. Soient $x, y, z, t$ les coordonnées du point courant M, exprimées en fonction d'un certain paramètre $u$. Soit

$$AX + BY + CZ + DT = 0 \tag{32}$$

l'équation du plan osculateur. Le paramètre $u$ de M doit satisfaire aux trois équations

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax + By + Cz + Dt = 0, \qquad Ax' + By' + Cz' + Dt' = 0, \\ \qquad\qquad Ax'' + By'' + Cz'' + Dt'' = 0. \end{array}\right.$$

En éliminant A, B, C, D, nous avons l'équation du plan osculateur

$$(34)\quad \begin{vmatrix} X & Y & Z & T \\ x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation s'applique, en particulier, *en coordonnées cartésiennes homogènes*. Elle peut être avantageuse, lorsque les coordonnées ordinaires se présentent sous la forme de fractions, ayant le même dénominateur, d'autant plus que ce dénominateur se trouve en facteur, d'après un calcul du n° 221, dans chacun des mineurs $y'z'' - z'y''$, $z'x'' - x'z''$, $x'y'' - y'x''$ et, par suite, dans l'équation (30) tout entière.

L'équation (34), au contraire, élimine ce facteur, que l'on pourrait très bien ne pas apercevoir, dans l'application de l'équation (30).

# CHAPITRE XV.

## ASYMPTOTES.

228. Définitions. — Soit une courbe quelconque (C), plane ou gauche. Imaginons qu'un point M puisse se déplacer, sur cette courbe, de manière que sa distance à un point fixe O croisse au delà de toute limite. On dit alors qu'il décrit une *branche infinie* de la courbe.

Si, en même temps, la droite OM tend vers une position limite déterminée $O\lambda$ (¹), on dit que *la courbe passe par le point à l'infini dans la direction* $O\lambda$ (nº 38). Cette direction est appelée *direction asymptotique* de la branche considérée. Voyons ce que devient la *définition de la tangente en un point* $M_0$, *lorsqu'on suppose ce point à l'infini.*

Nous joignons $MM_0$ ; autrement dit, nous menons par M la parallèle à $O\lambda$. Puis, nous cherchons la limite de cette droite quand M tend vers $M_0$, c'est-à-dire s'éloigne à l'infini dans la direction $O\lambda$. Plusieurs cas peuvent se présenter :

1º $M\lambda$ tend vers une position limite déterminée (A), située à distance finie (*fig.* 20, *a*). On dit alors que *la droite* (A) *est asymptote à la branche de courbe considérée.*

2º $M\lambda$ s'éloigne indéfiniment. Dans ce cas, *la tangente est la droite de l'infini.* Par analogie avec le cas particulier de la parabole (nº 153), on dit que la branche considérée est une *branche parabolique*, de direction $O\lambda$. Elle affecte la forme d'une parabole, dont

---

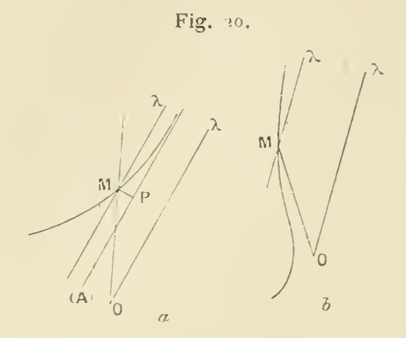
(¹) Il peut arriver que cette position limite n'existe pas, soit que OM tourne indéfiniment autour de O, auquel cas la branche considérée est appelée *spirale*, soit que OM oscille indéfiniment, comme il arrive, par exemple, pour la courbe

$$y = x \sin \frac{1}{x},$$

lorsque $x$ devient infini.

l'axe serait parallèle à $O\lambda$, du moins tant qu'on n'en regarde qu'une portion suffisamment éloignée (*fig.* 20, *b*).

Fig. 20.




3° $M\lambda$ oscille indéfiniment, sans tendre vers aucune position limite. Dans ce cas, *la tangente au point à l'infini n'existe pas*. On démontre que ceci n'est d'ailleurs possible que pour des courbes transcendantes [1], de sorte que, *pour une courbe algébrique, la tangente en un point à l'infini est toujours soit une asymptote, soit la droite de l'infini.*

229. *Autre définition de l'asymptote.* — Revenons au cas de la figure 20, *a*, et abaissons la perpendiculaire MP sur (A). Dire que $M\lambda$ tend vers (A) équivaut évidemment à dire que MP tend vers zéro. On peut donc encore définir l'asymptote comme étant *une droite dont la distance à un point de la courbe tend vers zéro, lorsque ce point s'éloigne indéfiniment.*

*Courbes asymptotes.* — A ce propos, signalons l'extension suivante. On dit que *deux branches infinies* (C) *et* (C') *sont asymptotes* (*fig.* 21), *lorsqu'on peut joindre chaque point* M *de* (C) *à un point* M' *de* (C'), *de telle manière que la distance* MM' *tende vers zéro, lorsque* M *va à l'infini sur* (C) *et, par suite,* M' *sur* (C').

Il est clair que la définition précédente rentre dans celle-ci : il suffit de prendre M' en P.

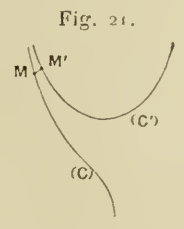
Deux branches qui ont une même asymptote sont évidemment asymptotes. Mais on peut aussi imaginer des *branches paraboliques asymptotes;* tel est le cas de la figure 21. En particulier, l'une de ces dernières, (C') par exemple,

---

[1] Telle est la sinusoïde (t. I, n° 76), pour laquelle $M\lambda$ oscille entre les deux droites $y = \pm 1$.

peut être une véritable parabole. Il peut être utile, lorsqu'une courbe possède une branche parabolique, d'en chercher une *parabole asymptote :* c'est

Fig. 21.




là, en effet, un moyen de se mieux renseigner sur la manière dont cette branche se comporte à l'infini.

230. Détermination des asymptotes d'une courbe plane définie paramétriquement. — La première chose à faire est de chercher les paramètres des points à l'infini. On les obtient en calculant les *valeurs de $t$ qui rendent $x$ ou $y$ ou $x$ et $y$ infinis.* En particulier, si, comme il arrive souvent, $x$ et $y$ se présentent sous la forme de fractions, on doit chercher les racines des dénominateurs et vérifier qu'elles n'annulent pas en même temps les numérateurs correspondants. Il ne faut pas oublier non plus la valeur $t = \infty$, lorsqu'un numérateur est, pour cette valeur, infiniment grand d'ordre supérieur au dénominateur correspondant.

Les paramètres des points à l'infini étant obtenus, soit $t_0$ l'un d'eux. Il s'agit maintenant de *déterminer, si elles existent, la direction asymptotique et l'asymptote correspondantes.*

*Lorsqu'une seule des deux coordonnées devient infinie,* la question est tout de suite résolue. Supposons, par exemple, que, pour $t = t_0$, $y$ devienne infini, $x$ tendant, au contraire, vers une valeur finie $x_0$. Il est à peu près évident que la droite $x = x_0$ est, dans ce cas, l'asymptote elle-même. En effet, lorsque $t$ tend vers $t_0$, M va à l'infini et la distance [1] $\mathrm{MP} = |x - x_0|$ tend vers zéro.

Arrivons maintenant au cas général où *$x$ et $y$ deviennent simultanément infinis.*

Par définition, la direction asymptotique est la direction limite de

---

[1] Cette distance est oblique à l'asymptote, lorsque les coordonnées sont obliques. Mais cela n'a aucune importance, car la distance normale, qui est encore plus petite, tend, *a fortiori,* vers zéro.

la droite OM (*fig.* 20). Or, si $x$ et $y$ sont les coordonnées du point M, OM a pour coefficient angulaire $\frac{y}{x}$. On aura donc le coefficient angulaire de la direction asymptotique en cherchant la limite $m$ de $\frac{y}{x}$ pour $t = t_0$ (t. I, n° 126, II).

L'équation de M$\lambda$ est maintenant

$$Y - y = m(X - x)$$

ou

(1) $$Y - mX = y - mx.$$

Nous aurons l'équation de l'asymptote en cherchant la limite de la quantité $\delta = y - mx$ (t. I, n° 126, IV). Soit $d$ cette limite, supposée finie ; l'équation de l'asymptote s'écrit

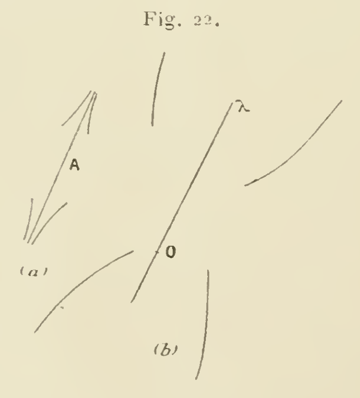
(2) $$Y - mX = d.$$

Si, au contraire, $\delta$ augmente indéfiniment, la droite M$\lambda$ s'éloigne à l'infini, on a une branche parabolique.

231. Position de la courbe par rapport a son asymptote. — Il y a lieu de reprendre, pour le cas d'un point à l'infini, l'étude qui a fait l'objet des nos 216 à 218.

Si l'on donne à $t$ des valeurs $t_0 + h$ un peu plus grandes que $t_0$ ($h > 0$), M est très éloigné sur une certaine branche. Si l'on donne

Fig. 22.




à $t$ des valeurs un peu plus petites que $t_0$ ($h < 0$), M est très éloigné sur une autre branche. Il s'agit de savoir reconnaître la position

qu'occupe chacune de ces branches, parmi les quatre positions possibles indiquées par les figures 22 ($a$ et $b$).

Supposons d'abord qu'on ait une asymptote parallèle à $Oy$. Il suffit de connaître les signes de $y$ et de $x - x_0 = \overline{PM}$. Pour cela, on en cherchera les parties principales, en prenant $h$ pour infiniment petit principal ([1]).

Supposons maintenant que l'asymptote ne soit parallèle à aucun des axes et soit représentée par l'équation (2). Pour savoir dans quelle région se trouve le point $M(x, y)$ par rapport à cette droite, il nous faut connaître le signe de $V = y - mx - d = \delta - d$ (n° 71) ([2]). Cette quantité est d'ailleurs infiniment petite, puisque $d$ est la limite de $\delta$ (n° 230). On devra en chercher la partie principale. En outre, on aura à se préoccuper du signe de $x$ (ou de $y$), afin de savoir vers quelle extrémité de l'asymptote la courbe se dirige. Ce signe se déterminera toujours au moyen de la partie principale.

Supposons enfin qu'on ait une branche parabolique, dans la direction $O\lambda$, de coefficient angulaire $m$ ([3]). La quantité $\delta$ augmente indéfiniment en valeur absolue. Suivant qu'elle tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la parallèle $M\lambda$, dont $\delta$ est l'ordonnée à l'origine, s'éloigne à l'infini dans la région des $y$ positifs ou dans la région des $y$ négatifs. D'autre part, le signe de $x$ ([4]) nous indique si le point M s'éloigne vers les $x$ positifs ou vers les $x$ négatifs. Cela suffit pour placer la courbe.

Résumons les résultats établis dans ce numéro et dans le précédent en une règle pratique qu'il importe de retenir :

Règle. — *On cherche d'abord les valeurs de $t$ qui rendent $x$ ou $y$ ou $x$ et $y$ infinis.*

*Si $y$ seul devient infini, $x$ prenant une valeur finie $x_0$, la*

---

([1]) Si $t_0 = \infty$, on prendra $h = \frac{1}{t}$. Plus généralement, on peut prendre pour infiniment petit principal n'importe quelle fonction de $t$ qui tende vers zéro, quand $t$ tend vers $t_0$.

([2]) Observons que la région positive est celle du point à l'infini sur la partie positive de $Oy$.

([3]) Si $m$ est infini, de même d'ailleurs que si $m = 0$, il suffit de chercher les signes de $x$ et de $y$.

([4]) Si $m$ est fini et $\neq 0$, ce signe est aussi celui de $y$ ou le signe opposé, suivant que $m$ est $> 0$ ou $< 0$, puisque $\frac{y}{x}$ tend vers $m$.

*droite* $x=x_0$ *est asymptote. On détermine sa position vis-à-vis de la courbe au moyen des signes de* $y$ *et de* $x-x_0$.

*Si* $x$ *et* $y$ *deviennent simultanément infinis, le coefficient angulaire* $m$ *de la direction asymptotique est la limite de* $\frac{y}{x}$. *Si cette limite est nulle ou infinie, on a une branche parabolique, de direction* $Ox$ *ou* $Oy$, *et dont on détermine la position au moyen des signes de* $x$ *et de* $y$. *Sinon, on cherche la limite* $d$ *de* $\delta=y-mx$. *Si cette limite est infinie, on a une branche parabolique, dont on détermine la position au moyen des signes de* $\delta$ *et de* $x$ (*ou de* $y$). *Si elle est finie, on a une asymptote d'équation* $Y-mX=d$. *On reconnaît la position de la courbe par rapport à cette asymptote au moyen du signe de la quantité* $\delta-d$.

232. Emploi des développements limités de $x$ et de $y$. — On peut, très rapidement, effectuer toutes les opérations précédentes, quand on connaît des développements limités, poussés suffisamment loin, de $x$ et de $y$. Mais, dans le cas actuel, ces développements, que nous supposons ordonnés suivant les puissances croissantes de l'infiniment petit $h$, doivent commencer par une puissance négative (t. I, n° 112).

Bornons-nous à considérer le cas où $x$ et $y$ deviennent simultanément infinis et sont, en outre, infiniment grands du premier ordre par rapport à $\frac{1}{h}$. On a des développements de la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{a}{h}+a_0+a_1h+a_2h^2+\ldots, \\ y=\dfrac{b}{h}+b_0+b_1h+b_2h^2+\ldots. \end{cases}$$

*On peut écrire immédiatement l'équation de l'asymptote*

$$(4)\qquad aY-bX-(ab_0-ba_0)=0.$$

On peut le vérifier en appliquant la règle précédente. On peut aussi, plus rapidement, observer que la quantité

$$(5)\qquad \Delta=ay-bx-(ab_0-ba_0)=h(ab_1-ba_1)+h^2(ab_2-ba_2)+\ldots,$$

qui est proportionnelle à la distance MP, tend vers zéro avec $h$. De plus, le signe de cette quantité donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

233. Le cas particulier où *la courbe* (C) *est donnée sous la forme* $y=f(x)$

mérite, bien qu'on puisse le faire rentrer dans le précédent, en posant $x = t$, d'être examiné à part, dans le cas du moins où $y$ devient infini en même temps que $x$.

Dans cette hypothèse, calculons le *développement limité de $y$ suivant les puissances décroissantes de $x$, en nous arrêtant aussitôt que nous obtenons une puissance négative*, soit

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 + \frac{A}{x^p} + \ldots.$$

*La courbe* (C′), d'équation

$$Y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

*est asymptote à la proposée.* En effet, si nous joignons les deux points M et M′ de même abscisse, la distance $\overline{M'M} = y - Y = \frac{A}{x^p} + \ldots$ tend vers zéro, quand $x$ croît indéfiniment. De plus, le signe de $\frac{A}{x^p}$ nous donne le sens du vecteur $\overline{M'M}$ et nous indique, par conséquent, *la position de* (C) *par rapport à* (C′).

Si, comme le suppose implicitement le développement ci-dessus, $n$ est entier, la courbe (C′) est une parabole du $n^{ième}$ degré. Lorsque $n = 1$, c'est une droite; c'est l'asymptote. Lorsque $n = 2$, c'est une véritable parabole: la courbe (C) n'a pas d'asymptote, mais une branche parabolique dans la direction $Oy$; de même que si $n > 2$.

Il peut arriver aussi (t. I, n° 112) que le développement procède suivant des puissances fractionnaires. Dans ce cas, il n'y a pas de terme constant $a_0$. Si $n > 1$, on a une branche parabolique dans la direction $Oy$; si $n < 1$, on a une branche parabolique, dans la direction $Ox$. Le rapport $\frac{y}{x}$ tend en effet vers $\infty$, dans le premier cas, et vers o, dans le second cas.

234. Ordre de contact d'une asymptote. — Étudions le nombre des points de rencontre de la courbe avec l'asymptote, qui sont rejetés à l'infini.

Si l'on coupe par une droite quelconque (D), d'équation

$$(6) \qquad AX + BY + C = 0,$$

l'équation aux $h$ des points d'intersection s'écrit, en admettant les développements (3),

$$(7) \qquad \begin{aligned}&(Aa + Bb) + h(Aa_0 + Bb_0 + C)\\ &\quad + h^2(Aa_1 + Bb_1) + h^3(Aa_2 + Bb_2) + \ldots = 0.\end{aligned}$$

Si $Aa + Bb = 0$, c'est-à-dire si (D) est parallèle à l'asymptote (4), on a la racine $h = 0$. Cette racine est simple et, par conséquent, il y a un seul point d'intersection à l'infini, tant que $Aa_0 + Bb_0 + C \neq 0$, c'est-à-dire tant que

(D) n'est pas l'asymptote elle-même. Si (D) est l'asymptote, la racine $h = 0$ est double, *en général; il y a deux points d'intersection à l'infini.* Comme lorsqu'il s'agit du contact en un point à distance finie, nous dirons que, dans ce cas, l'asymptote a un contact du premier ordre avec la courbe.

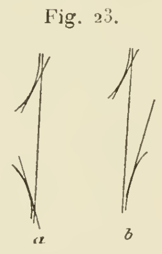
Il peut arriver accidentellement que le coefficient de $h^2$, dans (7), s'annule aussi, quand on coupe par l'asymptote. Soit, d'une manière générale,

$$(A a_p + B b_p) h^{p+1}$$

le premier terme non nul. Dans ce cas, $p+1$ *points d'intersection sont rejetés à l'infini: l'asymptote a un contact d'ordre p avec la courbe.*

Comme au n° 219, nous dirons que le point à l'infini considéré est un *point d'inflexion*, dès que $p > 1$ et, plus particulièrement, lorsque $p = 2$. Dans ce dernier cas et, d'une façon générale, lorsque $p$ est pair, V est d'ordre infinitésimal pair; donc, les deux branches de courbe positive et négative (n° 217) sont du même côté de l'asymptote (*fig.* 23, *a*). Au contraire, si $p$ est impair, en particulier lorsque $p = 1$, les deux branches sont de part et d'autre de l'asymptote (*fig.* 23, *b*). Ces conclusions, comme on le voit, sont opposées à celles que nous avons établies pour les points à distance finie (n° 218).

Fig. 23.




On a aussi des résultats contraires, quand on examine les variations du coefficient angulaire de la tangente, à la traversée d'un point à l'infini. Dans le cas de la figure 23, *b*, qui est celui du point ordinaire, on voit que le sens de rotation de la tangente change, quand celle-ci devient asymptote; donc, le coefficient angulaire de la tangente passe par un maximum ou un minimum. Au contraire, dans la figure 23, *a*, la tangente continue à tourner dans le même sens (sens inverse des aiguilles d'une montre), quand on passe de la branche supérieure à la branche inférieure.

Pour terminer ce paragraphe, nous ferons observer que *l'ordre de contact d'une asymptote* (A) *est égal à l'ordre infinitésimal de la distance* MP (*fig.* 20, *a*), *quand on prend* $\frac{1}{OM}$ *pour infiniment petit principal*. En effet, MP est proportionnel à V. Or, si $p$ est l'ordre du contact, V est d'ordre $p$ par rapport à $h$. Mais, la partie principale de l'infiniment grand OM ou $\sqrt{x^2+y^2}$ est, d'après (3), $\frac{1}{h}\sqrt{a^2+b^2}$. Celle de $\frac{1}{OM}$ est $\frac{h}{\sqrt{a^2+b^2}}$; de sorte

que $h$ est du même ordre que $\frac{1}{OM}$. Cela justifie bien la propriété ci-dessus énoncée, qui pourrait servir de définition à l'ordre de contact d'une asymptote.

235. Points a l'infini d'une courbe plane, algébrique, définie par une équation implicite. — Soit une courbe (C), plane, algébrique et de degré $m$, définie par l'équation

(8) $$f(x, y) = 0.$$

Pour avoir ses points à l'infini, nous passons en coordonnées homogènes (n° 39) et obtenons l'équation

(9) $$F(X, Y, T) = 0.$$

Les coordonnées homogènes des points cherchés sont définies par l'équation (9) et la suivante

(10) $$T = 0.$$

Or, si l'on tient compte de (10), (9) devient

(11) $$\varphi(X, Y) = 0,$$

$\varphi(X, Y)$ désignant l'ensemble des termes de $F(X, Y, T)$ qui ne renferment pas T. Ces termes proviennent évidemment des termes de plus haut degré $\varphi(x, y)$ de $f(x, y)$.

Rappelons-nous maintenant que le point $(X, Y, 0)$ est à l'infini dans la direction de paramètres directeurs X, Y. Si donc X et Y vérifient (11), ce sont les paramètres directeurs d'une direction asymptotique, et réciproquement.

Imaginons dès lors qu'on mène toutes les directions asymptotiques par l'origine; on obtient ce qu'on appelle *le faisceau des directions asymptotiques*. Tout point de ce faisceau a des coordonnées $x$, $y$ proportionnelles à une solution X, Y de (11), et réciproquement. Comme $\varphi(X, Y)$ est une fonction homogène, un tel point doit vérifier l'équation

(12) $$\varphi(x, y) = 0,$$

et réciproquement.

On conclut de là, finalement, que l'équation (12) représente le faisceau des directions asymptotiques. Elle est d'ailleurs de degré $m$;

donc, le faisceau comprend $m$ droites, réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues. Ceci s'explique d'ailleurs, si l'on remarque qu'*a priori* une courbe algébrique de degré $m$ doit posséder $m$ points à l'infini, intersection de cette courbe avec la droite de l'infini.

Des considérations qui précèdent, nous tirons la règle suivante, qu'il importe de retenir et qu'on retrouve, du reste, instantanément, en songeant à couper par la droite de l'infini :

Règle. — *On obtient l'équation du faisceau des directions asymptotiques en annulant l'ensemble des termes de plus haut degré de l'équation proposée.*

236. Supposons qu'on ait isolé un rayon du faisceau précédent, soit

$$\alpha x + \beta y = 0. \tag{13}$$

Il s'agit de trouver l'asymptote correspondante.

Tout d'abord, on peut observer que cette asymptote n'est autre, par définition (n° 228), que la tangente au point à l'infini $M_0$, de coordonnées homogènes $(\beta, -\alpha, 0)$. En appliquant l'équation générale (10) du n° 197, on obtient pour *équation homogène de l'asymptote :*

$$XF'_X(\beta, -\alpha, 0) + YF'_Y(\beta, -\alpha, 0) + TF'_T(\beta, -\alpha, 0). \tag{14}$$

Toutefois, cette équation n'a de sens que si les dérivées partielles $F'_X, F'_Y, F'_T$ ne s'annulent pas simultanément [1] pour $X = \beta$, $Y = -\alpha$, $T = 0$, c'est-à-dire *si le point à l'infini* $M_0$ *n'est pas un point singulier* (n° 198). La méthode suivante, au contraire, est applicable, quelle que soit la nature de ce point.

Coupons la courbe par une droite quelconque parallèle à (13), soit

$$\alpha x + \beta y = \lambda. \tag{15}$$

Parmi les points d'intersection doit se trouver le point $M_0$, de sorte qu'il reste au plus $m - 1$ points à distance finie. Supposons, d'une

---

[1] Si $F'_X$ et $F'_Y$ seules s'annulent, la tangente est la droite de l'infini; on a une branche parabolique.

manière générale, que ces derniers soient en nombre[1] $m - p$ ($p \geq 1$) et ceci, quel que soit $\lambda$. Toute sécante passant par $M_0$ coupe alors en $p$ points confondus en $M_0$. Donc $M_0$ est un point multiple, d'ordre $p$ (nº 198). On a les $p$ tangentes en ce point en écrivant qu'un point de plus, parmi les points d'intersection, est à l'infini ou, ce qui revient au même, qu'il y a un point de moins à distance finie. Ce résultat est obtenu, par exemple, en annulant le coefficient de la plus haute puissance de $x$ (ou de $y$) dans l'équation aux $x$ (ou aux $y$) des points d'intersection. On est conduit de la sorte à une équation algébrique en $\lambda$, dont le degré est, en général, $p$, puisqu'il doit y avoir $p$ tangentes en $M_0$. Dans ce cas, il y a $p$ asymptotes données par l'équation (15), où l'on doit remplacer successivement $\lambda$ par les $p$ racines de l'équation ci-dessus mentionnée. Toutefois, il peut arriver que le degré de cette dernière s'abaisse et soit seulement $p - q$ ($q \leq p$). Dans ce cas, il y a seulement $p - q$ asymptotes; les $q$ autres tangentes en $M_0$ sont confondues avec la droite de l'infini.

Des considérations qui précèdent, nous tirons la règle pratique suivante :

Règle pratique. — *Pour trouver la ou les asymptotes qui correspondent à une direction asymptotique déterminée, on coupe la courbe par une parallèle quelconque à cette direction. Le nombre des points d'intersection qui sont rejetés à l'infini donne l'ordre de multiplicité du point à l'infini dans la direction considérée. En écrivant qu'un point de plus est rejeté à l'infini, on a les asymptotes cherchées.*

237. Un cas particulier, remarquable par sa simplicité, est celui où la direction asymptotique est parallèle à l'un des axes de coordonnées, soit $Ox$, pour fixer les idées. Couper par une parallèle à $Ox$ revient à considérer $y$ comme constant dans l'équation de la courbe. Le degré de cette dernière par rapport à $x$, retranché du degré $m$ de la courbe, donne, en conséquence, l'ordre de multiplicité $p$ du point à l'infini sur $Ox$. Les tangentes en ce point sont obtenues en annulant le coefficient de la plus haute puissance de $x$, ce qui conduit à

(1) Ce nombre est, par exemple, le degré de l'équation aux $x$ (ou aux $y$) des points d'intersection.

une équation en $y$, de degré $\leqq p$, dont les racines sont les ordonnées des asymptotes cherchées. Donc :

Règle. — *Lorsque l'axe des $x$ est direction asymptotique, on a les asymptotes correspondantes en annulant le coefficient de la plus haute puissance de $x$ dans l'équation proposée* (¹).

On a une règle analogue pour $Oy$.

238. Position de la courbe par rapport a une asymptote. — Nous nous bornerons à indiquer le principe de la méthode à employer pour résoudre ce problème, qui n'est simple que dans le cas où le point à l'infini considéré n'est pas un point multiple (²). Soit $m$ le coefficient angulaire de la direction asymptotique, que nous pouvons toujours supposer fini, quittes à échanger les rôles de $x$ et de $y$, si $m$ était infini. L'équation de l'asymptote est de la forme

$$Y = mX + d$$

et se détermine comme il a été expliqué au numéro précédent. Il s'agit d'avoir le signe, pour $x = \pm\infty$, de la quantité infiniment petite $V = y - mx - d$. A cet effet, nous cherchons sa partie principale en fonction de l'infiniment grand $x$ ou, si l'on préfère, en fonction de l'infiniment petit $\frac{1}{x}$. Opérant comme au n° 223, nous éliminons $y$, de manière à obtenir l'équation algébrique qui lie $x$ et $V$, soit

$$(16) \qquad f(x, mx + d + V) = 0.$$

Puis, procédant toujours comme au n° 223, *nous supprimons tout terme reconnu comme infiniment petit par rapport à un terme non encore supprimé.*

Pratiquement, si le point à l'infini est simple, l'équation (16) est de degré $m-1$ par rapport à $x$. Le coefficient de $x^{m-1}$ doit s'annuler pour $V = 0$, puisque, dans cette hypothèse, l'équation (16) devient l'équation aux abscisses des points de rencontre de la courbe avec l'asymptote. Le terme en $x^{m-1}$ est donc de la forme $AVx^{m-1}$, A étant une constante (³). Tout autre terme renfermant V sera à supprimer, car $x$ n'y figurera qu'avec un exposant $< m-1$ et le quotient de ce terme par $AVx^{m-1}$ sera nul, pour $x = \infty$. Resteront les termes indépendants de V (⁴), dont on ne gardera que celui dont le degré

(¹) Si l'on passe en coordonnées homogènes, cette règle apparaît comme un cas particulier du théorème énoncé au n° 200, à propos des points multiples en coordonnées trilinéaires.

(²) Pour le cas d'un point multiple, *voir* N , nᵒˢ 61 à 65.

(³) Il ne saurait renfermer des puissances de V supérieures à la première, car l'équation (16) est de degré $m$, par rapport à l'ensemble des variables $x$ et V.

(⁴) Pour les apercevoir aisément, il est commode de faire $V = 0$, dans l'équation.

sera le plus élevé, pour une raison analogue à la précédente. Ce degré sera $\leqq m-2$, puisque l'unique terme en $x^{m-1}$ est $\mathrm{AV}x^{m-1}$. Il nous restera finalement une équation de la forme

$$\mathrm{AV}x^{m-1}+\mathrm{B}x^{m-p}=0 \qquad (p \geqq 2);$$

d'où nous tirerons la partie principale de V :

$$(17) \qquad \mathrm{V}=-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}x^{1-p}=-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{p-1}.$$

Si $p$ est pair (par exemple, $p=2$), les deux branches sont de part et d'autre de l'asymptote (*fig.* 23 *b*). Si $p$ est impair ($p \geqq 3$), on a un point d'inflexion, avec la disposition de la figure 23 *a*.

239. Points à l'infini d'une surface algébrique. — Soit une surface algébrique (S), de degré $m$ et d'équation

$$(18) \qquad f(x, y, z)=0.$$

En passant en coordonnées homogènes, on voit, comme au n° 235, que les points à l'infini de cette surface sont définis par les deux équations

$$(19) \qquad \mathrm{T}=0, \qquad \varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})=0,$$

$\varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ représentant l'ensemble des termes de plus haut degré de $f(x, y, z)$. Ils constituent une courbe algébrique, plane et de degré $m$, section de (S) par le plan de l'infini. Si l'on joint l'un d'eux à l'origine, on obtient *une direction asymptotique de la surface*. Si on les joint tous à l'origine, on obtient un cône algébrique, de degré $m$, qu'on appelle *cône des directions asymptotiques* et dont l'équation est

$$(20) \qquad \varphi(x, y, z)=0.$$

240. Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les paramètres directeurs d'une direction asymptotique particulière $\mathrm{O}\lambda$. Le point à l'infini $\mathrm{M}_0$ correspondant a pour coordonnées homogènes $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$. Le plan tangent en ce point a pour équation homogène (n° 204)

$$(21) \quad \mathrm{XF}'_{\mathrm{X}}(\alpha, \beta, \gamma, 0)+\mathrm{YF}'_{\mathrm{Y}}(\alpha, \beta, \gamma, 0)+\mathrm{ZF}'_{\mathrm{Z}}(\alpha, \beta, \gamma, 0)+\mathrm{TF}'_{\mathrm{T}}(\alpha, \beta, \gamma, 0)=0,$$

en supposant toutefois que les quatre dérivées partielles ne soient pas nulles simultanément, c'est-à-dire *que* $\mathrm{M}_0$ *soit un point simple*.

Si $F'_X$, $F'_Y$, $F'_Z$ ne sont pas toutes trois nulles, le plan (21) est à distance finie et porte le nom de *plan asymptote*. C'est le lieu des tangentes en $M_0$ aux courbes tracées sur la surface et passant par ce point ; c'est donc le *lieu des asymptotes parallèles* à $O\lambda$.

Si $F'_X = F'_Y = F'_Z = 0$, *le plan tangent est le plan de l'infini*. Les courbes tracées sur la surface et passant par $M_0$ ont des branches paraboliques, dans la direction $O\lambda$.

241. Si le point $M_0$ est multiple, on procède comme il suit. Coupons par une parallèle quelconque à $O\lambda$ ; si $M(x, y, z)$ est un point de cette parallèle, l'équation aux $\rho$ des points d'intersection, par exemple, s'écrit

$$(22) \qquad f(x + \rho\alpha, y + \rho\beta, z + \rho\gamma) = 0.$$

Soit $m - p$ le degré de cette équation par rapport à $\rho$. Il y a $p$ points d'intersection à l'infini; le point est multiple d'ordre $p$.

La sécante $M\lambda$ sera tangente à l'infini, si un point de plus, parmi les points d'intersection, va à l'infini. Ceci s'exprime en annulant le coefficient de $\rho^{m-p}$, dans (22). On obtient ainsi une équation en $x, y, z$, de degré $\leqq p$, qui représente le cône des tangentes en $M_0$ (n° 206), c'est-à-dire le *cylindre des asymptotes parallèles à* $O\lambda$.

Ce cylindre doit être, en général, le degré $p$ (n° 206). Mais, son degré peut s'abaisser, du fait que le cône des tangentes en $M_0$ dégénère en un véritable cylindre et le plan de l'infini, compté un nombre de fois égal à l'abaissement du degré.

Il va sans dire que la méthode que nous venons de décrire s'applique, en particulier, lorsque $p = 1$ et peut être employée concurremment avec celle du numéro précédent.

# CHAPITRE XVI.

## CONSTRUCTION DES COURBES PLANES.

242. Courbes définies paramétriquement. — Le mode de représentation analytique le plus favorable à la construction des courbes planes est celui de la représentation paramétrique.

Soit une courbe (C), définie par les équations

$$(1) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t).$$

La méthode générale que l'on doit suivre, pour construire une telle courbe, se résume en quelques mots :

*On étudie les variations des fonctions $x$ et $y$; puis, faisant croître $t$ de $-\infty$ à $+\infty$, on suit, de proche en proche, le déplacement du point $M(x,y)$, en s'aidant du tableau de variation précédemment construit.*

En pratique, cette règle doit être complétée par un certain nombre d'observations.

243. Choix de l'intervalle de variation. — L'opération par laquelle on doit toujours commencer est la détermination de l'intervalle de variation de $t$ [1].

D'une manière générale, cet intervalle doit comprendre *toutes les valeurs de $t$, pour lesquelles $x$ et $y$ sont* simultanément *définis*. Mais, on peut souvent le réduire par des considérations de périodicité ou de symétrie (*cf.*, t. I, n° 66).

I. *Périodicités.* — Si les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ ont une période

[1] Nous ne saurions trop engager le lecteur à se bien pénétrer de cette recommandation, que les commençants ont la fâcheuse tendance d'oublier, tant ils sont pressés de calculer les dérivées de $x$ et de $y$.

commune T, il est clair qu'on peut se borner à faire varier $t$ dans un *intervalle de longueur* T, car si l'on dépassait cet intervalle, on retomberait sur les mêmes valeurs de $x$ et de $y$, donc sur les mêmes points.

Il peut arriver aussi que $x$ et $y$ donnent lieu aux identités

$$(2) \qquad f(t+\mathrm{T}) \equiv f(t) + x_0, \qquad g(t+\mathrm{T}) \equiv g(t) + y_0,$$

$x_0$ et $y_0$ désignant des constantes. Au point $\mathrm{M}(x, y)$, de paramètre $t$, on peut faire correspondre le point $\mathrm{M}'(x+x_0, y+y_0)$, de paramètre $t+\mathrm{T}$. On passe du premier au second par la translation constante, représentée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{V}}$, de composantes $x_0$, $y_0$. Dès lors, *on construira l'arc de courbe correspondant à un intervalle de variation de longueur* T. Si l'on veut ensuite la courbe en entier, il suffira d'*imprimer à l'arc obtenu les translations* $\pm\overrightarrow{\mathrm{V}}$, $\pm 2\overrightarrow{\mathrm{V}}$, $\pm 3\overrightarrow{\mathrm{V}}$, etc.

244. II. *Symétries.* — On a des symétries toutes les fois que, par un certain changement effectué sur la variable $t$, on obtient *un simple changement de signe d'une ou deux des coordonnées $x$ et $y$ ou bien un échange de ces coordonnées, combiné ou non avec un changement de signe.* On a, en effet, les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Les points $\mathrm{M}(x, y)$ et $\mathrm{M}'(x', y')$ sont symétriques par rapport à l'origine, si l'on a $x' = -x$, $y' = -y$.*

Ces deux égalités expriment, en effet (n° 23), que le milieu de MM' est l'origine.

Théorème II. — *Les points M et M' sont symétriques par rapport à $\mathrm{O}x$, si l'on a $x' = x$, $y' = -y$.*

A la vérité, il s'agit ici d'une symétrie parallèlement à $\mathrm{O}y$, qui ne devient une véritable symétrie (ou *symétrie droite*, par opposition à la *symétrie oblique*) que si les axes sont rectangulaires. Elle est caractérisée par le fait que MM' est parallèle à $\mathrm{O}y$ et a son milieu sur $\mathrm{O}x$. Or, la première condition se traduit par $x' = x$ et la seconde par $y' + y = 0$ ou $y' = -y$.

Théorème III. — *Les points* M *et* M′ *sont symétriques par rapport à* O$y$, *si l'on a* $x' = -x$, $y' = y$.

Démonstration analogue.

Théorème IV. — *Les points* M *et* M′ *sont symétriques par rapport à la première bissectrice, si l'on a* $x' = y$, $y' = x$.

En effet, le milieu de MM′ a pour coordonnées $\frac{x+y}{2}$, $\frac{y+x}{2}$; il est sur la première bissectrice. De plus, la droite MM′ a pour paramètres directeurs $y - x$, $x - y$; elle est parallèle à la seconde bissectrice, donc perpendiculaire à la première.

La symétrie dont il s'agit ici est donc une symétrie droite.

Théorème V. — *Les points* M *et* M′ *sont symétriques par rapport à la seconde bissectrice, si l'on a* $x' = -y$, $y' = -x$.

Démonstration analogue.

Aux cinq théorèmes précédents, on peut en rattacher d'autres, déduits des premiers par un simple changement de l'origine des coordonnées. C'est ainsi que si l'on a $x' = a - x$ et $y' = b - y$, les points M et M′ sont symétriques par rapport au point $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$. De même, si $x' = a - x$ et $y' = y$, M et M′ sont symétriques par rapport à la parallèle à O$y$, dont l'abscisse est $\frac{a}{2}$.

245. Cela posé, si l'on découvre qu'un certain changement, en général très simple (tel que $t \mid -t$, $t \mid \frac{1}{t}$, $t \mid \pi + t$, etc.), effectué sur la variable $t$, ne modifie pas ou ne fait qu'échanger les valeurs absolues de $x$ et de $y$ [1], on conclura à l'*existence d'un élément de symétrie* (*point ou droite*) *pour la courbe*. On pourra se borner à faire varier $t$ dans un intervalle tel que le changement précité, effectué sur les valeurs de cet intervalle, donne un nouvel intervalle, qui, ajouté au premier, reproduise l'intervalle entier de variation (qui, d'ailleurs, a pu déjà être réduit). Ayant construit l'arc de courbe correspondant à l'intervalle ainsi réduit, on n'aura plus qu'à *compléter par symétrie*.

---

[1] Ou bien donne des changements de la forme $x \mid a - x$, $y \mid b - y$.

246. Lorsqu'on a choisi l'intervalle de variation de $t$, on étudie, dans cet intervalle, les variations de $x$ et de $y$. On dresse un tableau figurant à la fois ces deux variations, comme il a été expliqué au n° 66 du Tome I.

On construit ensuite les points remarquables et les tangentes en ces points (¹) (n° 192). Nous appelons ainsi les points dont les $t$ figurent, comme valeurs remarquables, dans le tableau de variation. On peut y ajouter quelquefois, afin d'avoir des renseignements supplémentaires sur la courbe, les points de rencontre avec les axes, dont les $t$ sont obtenus en annulant $x$ ou $y$, ou bien les points multiples, les points d'inflexion.

Parmi les points remarquables doivent toujours figurer les points à l'infini, dont les $t$ sont les valeurs de discontinuité du tableau (t. I, n° 66, 2°). On doit construire, avec soin, les asymptotes correspondantes et, si possible, la position de la courbe (n° 231). On conçoit, en effet, toute l'importance du rôle que jouent les branches infinies dans la forme générale de la courbe. Si l'on oublie l'une d'elles ou si on la trace dans une mauvaise direction ou avec une fausse asymptote, l'aspect de la courbe peut être modifié du tout au tout.

Tous ces préliminaires étant terminés, on n'a plus qu'à tracer la courbe, en joignant par un trait continu et régulier les points précédemment construits (²) et tenant compte des tangentes et asymptotes. De plus, l'inspection du tableau indique, à chaque instant du tracé, par les sens de variation de $x$ et de $y$, si la courbe va de gauche à droite ou de droite à gauche, de bas en haut ou de haut en bas. Enfin, on complète, s'il y a lieu, par symétries.

247. Courbes définies par une équation implicite. — Soit la courbe (C) définie par l'équation

$$f(x, y) = 0. \tag{3}$$

---

(¹) Pour certains points importants, on peut aussi, si l'on veut, chercher la position de la courbe par rapport à la tangente (n° 217), si toutefois cette position ne résulte pas, d'une manière évidente, du tableau de variation, comme il arrive quelquefois.

(²) Si, dans certaines régions, on trouve que la courbe n'est pas suffisamment guidée, on construit d'autres points supplémentaires, en donnant à $t$ des valeurs numériques convenablement échelonnées. On peut même employer uniquement cette méthode empirique, quand on ne sait pas étudier les variations de $x$ et de $y$ à la manière classique.

Il n'existe pas de méthode générale pratique, pour construire une telle courbe d'une manière précise. La marche à suivre varie d'un exemple à l'autre. Nous nous bornerons à indiquer les cas les plus courants.

Citons, en premier lieu, le cas où l'on peut, de l'équation (3), déduire des équations paramétriques de la courbe. On est alors ramené aux paragraphes précédents, ce qui est très avantageux, pourvu que la représentation paramétrique obtenue ne soit pas trop compliquée.

Nous verrons, au Chapitre XVIII, comment on reconnaît, *a priori*, que certaines courbes algébriques, définies par une équation implicite, peuvent être représentées paramétriquement et comment on calcule pratiquement cette représentation. Pour l'instant, bornons-nous à mentionner le cas très simple où *l'équation* (3) *est résoluble par rapport à l'une des coordonnées*. En pratique, ceci n'a guère lieu que si l'équation est du premier degré par rapport à $x$ ou à $y$, ou encore, quelquefois, par rapport à $x^2$ ou à $y^2$. Quoi qu'il en soit, si l'on peut résoudre, sans trop de complication, par rapport à $y$, on obtient une équation de la forme $y = f(x)$ et l'on est ramené à étudier les variations de la fonction $f(x)$.

248. Ces hypothèses particulières étant exclues, voyons comment on peut effectuer la construction, en utilisant directement l'équation (3).

On commence par *chercher le plus de renseignements possibles* sur la courbe. C'est ainsi qu'*on détermine tout d'abord les asymptotes*, quand elles existent et, si cela est possible, la position de la courbe par rapport à elles. Puis, on peut chercher les points de rencontre avec les axes ([1]), quand cela présente peu de difficultés. Si l'on aperçoit un point multiple, on cherche les tangentes en ce point (n° 199), comme on peut le faire, au surplus, pour tout point simple obtenu comme point remarquable.

On peut aussi, en s'appuyant sur les théorèmes du n° 244, essayer de *découvrir des symétries*. C'est ainsi que *la courbe admet l'origine pour centre de symétrie*, *lorsque son équation ne change pas*

([1]) Ou avec certaines parallèles à ces axes.

*quand on change simultanément $x$ en $-x$ et $y$ en $-y$.* En effet, si $M(x, y)$ appartient à la courbe, le point symétrique $M'(-x, -y)$ lui appartient aussi, puisque l'équation $f(-x, -y)=0$ équivaut à $f(x, y)=0$.

En particulier, *pour qu'une courbe algébrique admette l'origine pour centre de symétrie, il faut et il suffit que son équation ne renferme que des termes de degré pair ou que des termes de degré impair.* Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette proposition, qui est à peu près évidente.

De même, si l'équation ne change pas quand on change seulement $x$ en $-x$ ou ($y$ en $-y$), $Oy$ (ou $Ox$) est un axe de symétrie.

Si l'équation est symétrique par rapport à $x$ et $y$, la première bissectrice est axe de symétrie. Si elle se reproduit dans le changement $x \mid -y$ et $y \mid -x$, c'est la seconde bissectrice qui est un axe.

Si l'on veut reconnaître la symétrie par rapport à un point quelconque $M_0(x_0, y_0)$, on transporte l'origine en ce point et l'on applique le critérium précédent. De même, si l'on veut reconnaître la symétrie par rapport à une parallèle à un axe de coordonnées ou à une bissectrice, on transporte l'origine en un point quelconque de cette droite.

249. Voici maintenant le principe de la méthode généralement employée pour avoir une idée précise de l'allure de la courbe. *On coupe par une droite variable* (D), *passant par un point fixe* P et l'on étudie la réalité et la distribution des points de rencontre, en faisant pivoter la droite autour de P, de manière à ce qu'elle balaie tout le plan.

Pratiquement, cette discussion n'est possible que dans les cas où l'équation déterminante des points de rencontre est une des rares équations qu'on sait discuter facilement, telles que l'équation du second degré, l'équation du troisième degré sous la forme canonique (t. I, n° 265), l'équation bicarrée.

Quant au choix du point P, il est précisément guidé par la condition ci-dessus. Par exemple, si la courbe, étant algébrique et de degré $m$, possède un point multiple d'ordre $m-2$, en prenant le point P en ce point multiple, la droite (D) ne coupera la courbe qu'en deux points autres que P et l'on aura à discuter une équation du second degré.

Lorsque le point P est à distance finie, on peut y transporter l'origine des coordonnées. La discussion revient alors à passer en coordonnées polaires.

Le plus fréquemment, on essaie de prendre le point P à l'infini sur l'un des axes. *On coupe alors par des parallèles à* $Ox$ *ou à* $Oy$. Suivant le cas, cela revient manifestement à *discuter l'équation* (3) *par rapport à* $x$ *ou par rapport à* $y$. On peut alors s'occuper non seulement de la réalité, mais encore du signe des racines, de façon à reconnaître les portions de la courbe qui sont d'un côté ou de l'autre de $Oy$ ou de $Ox$.

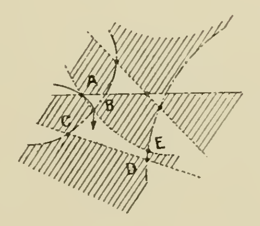
250. Méthode des régions. — Pour terminer, nous allons donner un procédé particulier, qui, s'il permet rarement, à lui seul, de construire la courbe, peut néanmoins donner des renseignements précieux.

Imaginons que l'équation de la courbe (C) puisse être mise sous la forme

$$(4) \qquad P_1, P_2, P_3, \ldots, P_m = Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n,$$

les facteurs $P_1, P_2, P_3, \ldots, Q_n$ étant des fonctions de $x$ et de $y$ telles que les courbes $(P_1)$, $(P_2)$, $(P_3)$, ..., $(Q_n)$, qu'on obtient en les annu-

Fig. 24.




lant, soient de forme connue et très faciles à construire. Traçons les lignes (P) en traits mixtes et les lignes (Q) en traits pointillés (*fig.* 24).

Tout d'abord, il est évident que tout point de rencontre d'une ligne (P) avec une ligne (Q) appartient à la courbe (C), car, pour un tel point, les deux membres de (4) sont nuls, donc égaux.

On obtient, de la sorte, un certain nombre de points particuliers de la courbe à construire.

En second lieu, considérons les régions délimitées dans le plan par les différentes lignes (P) et (Q). Quand le point $M(x, y)$ se déplace à l'intérieur d'une de ces régions, sans en toucher les lignes démarcatrices, il est manifeste que les fonctions $P_1$, $P_2$, ..., $Q_n$ gardent chacune un signe constant, puisque aucune d'elles ne s'annule [1]. Les deux membres de (4) ont, par suite, dans ladite région, partout le même signe ou partout des signes différents. Dans le second cas, il est clair que la courbe (C) ne peut avoir aucun point dans la région considérée, puisque les deux membres de (4), y prenant des signes contraires, ne peuvent devenir égaux. Pour cette raison, on dit que la région est *impossible* et on la couvre de hachures. Les régions non impossibles sont dites *possibles* et laissées en blanc. La courbe peut passer dans chacune d'elles, mais n'y passe pas nécessairement.

Quand on a déterminé la nature de toutes les régions, on part d'un des points de rencontre A des courbes (P) avec les courbes (Q). En général, quatre régions aboutissent à ce point; deux sont possibles et deux sont impossibles (*fig.* 24). On amorce la courbe (C), à partir de A, dans une des régions possibles. On doit ensuite sortir de cette région par un autre point analogue à A et pénétrer de nouveau dans une région possible. Il peut arriver que cela ne puisse se faire que d'une seule manière (par exemple, sur la figure 24, on doit sortir par le point B). Dans ce cas, il n'y a pas de difficulté. Mais, il peut aussi se présenter plusieurs sorties [2], auquel cas, on ne peut continuer le tracé, sans renseignements complémentaires. On recommence alors la même opération, en partant du même point A, mais dans l'autre sens, ou d'un autre point. Il arrive quelquefois qu'on peut, par ce procédé, construire la courbe en entier. Mais, cela est assez rare et la méthode des régions doit être en général employée concurremment avec une autre méthode.

*Remarques*. — I. Il arrive quelquefois qu'un facteur, $P_1$ par exemple, est essentiellement positif ou négatif, comme cela a lieu

---

[1] On suppose, bien entendu, qu'on n'a affaire qu'à des fonctions continues. Pratiquement d'ailleurs, ce sont des polynomes, car la méthode des régions ne s'applique guère qu'aux courbes algébriques.

[2] Telle est, sur la figure, la sortie de la région dans laquelle on a pénétré après le point B. On peut sortir par C, D ou E.

lorsque ce facteur est un carré ou une puissance paire. Dans cette circonstance, la ligne ($P_1$) doit être laissée de côté pour le régionnement, car sa traversée par le point M est sans influence sur le signe de $P_1$ et, par suite, sur le signe du premier membre de (4). Néanmoins, il peut être utile de la tracer, car elle peut donner des points de (C), par sa rencontre avec les lignes (Q).

II. Pour déterminer pratiquement la nature des différentes régions, on prend un point, de coordonnées aussi simples que possible (l'origine, un point à l'infini, etc.) et situé en dehors de toute ligne (P) ou (Q). Puis, on voit quels signes il donne aux deux membres de (4). On en déduit la nature de la région dans laquelle il se trouve; d'où résulte la nature de chaque région voisine [1]. De proche en proche, on arrive ainsi à reconnaître toutes les régions.

251. Forme d'une courbe gauche ou d'une surface. — Pour se faire une idée de la forme qu'affecte une courbe gauche dans l'espace, on construit ses projections sur les plans de coordonnées (n° 51) et l'on essaie, par la pensée, de suivre le déplacement d'un point dont les trois projections décriraient les courbes ainsi construites. Avec de l'imagination et si la courbe proposée n'est pas trop compliquée, on arrive ainsi à se représenter cette dernière.

S'il s'agit d'une surface, on la coupe par un plan se déplaçant, d'une manière continue, parallèlement à un plan de coordonnées. On construit cette section et l'on étudie ses variations de forme et de grandeur, quand le plan sécant balaie tout l'espace. On peut répéter cette opération pour les trois plans de coordonnées.

On peut aussi compléter cette étude par la recherche des *contours apparents sur les plans coordonnés*. Le contour apparent sur $xOy$, par exemple, est la base, dans ce plan, du cylindre circonscrit parallèlement à $Oz$. On a son équation en écrivant que l'équation en $z$ a une racine double, car cela revient à exprimer que la parallèle à $Oz$, qui a pour trace le point $(x, y)$ sur $xOy$, coupe la surface en deux points confondus et lui est, par conséquent, tangente.

---

[1] La nature change, quand on traverse une seule ligne de régionnement ou un nombre impair de ces lignes. Elle ne change pas quand on en traverse un nombre pair.

On peut aussi écrire que le plan tangent à la surface est parallèle à $Oz$, ce qui se traduit par la condition $f'_z = 0$. Puis, on élimine $z$ entre cette équation et l'équation de la surface. D'après la théorie des racines doubles (t. I, n° 226), cela équivaut à la méthode précédente.

Ajoutons que, dans l'espace, les *éléments de symétrie* se découvrent par des règles analogues à celles des n$^{os}$ 244 et 248.

# CHAPITRE XVII.

## ÉTUDE DES COURBES PLANES EN COORDONNÉES POLAIRES.

252. Détermination des tangentes. — Soit une courbe plane (C), rapportée à un système de coordonnées polaires, de pôle O et d'axe polaire $Ox$ (*fig.* 25). Soient $M(\rho, \omega)$ un quelconque de ses points

Fig. 25.



et MT la demi-tangente positive en ce point, *la courbe étant*, par conséquent, *supposée orientée*. Menons la demi-droite OX, d'angle polaire $\omega$ et posons

$$V = (\widehat{OX, MT}).$$

Nous allons calculer l'angle V par son cosinus et son sinus.

A cet effet, menons OY, d'angle polaire $\omega + \frac{\pi}{2}$. On sait (n° 29) que $\cos V$ et $\sin V$ sont les cosinus directeurs de MT relativement aux axes OXY. Or, soit M' un point variable de la courbe. Si $s'$ désigne son abscisse curviligne et $x', y'$ ses coordonnées par rapport aux axes fixes OXY, on sait (n° 193) que les cosinus directeurs de la demi-tangente positive M'T' en ce point sont $\frac{dx'}{ds'}$ et $\frac{dy'}{ds'}$. D'autre part, si $\omega' = \omega + h$ et $\rho'$ sont les coordonnées polaires de M' par rapport à $Ox$, $h$ et $\rho'$ sont les coordonnées polaires du même point par rapport

à OX; donc (nº 40)

$$x' = \rho' \cos h, \qquad y' = \rho' \sin h;$$

$$\frac{dx'}{ds'} = \frac{d\rho'}{ds'} \cos h - \rho' \sin h \frac{dh}{ds'}, \quad \frac{dy'}{ds'} = \frac{d\rho'}{ds'} \sin h + \rho' \cos h \frac{dh}{ds'}.$$

Si, dans ces formules, nous faisons $h = 0$, nous obtiendrons les cosinus directeurs de MT. Or, quand M′ vient en M, $\frac{d\rho'}{ds'}$ devient égal à $\frac{d\rho}{ds}$, $\rho'$ devient égal à $\rho$ et $\frac{dh}{ds'} = \frac{d(\omega + h)}{ds'} = \frac{d\omega'}{ds'}$ devient égal à $\frac{d\omega}{ds}$. On a donc finalement [1]

$$(1) \qquad \cos V = \frac{d\rho}{ds}, \qquad \sin V = \rho \frac{d\omega}{ds}.$$

*Si la courbe n'est pas orientée*, la tangente est définie seulemen par tang V :

$$(2) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho} = \frac{\rho}{\rho'},$$

en appelant $\rho'$ la dérive $\frac{d\rho}{d\omega}$. Cette formule peut aussi s'écrire

$$(3) \qquad \operatorname{cotang} V = (\log \rho)'.$$

253. Considérons le point A où MT rencontre OY. On appelle *sous-tangente polaire* la quantité

$$(4) \qquad S_t = \overline{OA}.$$

Il est aisé de la calculer, d'après ce qui précède. L'équation de MT par rapport aux axes OXY s'écrit, en effet,

$$Y = \operatorname{tang} V (X - \rho) = \frac{\rho}{\rho'} (X - \rho).$$

Si l'on y fait $X = 0$, on obtient l'ordonnée de A, c'est-à-dire la sous-tangente :

$$(5) \qquad S_t = -\frac{\rho^2}{\rho'},$$

---

[1] On peut retrouver rapidement ces formules, en considérant M′ comme infiniment voisin de M et remarquant que les projections de $\overrightarrow{MM'}$ sur OX et OY sont sensiblement $d\rho$ et $\rho\, d\omega$ (t. I, nº 173), la longueur MM′ étant sensiblement égale à $ds$.

ce qui peut encore s'écrire

$$\frac{1}{S_t} = \left(\frac{1}{\rho}\right)'. \tag{6}$$

La normale MN rencontre ON en B. On appelle *sous-normale polaire* la quantité

$$S_n = \overline{OB}. \tag{7}$$

Le triangle rectangle AMB, dont OM est hauteur, nous donne

$$\overline{OM}^2 = -\overline{OA}.\overline{OB}$$

ou

$$\rho^2 = \frac{\rho^2}{\rho'} S_n;$$

d'où

$$S_n = \rho'. \tag{8}$$

*Les formules* (2), (5), (8) *fournissent trois procédés différents pour déterminer la tangente en un point donné.* On emploie l'une ou l'autre, suivant la forme de l'équation qui relie $\rho$ et $\omega$. En particulier, on se servira de la sous-tangente, calculée par la formule (6), si $\frac{1}{\rho}$ se présente comme fonction très simple de $\omega$. Si, au contraire, c'est $\rho$ qui est le plus simple, on utilisera la sous-normale. Enfin, si $\rho$ est donné sous la forme d'une expression calculable par logarithmes (produit ou quotient), on emploiera la formule (3).

254. Cas où la courbe passe au pôle. — La courbe passe au pôle, si $\rho$ *s'annule pour une certaine valeur* $\omega_0$ *de* $\omega$. Dans ce cas, *la droite d'angle polaire* $\omega_0$ *est tangente en* O *à la courbe.*

En effet, soit M un point de cette dernière dont l'angle polaire $\omega$ est voisin de $\omega_0$ et le rayon vecteur $\rho$ voisin de zéro. La droite OM a pour angle polaire $\omega$. Quand $\omega$ tend vers $\omega_0$, M tend vers O et OM devient une tangente en O, ce qui justifie l'assertion ci-dessus.

Si $\rho$ s'annule pour plusieurs valeurs de $\omega$, ne différant pas les unes des autres par des multiples de $\pi$, on aura plusieurs tangentes au point O, qui sera, dès lors, un point multiple.

Il arrive quelquefois, pour certaines courbes transcendantes, que $\rho$ tend vers zéro, quand $\omega$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Dans ce cas, la

courbe s'enroule indéfiniment autour du point O (¹), tout en s'en approchant à une distance aussi petite qu'on le veut. On dit alors que le pôle est *un point asymptote* de la courbe.

Dans le même ordre d'idées, lorsque $\rho$ tend vers une limite finie et non nulle $\rho_0$, pour $\omega = \pm\infty$, le cercle de centre O et de rayon $\rho_0$ est appelé *cercle asymptote*.

255. Concavité; inflexion. — Reprenons les notations de la figure 25 et proposons-nous de reconnaître la région dans laquelle se trouve le point M' par rapport à MT, quand on le suppose infiniment voisin de M.

Appelons $\rho_0$, $\omega_0$ les coordonnées de M. L'équation de MT par rapport aux axes OXY peut s'écrire

$$X - \rho_0 - Y\frac{\rho'_0}{\rho_0} = 0.$$

Nous aurons le renseignement demandé en cherchant le signe de

$$A = x - y\frac{\rho'_0}{\rho_0} - \rho_0,$$

où $x$ et $y$ désignent les coordonnées cartésiennes de M' par rapport à OXY. Si $\rho$ et $\omega_0 + h$ sont les coordonnées polaires de ce point, on a

$$x = \rho\cos h, \qquad y = \rho\sin h;$$

donc

$$A = \rho\left(\cos h - \frac{\rho'_0}{\rho_0}\sin h\right) - \rho_0.$$

Il est avantageux, pour éviter la multiplication de $\rho$ par la parenthèse, de diviser par $\rho$. Pour plus de symétrie et aussi pour ne pas changer le signe de A, divisons aussi par $\rho_0$, en observant que, $\rho$ étant infiniment voisin de $\rho_0$, le produit $\rho\rho_0$ est positif; nous obtenons ainsi la quantité

$$B = \frac{1}{\rho_0}\left(\cos h - \frac{\rho'_0}{\rho_0}\sin h\right) - \frac{1}{\rho},$$

qui a même signe que A.

Il nous faut chercher ce signe, pour les valeurs infiniment petites de $h$. Appliquant toujours la même méthode, *nous calculons la partie principale de* B (t. I, n° 123).

Supposons que $\frac{1}{\rho}$ soit développable suivant les puissances croissantes de $h$, par la formule de Taylor, jusqu'à un ordre aussi élevé qu'il sera nécessaire.

(¹) Dans le sens positif, si $\omega$ tend vers $+\infty$; dans le sens négatif, si $\omega$ tend vers $-\infty$.

Nous avons

$$B = \frac{1}{\rho_0}\left[1 - \frac{h^2}{2} + \ldots - \frac{\rho_0'}{\rho_0}\left(h - \frac{h^3}{6} + \ldots\right)\right]$$
$$- \frac{1}{\rho_0} - h\left(\frac{1}{\rho}\right)_0' - \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{\rho}\right)_0'' - \frac{h^3}{6}\left(\frac{1}{\rho}\right)_0''' - \ldots.$$

Les termes constants et en $h$ disparaissent identiquement. Le terme en $h^2$ est

$$-\frac{h^2}{2}\left[\frac{1}{\rho_0} + \left(\frac{1}{\rho}\right)_0''\right].$$

Si l'on observe que la région où A est $>0$ est celle des X positifs, on voit que la courbe est concave vers les X positifs ou négatifs suivant que $\frac{1}{\rho_0} + \left(\frac{1}{\rho}\right)_0''$ est négatif ou positif. Si $\frac{1}{\rho_0} + \left(\frac{1}{\rho}\right)_0'' = 0$, on a un point d'inflexion. Il faut pousser plus loin le développement de B. Le terme en $h^3$, par exemple, est

$$-\frac{h^3}{6}\left[\left(\frac{1}{\rho}\right)_0' + \left(\frac{1}{\rho}\right)_0'''\right].$$

S'il n'est pas nul, on aura un point à visible inflexion; la position de la courbe résultera du signe du crochet. S'il est nul, il faudra encore poursuivre le développement de B, jusqu'à ce qu'on obtienne un terme non nul.

En résumé, nous pouvons énoncer les conclusions suivantes :

Théorème. — *En un point* M, *d'angle polaire* $\omega$, *la concavité est tournée vers le point à l'infini de la demi-droite d'angle polaire* $\omega$ *ou vers la direction opposée, suivant que la quantité* $\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''$ *est négative ou positive. Si cette quantité est nulle, on a un point d'inflexion* (¹).

256. Asymptotes. — On obtient les points à l'infini de la courbe, en cherchant les valeurs de $\omega$ auxquelles correspondent des valeurs infinies de $\rho$. Il arrive parfois que $\rho$ devient infini en même temps que $\omega$. Dans ce cas, il n'y a pas de direction asymptotique. La courbe

---

(¹) On peut aussi obtenir l'équation des points d'inflexion en écrivant que l'angle polaire $\omega + V$ de la tangente passe par un maximum ou par un minimum (n° 221). En annulant sa dérivée, on a $1 + \frac{dV}{d\omega} = 0$ ou

$$1 + \left(\text{arc tang}\,\frac{\rho}{\rho'}\right) = 0$$

équation qu'il est aisé de ramener à la précédente

tourne indéfiniment autour du pôle, en s'éloignant de plus en plus. On dit qu'on a une *spirale*.

Si, au contraire, $\rho$ devenant infini, $\omega$ tend vers une limite finie $\omega_0$, la droite d'angle polaire $\omega_0$ est la position limite de OM ; c'est la *direction asymptotique* (n° 228).

Pour avoir l'asymptote correspondante, on calcule la *sous-asymptote*, qui est à l'asymptote ce que la sous-tangente est à la tangente. On sait d'ailleurs qu'une asymptote n'est autre qu'une tangente (n° 228) ; par conséquent, *la sous-asymptote peut être calculée par l'emploi de la formule* (6). Lorsqu'elle est infinie, il y a branche parabolique.

On peut aussi déterminer la sous-asymptote par un procédé direct, qui a l'avantage de donner, du même coup, la position de la courbe (n° 231).

Soient OX la direction asymptotique, d'angle polaire $\omega_0$, et OY la demi-droite perpendiculaire, d'angle polaire $\omega_0 + \frac{\pi}{2}$ (*fig.* 26).

Fig. 26.

Menons MP parallèle à OX. Par définition, l'asymptote est la limite de cette droite. Pour la déterminer, il suffit de calculer la limite $\overline{OA}$ de $\overline{OP}$, qui n'est autre que la sous-asymptote. Or, $\overline{OP}$ est la projection, sur OY, du vecteur $\overrightarrow{OM}$, porté par la demi-droite $O\lambda$, d'angle polaire $\omega$. On a donc

$$\overline{OP} = \overline{OM}.\cos(\widehat{O\lambda, OY}) = \rho\cos\left(\omega_0 + \frac{\pi}{2} - \omega\right) = \rho\sin(\omega - \omega_0).$$

Par suite, *la sous-asymptote est la limite d de la quantité* $\delta = \rho\sin(\omega - \omega_0)$, *quand* $\omega$ *tend vers* $\omega_0$ (¹).

*Si l'on veut avoir la position de la courbe par rapport à*

(¹) Cette limite se présente sous la forme $\infty \times 0$ (t. I, n° 126).

*l'asymptote, il suffit d'étudier le signe de* $\overline{\text{AP}} = \delta - d$, quand $\omega$ est infiniment voisin de $\omega_0$. A cet effet, on pose $\omega - \omega_0 = h$ et l'on cherche la partie principale de $\delta - d$, par rapport à $h$. Il faut, en même temps, avoir soin d'observer le signe de l'infiniment grand $\rho$, ce qui peut se faire au moyen de sa partie principale.

*Remarque.* — On peut montrer aisément que la limite de $\delta$ coïncide avec la valeur de la sous-asymptote donnée par la formule (6). On a, en effet,

$$\delta = \frac{\sin(\omega - \omega_0)}{\dfrac{1}{\rho}}.$$

Cette expression se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Si on lui applique la règle de l'Hospital (t. I, n° 126), on voit qu'elle a même limite que $\dfrac{\cos(\omega - \omega_0)}{\left(\dfrac{1}{\rho}\right)'_{\omega}}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\rho}\right)'_{\omega_0}}$. C'est bien la valeur que donne la formule (6), quand on y remplace $\omega$ par $\omega_0$.

257. Symétries. — Il importe, pour la construction des courbes, de savoir reconnaître éventuellement leurs symétries par rapport au pôle ou par rapport à une droite quelconque passant par le pôle.

Théorème I. — *Les deux points* $\text{M}(\rho, \omega)$ *et* $\text{M}'(\rho', \omega')$ *sont symétriques par rapport au pôle, si l'on a*

$$\rho' = -\rho, \quad \omega' = \omega + 2k\pi \quad \textit{ou bien} \quad \rho' = \rho, \quad \omega' = \omega + (2k+1)\pi.$$

En effet, dans le premier cas, les vecteurs $\overrightarrow{\text{OM}}$ et $\overrightarrow{\text{OM}'}$ ont des mesures algébriques opposées sur la même demi-droite (d'angle polaire $\omega$) ; donc, ils sont opposés. Dans le second cas, ils ont même mesure algébrique sur deux demi-droites opposées (d'angles polaires respectifs $\omega$ et $\omega + \pi$) ; ils sont donc encore opposés.

Théorème II. — *Les deux points* M *et* M' *sont symétriques par rapport à la droite* OA, *d'angle polaire* $\alpha$, *ou par rapport à la droite* OB *perpendiculaire, suivant qu'on a*

$$\omega' = 2\alpha - \omega, \quad \rho' = \rho \quad \textit{ou bien} \quad \omega' = 2\alpha - \omega, \quad \rho' = -\rho.$$

En effet, les demi-droites O$\lambda$, d'angle polaire $\omega$, et O$\lambda'$, d'angle

polaire $\omega'$, admettent pour bissectrice la demi-droite d'angle polaire $\frac{\omega+\omega'}{2}=\alpha$, c'est-à-dire OA. Si $\rho'=\rho$, $\overline{OM'}=\overline{OM}$, les points M et M' sont évidemment symétriques par rapport à OA. Si $\rho'=-\rho$, $\overline{OM''}=-\overline{OM}$, les deux points sont symétriques par rapport à la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{\lambda O \lambda'}$, c'est-à-dire par rapport à la droite OB, perpendiculaire à OA.

Si, en particulier, on applique ce théorème, en supposant $\alpha=0$ ou $\frac{\pi}{2}$, on obtient les suivants :

Théorème III. — *Les deux points* M *et* M' *sont symétriques par rapport à l'axe polaire, si l'on a*

$$\omega'=-\omega,\quad \rho'=\rho \qquad \textit{ou bien} \qquad \omega'=\pi-\omega,\quad \rho'=-\rho.$$

Théorème IV. — *Les deux points* M *et* M' *sont symétriques par rapport à la perpendiculaire à l'axe polaire, si l'on a*

$$\omega'=\pi-\omega,\quad \rho'=\rho \qquad \textit{ou bien} \qquad \omega'=-\omega,\quad \rho'=-\rho.$$

Les théorèmes I, III et IV sont d'une application fréquente, dans la construction des courbes. Ils se retrouvent d'ailleurs instantanément, en interprétant les formules intéressées sur une figure qu'on trace rapidement ou qu'on se représente mentalement.

258. Courbes simples. — Avant d'entreprendre la construction d'une courbe définie par son équation polaire, il est toujours bon de vérifier, par un examen rapide, qu'on n'a pas affaire à une courbe classique, de forme bien connue, telle que droite, cercle, conique. Si l'on néglige cette précaution, on s'expose à commettre la maladresse ridicule qui consiste à *construire par points une droite ou un cercle.*

Un procédé toujours très rapide et qu'il est facile de ne pas oublier, pour éviter cette sorte d'accident, est de *passer* tout simplement *en coordonnées cartésiennes.* La transformation ne souffre aucune difficulté toutes les fois qu'on doit arriver à un résultat aussi simple que ceux qu'on se propose précisément de discerner.

Néanmoins, il est des équations polaires particulières qu'il est bon de retenir. Telle est l'*équation de la droite.*

Laissant de côté le cas banal où elle passe au pôle, son équation cartésienne par rapport aux axes rectangulaires classiques attachés à tout système de coordonnées polaires (n° 40) peut s'écrire

$$ax + by = 1.$$

Utilisant les formules de passage (n° 40), on a l'équation polaire

$$\frac{1}{\rho} = a \cos\omega + b \sin\omega. \tag{9}$$

On voit que $\frac{1}{\rho}$ *se présente comme une fonction linéaire et homogène en* $\cos\omega$ *et* $\sin\omega$.

La droite qui passe par deux points donnés $M_1$, $M_2$ a pour équation (*cf.* n° 81)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & \cos\omega & \sin\omega \\ \frac{1}{\rho_1} & \cos\omega_1 & \sin\omega_1 \\ \frac{1}{\rho_2} & \cos\omega_2 & \sin\omega_2 \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant suivant la première colonne,

$$\frac{1}{\rho}\sin(\omega_1 - \omega_2) + \frac{1}{\rho_1}\sin(\omega_2 - \omega) + \frac{1}{\rho_2}\sin(\omega - \omega_1) = 0.$$

Si l'un des points, $M_2$ par exemple, est à l'infini, il suffit d'annuler $\frac{1}{\rho_2}$, ce qui donne

$$\frac{1}{\rho}\sin(\omega_1 - \omega_2) + \frac{1}{\rho_1}\sin(\omega_2 - \omega) = 0.$$

En particulier, l'équation de la tangente au point $M_1(\rho_1, \omega_1)$ d'une courbe donnée est, en adoptant les notations du n° 252 et observant que l'angle $\omega_2$ est, dans ce cas, égal à $\omega_1 + V$,

$$\frac{1}{\rho}\sin V = \frac{1}{\rho_1}\sin(\omega_1 + V - \omega) = \frac{1}{\rho_1}[\sin V \cos(\omega - \omega_1) - \cos V \sin(\omega - \omega_1)]$$

ou, en se servant de la formule (2),

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos(\omega - \omega_1) + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)' \sin(\omega - \omega_1).$$

259. Soit maintenant *un cercle*, que nous supposerons d'abord quelconque. Son équation cartésienne est de la forme

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$

à laquelle correspond l'équation polaire

$$(10) \qquad \rho^2 + 2\rho(A\cos\omega + B\sin\omega) + C = 0.$$

S'il s'agit d'un *cercle passant au pôle*, C est nul. En supprimant le facteur $\rho$, l'équation (10) prend la forme

$$(11) \qquad \rho = a\cos\omega + b\sin\omega.$$

Cette fois, *c'est* $\rho$ *qui est une fonction linéaire et homogène de* $\cos\omega$ *et* $\sin\omega$ [1].

Signalons enfin comme équation à retenir l'équation d'une *conique dont le pôle est un foyer* (n° 320).

**260.** Construction d'une courbe définie par une équation de la forme $\rho = f(\omega)$. — Ce cas est, de beaucoup, le plus important, tant par sa fréquence que par sa simplicité. Il comporte les opérations suivantes, qui doivent être effectuées dans l'ordre où nous les donnons.

1° *Recherche de l'intervalle de variation de* $\omega$. — *A priori*, on doit faire varier $\omega$ dans tout intervalle où la fonction $f(\omega)$ est définie. Mais on peut souvent obtenir des réductions, grâce à des considérations de périodicité ou de symétrie.

En particulier, *si la courbe est algébrique*, $\rho$ doit être fonction algébrique de $\cos\omega$ et de $\sin\omega$; on pourrait en conclure que c'est nécessairement une fonction périodique de $\omega$, dont la période est commensurable avec $\pi$, et réciproquement. Sans envisager ce point de vue général, signalons seulement le *cas où* $\rho$ *est une fonction rationnelle des lignes trigonométriques de multiples commensurables de* $\omega$. Si $p$ est le plus petit dénominateur commun des multiplicateurs de $\omega$, il est clair qu'en changeant $\omega$ en $\omega + 2p\pi$, $\frac{\omega}{p}$ sera changé en $\frac{\omega}{p} + 2\pi$, les multiples entiers de $\frac{\omega}{p}$ seront augmentés d'un nombre entier de fois $2\pi$ et leurs lignes trigonométriques et, en conséquence, $\rho$ ne seront pas changés. Il suit de là que *la fonction* $\rho$

[1] L'analogie entre les équations (9) et (11) s'explique par ce fait que tout cercle passant par le pôle est l'inverse d'une droite et réciproquement, le centre d'inversion étant au pôle.

*admettra certainement pour période* $2p\pi$, ce qui ne veut pas dire que cette période ne puisse être, dans certains cas, réduite à l'un de ses sous-multiples ([1]).

De toutes façons, quand on a reconnu que $\rho$ admettait une période $\Omega$, on peut se borner à faire varier $\omega$ dans un intervalle quelconque ($\Omega$), de longueur $\Omega$. On construit l'arc de courbe correspondant ; puis on lui imprime, autour du pôle, les rotations $\pm\Omega$, $\pm 2\Omega$, .... Si, comme il arrive quand la courbe est algébrique, $\Omega$ est commensurable avec $\pi$, on finit par retomber sur l'arc initial ([2]) ; la courbe se ferme ([3]). Sinon, on obtient une infinité d'arcs différents et la ligne passe aussi près qu'on le veut de tout point dont le $\rho$ est atteint par $f(\omega)$, quand $\omega$ décrit l'intervalle ($\Omega$) ([4]).

Lorsqu'on a obtenu la plus petite période de $\rho$, on recherche les symétries, par l'application des théorèmes du n° 257. A cet effet, on essaie des substitutions de la forme $\omega\,|\,-\omega$, $\omega\,|\,\pi-\omega$, $\omega\,|\,\pi+\omega$, $\omega\,|\,2\alpha-\omega$, ..., et l'on regarde si $\rho$ ne change pas de valeur absolue. Chaque fois qu'il en est ainsi, on a découvert une symétrie ([5]) et l'on peut réduire de moitié l'intervalle de variation.

261. L'intervalle le plus réduit étant obtenu :

2° *On étudie les variations de $\rho$ en fonction de $\omega$.*

3° *On étudie le signe de $\rho$.* Ceci est indispensable, pour savoir dans quel sens on doit porter chaque rayon vecteur (n° 40).

4° *On construit les points remarquables et les tangentes en ces points.* Entre autres, on doit déterminer avec soin les points à l'infini,

---

([1]) Si l'on pose $\tan\frac{\omega}{2p}=t$, il est aisé de voir que $\rho$, $\cos\omega$, $\sin\omega$ et, par suite, $x$ et $y$ s'expriment rationnellement en fonction de $t$. La courbe proposée est donc, non seulement algébrique, mais unicursale.

([2]) Si $\frac{p}{q}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{\Omega}{2\pi}$, ceci arrive au bout de $q$ rotations, dont l'ensemble équivaut à $p$ tours complets.

([3]) A vrai dire, ceci est une façon de parler, car, malgré cette circonstance, la courbe peut être ouverte (s'il y a des branches infinies) ou se composer de plusieurs courbes fermées.

([4]) Ces points constituent une région délimitée par un ou plusieurs cercles concentriques au pôle (*cf.* Chap. IV ; exercice résolu n° 2).

([5]) Il y a exception si, à la suite de la substitution $\omega\,|\,\omega+\pi$, $\rho$ se change en $-\rho$. On retombe sur le même point et l'on peut, sans rien oublier de la courbe, se borner à faire varier $\omega$ dans un intervalle de longueur $\pi$.

les asymptotes correspondantes et, si possible, la position de la courbe par rapport à celles-ci. Les valeurs de $\omega$ qui rendent $\rho$ infini figurent d'ailleurs nécessairement dans le tableau de variation, comme valeurs de discontinuité. De même, l'étude du signe de $\rho$ conduit, en général [1], aux valeurs qui annulent cette quantité et qui sont, comme on sait (n° 254), les angles polaires des tangentes au pôle.

Observons enfin qu'*aux points où $\rho$ est maximum ou minimum, la courbe est normale au rayon vecteur*, car la sous-normale $\rho'$ est nulle.

5° *On trace une ligne continue joignant les points remarquables* [2], *en observant les indications du tableau de variation.*

6° *On complète, s'il y a lieu, par symétries et par rotations.*

262. Points multiples. — Une courbe étant donnée par une équation de la forme $\rho = f(\omega)$, on peut aisément, du moins en théorie, en déterminer les points multiples.

Un point $M(\rho, \omega)$ est multiple s'il est obtenu plusieurs fois dans la construction de la courbe [3]. Ceci peut arriver de deux manières:

1° En ajoutant $2k\pi$ à $\omega$, $k$ ayant une valeur entière convenable, on retrouve la même valeur pour $\rho$.

2° En ajoutant $(2k+1)\pi$ à $\omega$, $\rho$ change de signe.

Il suit de là qu'*on aura les points multiples en cherchant les valeurs de $\omega$ pour lesquelles l'une ou l'autre des équations*

$$f(\omega) = f(\omega + 2k\pi), \qquad f(\omega) = -f[\omega + (2k+1)\pi]$$

*admet une ou plusieurs solutions entières en $k$.*

263. Autres formes d'équation. — Il arrive quelquefois qu'une courbe est définie par une *équation de la forme* $\omega = f(\rho)$. Si l'on ne peut résoudre par rapport à $\rho$, on étudie les variations de $\omega$ en fonction de $\rho$.

---

(1) Si une valeur $\omega_0$ annule $\rho$ sans le faire changer de signe, la courbe admet visiblement un rebroussement au pôle, la tangente de rebroussement ayant pour angle polaire $\omega_0$.

(2) Si, dans certaines régions, la courbe n'est pas assez bien guidée, on construit quelques points supplémentaires, en donnant à $\omega$ des valeurs numériques convenablement échelonnées.

(3) On suppose, bien entendu, que ceci n'a pas lieu pour tous les points de la courbe, c'est-à-dire que l'intervalle de variation de $\omega$ a été suffisamment réduit.

Plus généralement, si la courbe est définie par *des équations paramétriques de la forme*

$$(12) \qquad \rho = f(t), \qquad \omega = g(t),$$

on étudie les variations de $\rho$ et de $\omega$ par rapport à $t$, dans un intervalle aussi réduit que possible par les périodicités ou symétries.

Il peut se faire enfin qu'on donne *l'équation polaire de la courbe sous forme implicite :*

$$(13) \qquad f(\rho, \omega) = 0.$$

On cherche alors à discuter, par rapport à $\rho$, ce qui revient à couper par une droite variable passant au pôle (*cf.* n° 249), ou bien, par rapport à $\omega$, ce qui revient à couper par des cercles concentriques au pôle.

# CHAPITRE XVIII.

## COURBES ET SURFACES UNICURSALES.

264. Courbes planes unicursales. — Une courbe plane est dite *unicursale* si l'on peut trouver un système d'équations paramétriques dans lequel $x$ et $y$ sont des fonctions rationnelles (t. I, n° 75) de $t$.

On peut toujours, dans ce cas, choisir la représentation paramétrique de telle manière que, lorsque $t$ croît de $-\infty$ à $+\infty$, le point $M(x, y)$ décrive la courbe en entier, une seule fois et toujours dans le même sens ([1]). Une semblable représentation est dite *représentation paramétrique propre*. Elle définit, en somme, une correspondance parfaite entre les nombres $t$ de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et les points de la courbe.

Il peut arriver, au contraire, que chaque point soit obtenu pour plusieurs valeurs du paramètre ([2]). La représentation est alors *impropre* et peut être simplifiée par un changement de variable sur $t$.

*Toute courbe unicursale est algébrique*, car l'élimination de $t$ entre les équations paramétriques conduit à une équation algébrique en $x$, $y$ (t. I, n° 233). *Pour avoir son degré, on coupe par une droite quelconque* (n° 43). Si la représentation paramétrique est propre, le degré cherché est égal au degré de l'équation aux $t$ des points d'intersection.

265. Procédés pour reconnaitre, sur leur équation implicite, que certaines courbes sont unicursales. — Si toute courbe unicursale est algébrique, il faut se garder de croire à la réciproque. Il existe des procédés généraux qui permettent de déceler l'unicursalité ou la non-

([1]) Cette propriété, que nous admettrons, explique l'origine du qualificatif « unicursale ».

([2]) Il suffit, par exemple, de faire le changement de variable $t = t'^2$, à partir d'une représentation propre, car à chaque point correspondent deux valeurs opposées de $t'$.

unicursalité sur l'équation implicite. Ils sont intimement liés à la recherche des points multiples.

*C'est ainsi que si une courbe algébrique de degré m possède un point multiple* P, *d'ordre* $m-1$, *elle est, à coup sûr, unicursale.*

En effet, *coupons-la par une droite variable* (D) *passant par* P. Parmi les points d'intersection, le point P figure $m-1$ fois (n° 198); il ne reste donc qu'un seul point variable M, qui, lorsque la droite pivote, décrit la courbe. Or, l'équation aux $x$ des points d'intersection a des coefficients rationnels par rapport à ceux de (D), lesquels sont fonctions linéaires d'un paramètre variable $t$ (n° 76). Comme nous connaissons, à l'avance, une racine multiple d'ordre $m-1$ de cette équation, à savoir l'abscisse de P, nous pouvons, par des calculs rationnels [1], évaluer l'unique autre racine, qui est l'abscisse de M. Il est clair, dès lors, que cette dernière sera fonction rationnelle de $t$. Il en va de même pour l'ordonnée. Notre courbe est donc bien unicursale et nous savons en obtenir une représentation propre [2].

Parmi les courbes de la catégorie précédente, on peut ranger les *courbes du second degré*. Le point P, qui est un point simple, peut être pris n'importe où sur la courbe.

Citons aussi les *cubiques à point double*, dont on rencontre assez fréquemment des exemples.

263. Théorème. — *Le nombre maximum de points doubles que puisse présenter une courbe algébrique de degré m est* $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$; *lorsque ce nombre est atteint, la courbe est unicursale.*

1° Supposons qu'une courbe (C) possède $\frac{(m-1)(m-2)}{2}+1=\mu$ points doubles $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$. Prenons, sur cette courbe, $p$ points $B_1, B_2, \ldots, B_p$, autres que les points doubles, $p$ étant un nombre que nous allons déterminer dans la suite, mais que nous supposons déjà vérifiant une égalité de la forme

$$\mu+p=\frac{n(n+3)}{2}, \tag{1}$$

$n$ étant entier et $< m$.

---

[1] En utilisant, par exemple, une des relations entre les coefficients et les racines (t. I, n° 220).

[2] Il y a, en effet, correspondance parfaite entre le point M et la droite (D) et, par suite, entre le point M et le paramètre $t$.

En vertu de cette dernière hypothèse, nous pouvons faire passer, par les points A et B, une courbe algébrique (Γ), de degré $n$ (et, en général, une seule) ([1]). Les points A comptent pour $2\mu$ dans l'intersection des deux courbes, parce que doubles sur (C). Les points B comptent pour $p$. Supposons maintenant qu'on ait

$$(2) \qquad 2\mu + p = mn + 1.$$

Les deux courbes auront plus de $mn$ points communs, ce qui n'est pas possible (n° 46), sauf si elles se confondent ou bien ont une partie commune. Mais ceci non plus n'est pas possible, car nous supposons, bien entendu, la courbe (C) indécomposable et, d'autre part, puisque $n$ est plus petit que $m$, la courbe (Γ) ne peut comprendre (C) ni se confondre avec elle.

Nous aurons donc démontré la première partie de notre théorème, si nous pouvons trouver deux entiers $p$ et $n$ satisfaisant aux conditions précédentes.

Résolvons, dès lors, le système (1), (2), par rapport aux inconnues $p$, $n$. Retranchant (1) de (2), nous avons

$$\mu = mn + 1 - \frac{n(n+3)}{2}$$

ou

$$n^2 - n(2m-3) + (m-1)(m-2) = 0.$$

Cette équation du second degré admet les racines

$$(3) \qquad n_1 = m - 1, \qquad n_2 = m - 2,$$

entières et toutes deux inférieures à $m$.

Portant ces valeurs dans (2), par exemple, nous avons ensuite

$$(4) \qquad p_1 = 2m - 3, \qquad p_2 = m - 3,$$

nombres également entiers.

2° Supposons maintenant que la courbe (C) possède seulement $\frac{(m-1)(m-2)}{2} = \nu$ points doubles, $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$.

Les nombres $p$ et $n$ étant choisis comme précédemment, prenons encore, sur la courbe, $p$ points fixes quelconques $B_1, B_2, \ldots, B_p$, autres que les points doubles. En vertu de (1), le nombre total des points A et B est $\frac{n(n+3)}{2} - 1$. On peut donc faire passer par eux une infinité de courbes algébriques (Γ), de degré $n$, constituant un faisceau (*cf.* Chap. XXXVIII,

---

([1]) Car le nombre des coefficients de l'équation générale du $n^{\text{ième}}$ degré est $1 + 2 + 3 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} + 1$. Le nombre de paramètres dont dépend la courbe générale de degré $n$ est donc $\frac{n(n+3)}{2}$.

exercice proposé n° I). Les coefficients de l'équation générale de ce faisceau renferment linéairement un paramètre variable $t$.

Cela posé, chaque courbe (Γ) coupe (C) aux points A et B, qui comptent pour $2\nu + p$ dans l'intersection. D'après (2), il ne reste qu'un seul autre point de rencontre M, le seul variable avec $t$ et qui décrit (C) quand $t$ varie. En raisonnant comme au n° 265, on voit que ses coordonnées peuvent se calculer rationnellement en fonction de $t$. La courbe (C) est donc bien unicursale.

*On peut étendre ce théorème par la considération de points multiples d'ordres quelconques*, dont chacun équivaut alors à un certain nombre de points doubles. Mais nous ne pouvons aborder ici cette question, qui est fort ardue.

Comme application, citons la *quartique à trois points doubles*, pour laquelle $m = 4$, $\nu = 3$. Les formules (3) et (4) donnent, dans ce cas,

$$n_1 = 3,\ p_1 = 5\ ; \qquad n_2 = 2,\ p_2 = 1.$$

On obtient donc une représentation paramétrique rationnelle de la courbe en la coupant par un faisceau de cubiques ou par un faisceau de coniques. La seconde solution est évidemment la plus simple.

La différence entre le nombre maximum de points doubles $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ qu'assigne à une courbe algébrique son degré $m$ et le nombre de points doubles qu'elle a effectivement est appelé *genre* de la courbe.

**267.** Problèmes divers. — La représentation paramétrique rationnelle des courbes unicursales est particulièrement commode pour la résolution de certains problèmes, dont nous allons dire quelques mots.

I. *Condition pour que trois points de la courbe soient en ligne droite.* — Soient trois points $M_1$, $M_2$, $M_3$, de paramètres $t_1$, $t_2$, $t_3$ ; on demande la condition qui doit lier ces paramètres pour que les points soient en ligne droite.

A cet effet, nous coupons la courbe par une droite quelconque

$$ux + vy + w = 0. \tag{5}$$

Puis, nous exprimons qu'on peut déterminer $u$, $v$, $w$ de telle manière que l'équation en $t$ obtenue admette pour racines $t_1$, $t_2$, $t_3$. La manière la plus élégante d'arriver à ce résultat consiste généralement à écrire les $n$ relations entre les coefficients et les racines ($n$ étant le degré de la courbe), puis à éliminer entre elles les trois

paramètres homogènes $u$, $v$, $w$ et les $n-3$ racines $t_4$, $t_5$, ..., $t_n$ autres que $t_1$, $t_2$, $t_3$. On est conduit, de la sorte, à une relation entre $t_1$, $t_2$, $t_3$, qui est la relation demandée.

Pour faire le calcul d'une manière symétrique, il convient de remplacer les deux groupes de racines $t_1$, $t_2$, $t_3$ et $t_4$, $t_5$, ..., $t_n$ par leurs fonctions symétriques élémentaires respectives (t. I, n° 220; *cf.* note de la page 282).

La condition étant supposée remplie, on peut avoir l'équation de la droite $M_1M_2M_3$, en résolvant, par rapport à $u$, $v$, $w$, les équations obtenues par l'élimination de $t_4$, $t_5$, ..., $t_n$ seulement.

Si, dans les résultats précédents, on suppose $t_1 = t_2 = t$ et $t_3 = \theta$, on obtient, d'une part, une équation en $\theta$, dont les racines sont les paramètres des points d'intersection de la courbe avec la tangente au point de paramètre $t$; d'autre part, l'équation de cette tangente.

Si l'on suppose $t_1 = t_2 = t_3 = t$, on obtient l'équation aux $t$ des points d'inflexion (n° 222).

II. *Condition pour que quatre points soient sur un même cercle ou six points sur une même conique, etc.* — On coupe la courbe par un cercle quelconque ou par une conique quelconque et l'on continue comme dans le problème précédent. Plus généralement, on peut déterminer, par cette méthode, la relation qui doit exister entre les paramètres de $p$ points pour que ces $p$ points soient sur une des courbes d'une famille donnée, dépendant de $p-1$ constantes arbitraires.

En égalant deux ou plusieurs des paramètres, on obtient des cercles, coniques, ..., tangents, bitangents, tritangents, osculateurs, ... à la courbe proposée.

III. *Condition pour que les tangentes en trois points soient concourantes.* — On forme l'équation aux $t$ des points de contact des tangentes issues d'un point quelconque $P(x, y)$ (n° 211) et l'on exprime qu'il est possible de déterminer ce point de manière que cette équation admette pour racines les paramètres $t_1$, $t_2$, $t_3$ des points considérés. A cet effet, on écrit les relations entre les coefficients et les racines et l'on élimine entre elles $x$, $y$ et les racines autres que $t_1$, $t_2$, $t_3$.

On peut aussi calculer $x$ et $y$ en fonction de $t_1$, $t_2$, $t_3$; on a ainsi les coordonnées du point de concours P.

Si l'on fait, dans l'équation de condition, $t_1 = t_2 = t$ et $t_3 = \theta$, l'équation en $\theta$ obtenue admet pour racines les paramètres des points de contact des tangentes issues du point M, de paramètre $t$, autres que la tangente en ce point.

Si l'on fait $t_1 = t_2 = t_3 = t$, on obtient l'équation aux $t$ des points de rebroussement (n° 300).

On peut généraliser ce qui précède en cherchant la condition pour que certains groupes de tangentes soient tangents à une même courbe appartenant à une famille déterminée. Pour cela, on emploie toujours le même procédé, en partant de l'équation aux $t$ des tangentes communes à la courbe proposée et à une courbe quelconque de la famille considérée.

268. Courbes gauches unicursales. — Une courbe gauche est dite *unicursale* si l'on peut trouver un système d'équations paramétriques dans lequel $x$, $y$, $z$ sont fonctions rationnelles de $t$.

On peut répéter ici tout ce qui a été dit au n° 264, sauf que, pour avoir le degré, on coupe par un plan quelconque (n° 52).

Théorème. — *Toute courbe algébrique, de degré $m$, possédant deux points multiples* P *et* Q, *d'ordres $p$ et $q$ tels que $p+q=m-1$, est unicursale* [1].

En effet, coupons-la par un plan variable (Π), passant par P et Q. Ces derniers points comptant pour $p+q=m-1$ dans l'intersection, il n'en reste qu'un seul M qui soit variable. Ses coordonnées s'obtiennent par des calculs rationnels et sont, par suite, des fonctions rationnelles du paramètre variable dont dépendent linéairement les coefficients du plan (Π).

Comme application, citons la *cubique gauche*, pour laquelle les points P et Q sont deux points quelconques, nécessairement simples.

Toute quartique gauche possédant un point double P remplit aussi

[1] Si $p+q=m$, la courbe est plane ou se décompose et comprend une courbe plane. Car, si M est un point de cette courbe autre que P et Q, le plan MPQ coupe en $m+1$ points, donc en une infinité. Il contient toute la courbe ou une partie de celle-ci.

En particulier, une cubique à point double est plane ou se décompose. Une quartique possédant deux points doubles est plane ou se décompose.

les conditions précédentes, puisqu'il suffit de prendre pour point Q un point quelconque de la courbe, autre que P.

269. On peut se poser, à propos des courbes gauches unicursales, des problèmes analogues à ceux que nous avons résolus au n° 267. On peut chercher, par exemple, la relation qui doit exister entre les $t$ de quatre points pour que ces points soient dans un même plan. La méthode à employer est toujours la même et nous ne croyons pas utile d'y revenir.

En égalant deux des paramètres, on obtient un plan tangent. Si l'on égale en même temps les deux autres, le plan est bitangent. Si l'on égale trois des paramètres, on obtient un plan osculateur. Si on les égale tous quatre, on a l'équation aux $t$ des points possédant un plan surosculateur.

270. Surfaces unicursales. — Une surface est dite *unicursale* si l'on peut en trouver un système d'équations paramétriques tel que $x$, $y$, $z$ soient fonctions rationnelles de $u$, $v$.

Si la représentation est propre, il y a correspondance parfaite entre les points de la surface et les groupes de nombres $(u, v)$.

On peut aussi faire correspondre à chaque point M de la surface, de paramètres $u$ et $v$, le point $m$ du plan des $xy$ (ou d'un plan quelconque dans lequel on a choisi deux axes de coordonnées), qui a pour coordonnées cartésiennes, dans ce plan, $u$ et $v$. A chaque ligne tracée sur la surface correspond, de la sorte, une ligne tracée dans le plan et réciproquement. Un tel mode de correspondance porte le nom de *représentation plane de la surface*.

Toute surface unicursale est algébrique. Pour avoir son degré, le moyen le plus rapide consiste assez souvent à former son équation implicite, par élimination de $u$ et $v$. On peut aussi couper par une droite quelconque et compter le nombre de points d'intersection.

Imaginons, par exemple, que les équations paramétriques de notre surface aient été mises sous la forme

$$(6) \qquad x = \frac{f_1(u, v)}{f_4(u, v)}, \qquad y = \frac{f_2(u, v)}{f_4(u, v)}, \qquad z = \frac{f_3(u, v)}{f_4(u, v)},$$

$f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ désignant quatre polynomes en $u$, $v$ n'ayant aucun diviseur

commun. Coupons par la droite $(\Delta)$ définie par les équations

$$(7)\qquad \begin{cases} A\,x + B\,y + C\,z + D = 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0, \end{cases}$$

A, B, ..., D' étant des coefficients arbitraires. Les paramètres des points d'intersection sont déterminés par le système

$$(8)\qquad A f_1(u,v) + B f_2(u,v) + C f_3(u,v) + D f_4(u,v) = 0,$$

$$(9)\qquad A' f_1(u,v) + B' f_2(u,v) + C' f_3(u,v) + D' f_4(u,v) = 0.$$

Il revient au même de dire, en se servant de la représentation plane, que les points représentatifs des points d'intersection sont les points communs aux deux courbes définies par les équations (8) et (9), où $u$ et $v$ sont regardés comme des coordonnées cartésiennes courantes. Il faut prendre garde, cependant, que certains de ces points peuvent ne pas convenir. Ce sont, lorsqu'ils existent, ceux qui appartiennent à la fois aux quatre courbes

$$(10)\qquad f_1(u,v) = 0, \qquad f_2(u,v) = 0, \qquad f_3(u,v) = 0, \qquad f_4(u,v) = 0.$$

Pour les valeurs correspondantes de $u$, $v$, les fractions $x$, $y$, $z$ se présentent sous la forme illusoire $\frac{0}{0}$ et ne constituent les coordonnées d'aucun point déterminé de la surface [1]. Au reste, il est bien évident que les points représentatifs des points d'intersection doivent, comme ces derniers, être variables avec la droite $(\Delta)$ et ne sauraient, par conséquent, comprendre aucun des

---

[1] En réalité, à un tel système de valeurs, soit $u_0$, $v_0$, correspondent, en général, les points d'une droite. En effet, posons

$$u = u_0 + \alpha, \qquad v = v_0 + \beta$$

et développons $f_1(u_0+\alpha, v_0+\beta)$, ... par la formule de Taylor (t. I, n° 132). Désignons, pour simplifier l'écriture, par $A_i$ et $B_i$ les valeurs des dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial u}$ et $\frac{\partial f_i}{\partial v}$, pour $u = u_0$ et $v = v_0$. Nous avons alors, en négligeant les termes en $\alpha$, $\beta$ de degrés supérieurs à un,

$$x = \frac{A_1\alpha + B_1\beta + \ldots}{A_4\alpha + B_4\beta + \ldots}, \qquad y = \frac{A_2\alpha + B_2\beta + \ldots}{A_4\alpha + B_4\beta + \ldots}, \qquad z = \frac{A_3\alpha + B_3\beta + \ldots}{A_4\alpha + B_4\beta + \ldots}.$$

Lorsque $\alpha$ et $\beta$ tendent vers zéro, de telle manière que le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ tende vers une limite déterminée $\lambda$, ces expressions tendent vers (t. I, n° 126)

$$\xi = \frac{A_1 + B_1\lambda}{A_4 + B_4\lambda}, \qquad \eta = \frac{A_2 + B_2\lambda}{A_4 + B_4\lambda}, \qquad \zeta = \frac{A_3 + B_3\lambda}{A_4 + B_4\lambda},$$

coordonnées d'un point qui, lorsque $\lambda$ varie, décrit une droite.

points communs aux courbes (10), puisque ces points, lorsqu'ils existent, sont tous fixes.

Ces précautions étant signalées, il est aisé d'avoir le degré de la surface. Si $m$ désigne le plus fort degré des polynomes $f_1, f_2, f_3, f_4$, le nombre total des points de rencontre des courbes (8) et (9) est évidemment $m^2$. Soit, d'autre part, $p$ le nombre des points communs aux quatre courbes (10). *Le degré de la surface est* $m^2 - p$.

En théorie, la règle est, on le voit, fort simple. Dans la pratique, elle peut donner lieu à des difficultés parfois considérables, à cause de la détermination du nombre $p$.

# CHAPITRE XIX.

## THÉORIE DES ENVELOPPES.

### I. — ENVELOPPES DE COURBES DANS LE PLAN.

**271.** Famille définie par une équation implicite. — Soit une famille de courbes (C), dépendant d'un paramètre variable $\alpha$. *On appelle enveloppe de cette famille une courbe* (E), *à laquelle toutes les courbes* (C) *sont tangentes.*

Nous allons démontrer l'existence de cette enveloppe et donner la règle qui permet de la trouver, en nous plaçant d'abord dans l'hypothèse où la famille des courbes (C) est définie par une équation implicite

$$f(x, y, \alpha) = 0, \tag{1}$$

renfermant le paramètre variable $\alpha$.

Soit M un point de contact de la courbe $(C_\alpha)$, de paramètre $\alpha$, avec l'enveloppe (E), supposée existante. Les coordonnées X, Y de ce point sont évidemment des fonctions de $\alpha$. Elles vérifient identiquement l'équation

$$f(X, Y, \alpha) = 0, \tag{2}$$

qui exprime que le point M est sur la courbe $(C_\alpha)$.

Il s'agit maintenant d'exprimer que les courbes (E) et $(C_\alpha)$ ont, en M, la même tangente. Les paramètres directeurs de la tangente à (E) sont $\frac{dX}{d\alpha}$; $\frac{dY}{d\alpha}$ [1]. D'autre part, la tangente à $(C_\alpha)$ a pour équation (n° 197)

$$(x - X) f'_X + (y - Y) f'_Y = 0, \tag{3}$$

[1] Lorsque $\alpha$ varie, le point M (X, Y) décrit, en effet, la courbe (E). On se trouve, dès lors, dans les conditions du n° 192.

où $x$, $y$ désignent les coordonnées courantes. Ces deux tangentes ayant déjà le point M commun, pour qu'elles se confondent, il faut et il suffit qu'elles aient la même direction, ce qui se traduit par

$$f'_X \frac{dX}{d\alpha} + f'_Y \frac{dY}{d\alpha} = 0. \tag{4}$$

Les fonctions inconnues X et Y sont donc assujetties à vérifier les conditions (2) et (4) et celles-là seulement. Il semble qu'elles soient, dès lors, définies par un système différentiel, puisque l'équation (4) renferme les dérivées $\frac{dX}{d\alpha}$ et $\frac{dY}{d\alpha}$ des fonctions inconnues. En réalité, il n'en est rien, car l'équation (4) peut se simplifier, si l'on tient compte de l'équation (2). Dérivons, en effet, totalement cette dernière par rapport à $\alpha$; nous avons (t. I, n° 130)

$$f'_X \frac{dX}{d\alpha} + f'_Y \frac{dY}{d\alpha} + f'_\alpha = 0. \tag{5}$$

Si l'on tient compte de (5), on voit immédiatement que, pour que l'équation (4) soit vérifiée, il faut et il suffit que l'on ait

$$f'_\alpha = 0. \tag{6}$$

En définitive, les fonctions X et Y peuvent être maintenant considérées comme définies par le système (2), (6). Nous pouvons, dès lors, énoncer la règle suivante :

Règle. — *Les coordonnées du ou des points de contact de la courbe* ($C_\alpha$) *avec son enveloppe sont définies par l'équation proposée et l'équation dérivée par rapport au paramètre* $\alpha$. *Si l'on résout le système de ces deux équations par rapport à* $x$ *et* $y$, *on a les équations paramétriques de l'enveloppe. Si, au contraire, on élimine entre elles le paramètre* $\alpha$, *on a l'équation implicite de l'enveloppe* (n° 58).

272. *Remarques.* — I. Lorsque *les courbes* (C) *sont des droites*, on peut toujours calculer aisément les équations paramétriques de l'enveloppe. Les équations (2) et (6) sont, en effet, dans ce cas, du premier degré en X, Y et il est facile de les résoudre.

II. L'élimination de $\alpha$ entre (2) et (6) équivaut à exprimer que l'équation (2) a une racine double en $\alpha$ (t. I. nº 228). Donc, *pour avoir l'équation implicite de l'enveloppe, il suffit d'exprimer que l'équation proposée a une racine double par rapport au paramètre variable.*

Cette remarque est particulièrement à utiliser, lorsque l'équation (1) est du second degré en $\alpha$ ou bien du troisième degré, sans terme en $\alpha^2$ ou sans terme en $\alpha$ (équation aux inverses).

On peut l'interpréter géométriquement de la manière suivante : Par tout point P du plan, on peut faire passer un certain nombre de courbes (C), dont les $\alpha$ sont donnés par l'équation (1), où l'on regarde $x$ et $y$ comme les coordonnées de P. Pour que le point P appartienne à l'enveloppe, il faut et il suffit que deux de ces courbes soient confondues.

C'est ainsi que, *parmi les tangentes qu'on peut mener à une courbe par un de ses points, la tangente en ce point compte pour deux.*

III. Lorsque l'équation (2) est algébrique en $\alpha$, on peut la remplacer par l'équation dérivée par rapport à la variable d'homogénéité (t. I, nº 227). Cela peut amener des simplifications soit dans la recherche des équations paramétriques, soit dans la recherche de l'équation implicite de l'enveloppe.

IV. Un cas assez fréquent et particulièrement simple est celui où l'équation donnée ne renferme $\alpha$ que par ses cosinus et sinus, et cela linéairement. Soit donc

$$(7) \qquad A\cos\alpha + B\sin\alpha = C,$$

les A, B, C étant des fonctions de $x$, $y$ indépendantes de $\alpha$.

Dérivons par rapport à $\alpha$ :

$$(8) \qquad -A\sin\alpha + B\cos\alpha = 0.$$

Pour éliminer $\alpha$, élevons au carré et ajoutons ; il vient

$$(9) \qquad A^2 + B^2 = C^2.$$

273. Points limites. — Considérons deux courbes (C) voisines, de paramètres $\alpha$ et $\alpha + h$. Ces deux courbes se coupent en un certain

nombre de points, définis par le système

$$(10) \qquad f(x, y, \alpha) \quad = 0,$$
$$(11) \qquad f(x, y, \alpha + h) = 0.$$

Supposons maintenant que, $\alpha$ étant fixe, $h$ tende vers zéro. La courbe $(C_{\alpha+h})$ tend vers la courbe $(C_\alpha)$. Quant aux points d'intersection précédents, ils tendent, sur $(C_\alpha)$, vers certaines positions limites, qu'on appelle les *points limites* ou *points caractéristiques* de cette courbe.

Pour les déterminer, il ne faut pas faire directement $h = 0$ dans l'équation (11), car elle se réduit alors à l'équation (10) et le système (10), (11) devient indéterminé. Pour lever cette indétermination, remplaçons l'équation (11) par la suivante :

$$(12) \qquad \frac{f(x, y, \alpha + h) - f(x, y, \alpha)}{h} = 0,$$

qui est une combinaison linéaire des deux précédentes. Si, maintenant, nous faisons tendre $h$ vers zéro, l'équation (12) devient, à la limite,

$$(13) \qquad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

Les points limites sont donc définis par le système (10), (13). On reconnaît le système (2), (6). Donc, *les points limites de chaque courbe* (C) *coïncident avec les points de contact de cette courbe avec son enveloppe*. On peut dire aussi que *l'enveloppe d'une famille de courbes à un paramètre est le lieu des points limites* des différentes courbes de cette famille.

274. Solutions singulières. — Il convient, néanmoins, d'apporter quelques restrictions aux considérations qui précèdent.

Certains points limites peuvent, exceptionnellement, ne pas appartenir à l'enveloppe, si l'on définit cette courbe comme nous l'avons fait au n° 271.

*Premier cas : La courbe* (C) *passe par un ou plusieurs points fixes.* — Soit P un tel point. Il appartient, quels que soient $\alpha$ et $h$, à l'intersection des lignes $(C_\alpha)$ et $(C_{\alpha+h})$. D'où il résulte qu'il fait partie des points limites de $(C_\alpha)$, quel que soit $\alpha$.

Du reste, on peut le vérifier analytiquement, en observant que ses coordonnées X, Y vérifient identiquement (2) par hypothèse, et (4), parce que les dérivées $\frac{dX}{d\alpha}$ et $\frac{dY}{d\alpha}$ sont nulles. Nous savons, d'autre part, que les équations (2), (4) entraînent l'équation (6).

Le point P est donc, à coup sûr, un point limite. Mais, comme il est fixe, il ne saurait engendrer aucune portion de l'enveloppe.

Lorsque cette circonstance se présente, on dit que *l'enveloppe dégénère en un certain nombre de points, qui sont les points fixes, et en une certaine courbe, qui est l'enveloppe véritable, au sens du n° 271.*

Il peut arriver que cette dernière n'existe pas, *l'enveloppe étant tout entière dégénérée en points fixes.* Il en est ainsi *lorsque les courbes proposées constituent un faisceau*, soit

$$(14) \qquad \varphi(x, y) + \lambda\psi(x, y) = 0,$$

$\lambda$ étant une certaine fonction de $\alpha$. Dans ce cas, en effet, deux courbes quelconques de la famille ont pour intersection les points de base du faisceau, c'est-à-dire les points communs aux deux courbes fixes $\varphi = 0$ et $\psi = 0$. Il s'ensuit que les points limites se confondent eux aussi avec ces points de base, qui constituent, dès lors, l'enveloppe dégénérée [1].

275. *Deuxième cas : Les courbes* (C) *présentent des points multiples.* — Soit Q un tel point, que nous supposons variable avec $\alpha$, pour ne pas retomber dans le cas précédent. Nous savons (n° 198) que ses coordonnées X et Y annulent $f'_X$ et $f'_Y$. Elles satisfont donc à l'équation (4), en même temps qu'à l'équation (2). Elles vérifient, par suite, aussi l'équation (6). Le point Q doit donc être considéré comme un point limite [2] et la ligne qu'il décrit doit faire analytiquement partie de l'enveloppe. Mais, il n'y a aucune raison pour que cette ligne soit tangente à chaque courbe (C) au point Q correspondant. Cette portion de l'enveloppe analytique ne répond donc pas à la définition du n° 271 et doit être regardée comme une solution singulière, qu'il y a lieu de séparer de la véritable solution.

Cette séparation se fait d'elle-même quand on cherche l'enveloppe par ses équations paramétriques. Mais, il n'en est pas de même lorsqu'on détermine

---

[1] Si l'on applique à l'équation (14) la règle générale donnée plus haut (n° 271), on doit éliminer $\alpha$ entre (14) et l'équation dérivée

$$(14') \qquad \frac{d\lambda}{d\alpha}\psi(x, y) = 0.$$

Cette dernière étant indépendante de $\alpha$, on est conduit à penser que l'élimination est toute faite et que (14') est l'équation de l'enveloppe. En réalité, si l'on tient compte de (14'), (14) se réduit à $\varphi(x, y) = 0$ et l'on voit bien que les points limites sont fixes et qu'il n'y a pas de véritable enveloppe.

[2] *Voir* la Note (1) de la page suivante.

celle-ci par son équation implicite, suivant la règle du n° 271. Il faut alors vérifier que cette équation se décompose, l'un des facteurs de décomposition étant le premier membre de l'équation du lieu du point Q. Ledit facteur doit d'ailleurs figurer au carré, si Q est seulement un point double [1].

276. Applications de la théorie des points limites. — La théorie des points limites permet souvent d'introduire des considérations géométriques intéressantes dans la recherche des enveloppes. C'est ainsi que, si l'on peut trouver une construction simple de ces points, on ramène la recherche de l'enveloppe à la recherche d'un lieu géométrique.

L'application aux *enveloppes de courbes algébriques* donne des renseignements qui sont quelquefois utiles. Supposons que la courbe variable (C) soit algébrique et de degré $n$.

Deux courbes infiniment voisines se coupent en $n^2$ points (n° 46). Donc, sur chaque courbe (C), il y a $n^2$ points limites [2]. Si l'on défalque les points fixes et les points multiples, on peut trouver le nombre de points suivant lesquels chaque courbe touche son enveloppe. C'est ainsi que, s'il y a $n^2 - 1$ points fixes ou multiples, il n'y a qu'un seul point de contact dont on peut, à coup sûr, calculer les coordonnées par des opérations rationnelles (*cf.* n° 266). La recherche des équations paramétriques de l'enveloppe est donc toute indiquée, dans cette circonstance.

277. Enveloppes de cercles. — La théorie des points limites

---

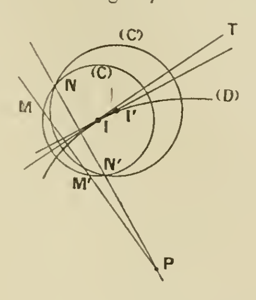
(1) On peut se rendre compte géométriquement de ce fait, en considérant deux positions voisines du point Q, que nous supposons point double, pour fixer les idées. La branche 1' coupe la branche 2 au point $M_2$, voisin de Q; la branche 2' coupe la branche 1 au point $M_1$, également voisin de Q. Lorsque Q' tend vers Q, il en est de même de $M_1$ et de $M_2$. On voit donc bien que Q est un point limite. Il doit même compter pour deux, puisqu'il est la limite commune à deux des points d'intersection des courbes infiniment voisines (C) et (C').

(2) On le voit aussi, en observant que l'équation (13) est, en général, de degré $n$, comme l'équation (10), puisque la dérivation par rapport à $\alpha$ n'affecte que les coefficients. Il peut arriver cependant que, dans cette opération, les termes de degré $n$ disparaissent tous. Mais, alors, c'est que leurs coefficients dans (10) étaient constants. Par suite, les $n$ points à l'infini de (C) sont fixes et font partie des points limites. Ceci explique le fait qu'il n'y a plus, dans ce cas, que $n(n-1)$ points limites à distance finie.

conduit à des résultats particulièrement élégants lorsqu'on l'applique à une famille de cercles.

Soit un cercle variable (C), dont le centre I décrit une courbe (D) (*fig.* 27), à laquelle on consacre ordinairement le

Fig. 27.




nom de *courbe déférente* ou simplement *déférente*. Soit (C') le cercle voisin, de centre I'. Les deux cercles se coupent en deux points N et N', symétriques par rapport à la ligne des centres II'. Lorsque (C') tend vers (C), I' tend vers I, II' tend vers la tangente IT, N et N' tendent vers les deux points limites M et M' ([1]). On peut, dès lors, énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Chaque cercle (C) touche son enveloppe en deux points, qui sont symétriques par rapport à la tangente à la déférente au centre dudit cercle.*

Cette propriété permet de construire l'un de ces deux points quand on connaît l'autre. Ceci arrive, par exemple, quand on définit la famille des cercles (C) par la déférente (D) et par une courbe (S), à laquelle tous les cercles (C) sont assujettis à rester tangents. On connaît le point de contact M de (C) avec (S). Le point M', qui s'en déduit, décrit une autre courbe (S') qui, avec (S), constitue toute l'enveloppe.

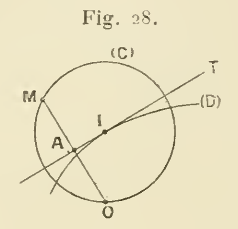
Un autre cas très simple est celui où le cercle (C) passe par un point fixe O (*fig.* 28). Ce point est alors un point limite (n° 274). L'autre est le point M, symétrique de O par rapport à la tangente IT. Son lieu constitue l'enveloppe du cercle. Or, ce lieu est homothétique

([1]) Les deux autres points limites sont les points cycliques.

du lieu du point A, projection de O sur IT. De là résulte la proposition suivante :

Théorème. — *L'enveloppe d'un cercle variable, qui passe par un point fixe* O, *est homothétique de la podaire* (n° 215) *de la déférente par rapport à ce point, le rapport d'homothétie étant* 2, *le centre d'homothétie étant* O.

Fig. 28.




Citons enfin le cas plus général où *le cercle* (C) *est orthogonal à un cercle fixe*. Si P (*fig.* 27) désigne le centre de ce cercle, il appartient à l'axe radical NN' des deux cercles (C) et (C') (n° 173). A la limite, la droite MM' passe aussi par P. Il s'ensuit que, *pour avoir les deux points de contact* M, M', *il suffit de prendre l'intersection du cercle* (C) *avec la perpendiculaire abaissée de* P *sur la tangente à la déférente*.

Le produit $\overline{PM}.\overline{PM'}$ est constant et égal au carré du rayon du cercle fixe orthogonal aux cercles (C) (n° 170). Il en résulte que l'enveloppe est anallagmatique relativement à ce cercle fixe (n° 120).

278. Introduction de paramètres surabondants. — De même que nous l'avons déjà expliqué à propos des lieux géométriques (n° 60), il est quelquefois commode, sinon indispensable, de substituer au paramètre unique $\alpha$ plusieurs paramètres liés par des relations. Imaginons, par exemple, que la famille des courbes (C) soit représentée par l'équation générale

$$f(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \tag{15}$$

les $n$ paramètres $\alpha_i$ étant liés par les $n-1$ relations indépendantes

$$\begin{cases} \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \\ \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0; \end{cases} \tag{16}$$

de sorte, qu'en réalité, nous n'avons qu'un seul paramètre indépendant.

On peut toujours imaginer qu'on ait tiré, des relations (16), $n-1$ des paramètres en fonction du $n^{\text{ième}}$, soit, pour fixer les idées, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ en fonction de $\alpha_n$. En portant dans (15), on n'a plus qu'un seul paramètre, $\alpha_n$, et l'on est ramené au cas du n° 271. Dès lors, les points limites sont définis par l'équation (15) et par celle qu'on en déduit en dérivant totalement par rapport à $\alpha_n$, soit

$$f'_{\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{d\alpha_n}+f'_{\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{d\alpha_n}+\ldots+f'_{\alpha_{n-1}}\frac{d\alpha_{n-1}}{d\alpha_n}+f'_{\alpha_n}=0. \tag{17}$$

Or, les dérivées inconnues $\frac{d\alpha_1}{d\alpha_n}, \frac{d\alpha_2}{d\alpha_n}, \ldots, \frac{d\alpha_{n-1}}{d\alpha_n}$ sont déterminées par les équations (16) dérivées totalement par rapport à $\alpha_n$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_1}\dfrac{d\alpha_1}{d\alpha_n}+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_2}\dfrac{d\alpha_2}{d\alpha_n}+\ldots+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_{n-1}}\dfrac{d\alpha_{n-1}}{d\alpha_n}+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_n}=0,\\
\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha_1}\dfrac{d\alpha_1}{d\alpha_n}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha_{n-1}}\dfrac{d\alpha_{n-1}}{d\alpha_n}+\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha_n}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial\alpha_1}\dfrac{d\alpha_1}{d\alpha_n}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial\alpha_{n-1}}\dfrac{d\alpha_{n-1}}{d\alpha_n}+\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial\alpha_n}=0.
\end{array}\right. \tag{18}$$

Éliminant $\frac{d\alpha_1}{d\alpha_n}, \frac{d\alpha_2}{d\alpha_n}, \ldots, \frac{d\alpha_{n-1}}{d\alpha_n}$ entre (17) et (18), nous avons (t. I, n° 291)

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial f}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial f}{\partial\alpha_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial\alpha_n}\\
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial\alpha_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial\alpha_n}
\end{vmatrix}=0. \tag{19}$$

Les points limites sont, en définitive, déterminés par le système (15), (19). Pour avoir leur lieu, quand $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ varient en satisfaisant aux équations (16), il suffit d'éliminer ces paramètres entre les $n+1$ équations (15), (16) et (19). Si l'on observe que l'équation (19) résulte, si l'on veut, de l'élimination des différentielles $d\alpha_1, d\alpha_2, \ldots, d\alpha_n$ entre les équations (15) et (16) diffé-

rentiées totalement par rapport aux $\alpha_i$, on peut énoncer la règle suivante :

Règle. — *Pour avoir l'équation de l'enveloppe, on élimine les $\alpha_i$ et leurs différentielles entre les $n$ équations* (15) *et* (16) *et celles qu'on en déduit par différentiation totale par rapport aux $\alpha_i$.*

Examinons le cas assez fréquent où $n = 2$. L'équation des courbes (C) est

$$f(x, y, \alpha_1, \alpha_2) = 0 \tag{20}$$

avec

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = 0. \tag{21}$$

L'équation (19) s'écrit, dans ce cas,

$$\frac{f'_{\alpha_1}}{\varphi'_{\alpha_1}} = \frac{f'_{\alpha_2}}{\varphi'_{\alpha_2}}. \tag{22}$$

L'équation de l'enveloppe s'obtient en éliminant $\alpha_1$, $\alpha_2$ entre (20), (21) et (22).

279. Famille définie par des équations paramétriques. — Supposons maintenant que la famille des courbes (C) soit définie par les équations paramétriques

$$x = f(t, \alpha), \qquad y = g(t, \alpha). \tag{23}$$

Sur la courbe ($C_\alpha$), le point de contact M a un certain paramètre $t$, qui est fonction de $\alpha$. Si, dans (23), on remplaçait $t$ par cette fonction, on obtiendrait les équations paramétriques de l'enveloppe, le paramètre étant $\alpha$. Les paramètres directeurs de la tangente à cette courbe sont donc

$$\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial g}{\partial t}\frac{dt}{d\alpha} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}. \tag{24}$$

D'autre part, ceux de la tangente à ($C_\alpha$) sont

$$\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial g}{\partial t}, \tag{25}$$

puisque, le long de cette ligne, $t$ seul varie.

Exprimons maintenant que les deux tangentes coïncident, en écrivant la proportionnalité des paramètres directeurs (24) et (25); il vient, après une simplification évidente,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial \alpha}}{\frac{\partial g}{\partial t}}$$

ou

$$(26) \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial \alpha}\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Cette équation nous définit la fonction de $\alpha$ par laquelle il faut remplacer $t$ dans (23), pour avoir les équations paramétriques de l'enveloppe cherchée.

Observons, toutefois, qu'on peut tout aussi bien tirer, de (26), $\alpha$ en fonction de $t$ ou bien $t$ et $\alpha$ en fonction d'un troisième paramètre $\theta$. En portant dans (23), on aura toujours les équations paramétriques de l'enveloppe.

Si l'on en voulait l'équation implicite, on éliminerait $t$ et $\alpha$ entre (23) et (26).

*Remarque.* — Les équations (23) peuvent, si l'on veut, être considérées comme définissant un système de coordonnées curvilignes dans le plan. Les courbes coordonnées ($\alpha$ = const.) ne sont autres que les courbes (C) proposées. Leur enveloppe est définie par l'équation (26), dans ledit système de coordonnées. Si l'on observe que, dans cette équation, les paramètres $t$ et $\alpha$ jouent le même rôle, on en conclut que l'équation (26) définit aussi l'enveloppe des courbes ($t$ = const.). En chaque point de cette enveloppe, les lignes coordonnées ($\alpha$) et ($t$) sont tangentes, tandis qu'en tout autre point du plan, elles se coupent sous un angle non nul.

## II. — ENVELOPPES DE SURFACES.

280. Enveloppes a un paramètre. — Soit une famille de surfaces (S) définie par l'équation

$$(27) \qquad f(x, y, z, \alpha) = 0,$$

qui renferme un paramètre arbitraire $\alpha$.

On peut étendre à cette famille la théorie des points limites exposée au n° 273. Les deux surfaces ($S_\alpha$) et ($S_{\alpha+h}$), de paramètres $\alpha$ et $\alpha + h$

se coupent suivant une certaine ligne qui, lorsque $h$ tend vers zéro, tend, sur $(S_\alpha)$, vers une courbe limite $(C_\alpha)$, qu'on appelle *la courbe caractéristique* ou simplement *la caractéristique de* $(S_\alpha)$. En répétant le raisonnement du n° 273, on montre que cette courbe a pour équations l'équation (27) et la suivante :

$$f'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0. \tag{28}$$

*On appelle enveloppe des surfaces* (S) *le lieu des caractéristiques de toutes ces surfaces.*

L'équation de cette enveloppe résulte de l'élimination du paramètre $\alpha$ entre (27) et (28). On peut répéter à son sujet les remarques II, III, IV du n° 272.

Nous allons montrer qu'*elle est tangente à chaque surface* (S), *tout le long de la caractéristique correspondante.*

En effet, soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de $(C_\alpha)$. L'équation du plan tangent à $(S_\alpha)$ en ce point est (n° 204)

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y + (Z - z)f'_z = 0. \tag{29}$$

D'autre part, soit $F(x, y, z)$ ce que devient $f(x, y, z, \alpha)$, quand on y remplace $\alpha$ par sa valeur tirée de (28). L'équation de l'enveloppe est évidemment

$$F(x, y, z) = 0.$$

Celle du plan tangent en M à cette surface est

$$(X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0. \tag{30}$$

Or, on a (t. I, n° 130)

$$F'_x \equiv f'_x + f'_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \qquad F'_y \equiv f'_y + f'_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \qquad F'_z \equiv f'_z + f'_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial z}. \tag{31}$$

D'autre part, le point M se trouvant sur la caractéristique $(C_\alpha)$, ses coordonnées vérifient l'équation (28). Si l'on tient compte de ce fait, les formules (31) nous donnent

$$F'_x = f'_x, \qquad F'_y = f'_y, \qquad F'_z = f'_z.$$

L'équation (30) devient identique à (29) et la propriété est démontrée.

Bien entendu, ce qui a été dit au n° 278, à propos de l'introduction de paramètres surabondants, s'applique au cas actuel.

281. Surfaces développables et périsphères. — Appliquons ce qui précède aux *enveloppes de plans*.

L'intersection de deux plans quelconques de la famille est une droite. Il en est donc de même de la caractéristique de chacun d'eux. L'enveloppe est engendrée par le déplacement d'une droite; c'est une surface réglée (n° 367). De plus, le plan tangent à cette surface est le même tout le long d'une même génératrice, puisque c'est celui des plans proposés qui admet cette génératrice pour caractéristique. Une telle surface porte le nom de *surface développable* (¹).

Considérons maintenant une *famille de sphères* à un paramètre. Le lieu de leurs centres est une courbe, que nous appellerons, comme au n° 277, la courbe déférente. Deux sphères (S) et (S') de la famille, de centres I et I', se coupent suivant un cercle, qui admet pour axe la droite II'. Si (S') tend vers (S), ce cercle tend vers la caractéristique de (S). De plus, II' tend vers la tangente IT à la déférente. Donc, *chaque sphère de la famille touche son enveloppe suivant un cercle, qui admet pour axe la tangente à la déférente au centre de cette sphère.*

L'enveloppe est une surface cerclée et porte le nom de *périsphère*.

282. Enveloppes a deux paramètres. — Soit une famille de surfaces (S) définie par l'équation

$$f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \tag{32}$$

qui renferme deux paramètres arbitraires indépendants, $\alpha$ et $\beta$.

*On appelle enveloppe de cette famille une surface* (E) *tangente à toutes les surfaces* (S).

Soit M un point de contact de la surface $(S_{\alpha,\beta})$ avec cette enveloppe. Ses coordonnées (X, Y, Z) sont évidemment des fonctions

(¹) On démontre que les surfaces développables sont les seules qui puissent être déformées sans déchirure ni duplicature, de manière à être appliquées sur un plan ou, comme on dit, *développées*.

de $\alpha$, $\beta$. Ces fonctions satisfont identiquement à l'équation

$$f(X, Y, Z, \alpha, \beta) = 0. \tag{33}$$

D'autre part, l'équation du plan tangent en M à $(S_{\alpha,\beta})$ étant

$$(x - X)f'_X + (y - Y)f'_Y + (z - Z)f'_Z = 0,$$

pour que la surface (E), qui est le lieu de M quand $\alpha$ et $\beta$ varient, soit tangente à $(S_{\alpha,\beta})$, il faut et il suffit qu'on ait, quels que soient $d\alpha$ et $d\beta$,

$$f'_X\,dX + f'_Y\,dY + f'_Z\,dZ = 0. \tag{34}$$

Comme au n° 271, cette équation se simplifie. Si l'on différentie totalement (33), on a

$$f'_X\,dX + f'_Y\,dY + f'_Z\,dZ + f'_\alpha\,d\alpha + f'_\beta\,d\beta = 0. \tag{35}$$

Moyennant cette équation, (34) équivaut à

$$f'_\alpha\,d\alpha + f'_\beta\,d\beta = 0.$$

Comme ceci doit avoir lieu quels que soient $d\alpha$, $d\beta$, on en conclut que les fonctions X, Y, Z doivent, outre (33), vérifier

$$f'_\alpha = 0, \qquad f'_\beta = 0. \tag{36}$$

Le système (33), (36) suffit pour définir ces fonctions.

*Si on le résout par rapport à* X, Y, Z, *on a les équations paramétriques de l'enveloppe. Si l'on élimine* $\alpha$, $\beta$, *on en a, au contraire, l'équation implicite.*

283. Points limites. — On peut étendre aux enveloppes de surfaces à deux paramètres la théorie des points limites exposée au n° 273.

Considérons trois surfaces de la famille (S), (S′), (S″) de paramètres $(\alpha, \beta)$, $(\alpha + h, \beta + k)$, $(\alpha + h', \beta + k')$. Elles se coupent en un certain nombre de points définis par le système :

$$f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \tag{37}$$
$$f(x, y, z, \alpha + h, \beta + k) = 0, \tag{38}$$
$$f(x, y, z, \alpha + h', \beta + k') = 0. \tag{39}$$

On appelle *points limites* de la surface (S) la limite des points précédents quand $h$, $k$, $h'$, $k'$ tendent vers zéro de manière quelconque. Pour les déter-

miner, développons (38) et (39) par la formule des accroissements finis, (t. I, n° 131); il vient, en tenant compte de (37),

$$h f'_\alpha(x, y, z, \alpha+\theta h, \beta+\theta k) + k f'_\beta(x, y, z, \alpha+\theta h, \beta+\theta k) = 0,$$
$$h' f'_\alpha(x, y, z, \alpha+\theta' h', \beta+\theta' k') + k' f'_\beta(x, y, z, \alpha+\theta' h', \beta+\theta' k') = 0.$$

Divisons la première de ces équations par $h$, la seconde par $h'$; puis, faisons tendre $h$, $k$, $h'$, $k'$ vers zéro, en appelant $\lambda$ et $\lambda'$ les limites respectives de $\frac{k}{h}$ et $\frac{k'}{h'}$. Nous obtenons

$$(40) \qquad f'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) + \lambda f'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$
$$(41) \qquad f'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) + \lambda' f'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

Si, comme il est légitime ([1]), nous supposons $\lambda' \neq \lambda$, ce système équivaut à

$$(42) \qquad f'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \qquad f'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

Finalement, *nos points limites* sont définis par le système (37), (42). Ils *coïncident donc avec les points de contact de la surface* (S) *avec l'enveloppe* (E).

Il convient toutefois d'apporter quelques restrictions, analogues à celles du n° 274. C'est ainsi que, si la surface (S) passe par certains points fixes, ces points fixes font partie des points limites, mais ne sont pas des points de contact. Ils constituent une dégénérescence de l'enveloppe.

De même, les points multiples de (S), quand ils existent, sont des points limites et engendrent une surface, qui fait analytiquement partie de l'enveloppe, mais constitue une solution singulière, qu'il convient de séparer de la solution véritable.

284. Introduction de paramètres surabondants. — Supposons que la famille des surfaces (S) soit définie par l'équation

$$(43) \qquad f(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0,$$

les $n$ paramètres $\alpha_i$ étant liés par $n-2$ relations distinctes

$$(44) \qquad \begin{cases} \varphi_1 \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \\ \varphi_2 \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-2}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0. \end{cases}$$

---

([1]) Les équations (40) et (41) doivent, en effet, être satisfaites quels que soient $\lambda$ et $\lambda'$, puisque nous voulons que $h$, $k$, $h'$, $k'$ tendent vers zéro *de manière quelconque*.

Imaginons que l'on ait tiré de ces relations $n-2$ des paramètres en fonction des deux autres, par exemple $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$ en fonction de $\alpha_1$ et de $\alpha_2$. En portant dans (43), on est ramené au cas précédemment traité. Les points limites sont alors déterminés par l'équation (43) et par la suivante

$$(45) \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial \alpha_3} d\alpha_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \alpha_n} d\alpha_n = 0,$$

qui doit être satisfaite quels que soient $d\alpha_1$ et $d\alpha_2$. Or, $d\alpha_3, d\alpha_4, \ldots, d\alpha_n$ se calculent en différentiant (44). En éliminant ces différentielles entre (45) et

$$(46) \qquad d\varphi_1 = 0, \qquad d\varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad d\varphi_{n-2} = 0,$$

on obtient une équation linéaire et homogène en $d\alpha_1$, $d\alpha_2$. En annulant séparément les coefficients de $d\alpha_1$ et de $d\alpha_2$, on a deux équations qui définissent avec (43), les points limites. En éliminant entre elles, (43) et (44), les $n$ paramètres $\alpha_i$, on obtient l'équation de l'enveloppe.

Appliquons ceci au cas où $n = 3$.

Soit la famille de surfaces définie par l'équation

$$(47) \qquad f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

les trois paramètres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant liés par la relation

$$(48) \qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Différentions ces deux équations, par rapport à $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ :

$$(49) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial \beta} d\beta + \dfrac{\partial f}{\partial \gamma} d\gamma = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha} d\alpha + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta} d\beta + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma} d\gamma = 0. \end{cases}$$

Éliminons $d\gamma$ :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} - \frac{\partial f}{\partial \gamma}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right) d\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} - \frac{\partial f}{\partial \gamma}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right) d\beta = 0.$$

Cette équation doit être vérifiée quels que soient $d\alpha$ et $d\beta$. Cela entraîne les deux suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} - \frac{\partial f}{\partial \gamma}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} - \frac{\partial f}{\partial \gamma}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0,$$

qui peuvent s'écrire sous la forme plus symétrique

$$\frac{f'_\alpha}{\varphi'_\alpha} = \frac{f'_\beta}{\varphi'_\beta} = \frac{f'_\gamma}{\varphi'_\gamma}. \tag{50}$$

L'équation de l'enveloppe résulte, en définitive, de l'élimination de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entre (47), (48) et (50).

285. Enveloppes de plans et de sphères. — Soit d'abord *une famille de plans à deux paramètres.* Trois plans quelconques de la famille ont un seul point commun. Si deux de ces plans tendent vers le troisième (P), ce point commun tend vers l'unique point limite de (P). *Chaque plan de la famille touche donc son enveloppe en un seul point.* Ladite enveloppe est une surface quelconque non développable.

Soit maintenant *une famille de sphères.* Le lieu de leurs centres est une surface (D), qu'on appelle *surface déférente.* Soient trois sphères quelconques (S), (S'), (S") de la famille, de centres respectifs I, I', I". Elles ont deux points communs N, N', symétriques par rapport au plan II'I".

Supposons maintenant que (S') et (S") tendent vers (S). Les points I' et I" tendent vers I et le plan II'I" tend vers le plan tangent en I à (D). Quant aux deux points N et N', ils tendent vers les points limites M et M' de (S). De là résulte la proposition suivante :

Théorème. — *Dans toute famille de sphères à deux paramètres, chaque sphère de la famille touche son enveloppe en deux points symétriques par rapport au plan tangent à la surface déférente au centre de cette sphère.*

Si l'on connaît à l'avance l'un des deux points de contact, on en déduit l'autre par une construction immédiate. En particulier, *si la sphère passe par un point fixe* O, on démontre, en raisonnant comme au n° 277, que *l'enveloppe est homothétique de la podaire de la déférente par rapport à* O.

De même, *si les sphères proposées sont orthogonales à une sphère fixe*, de centre O, la corde de contact MM' est la perpendiculaire abaissée de O sur le plan tangent à la déférente. L'enveloppe est une surface anallagmatique (*cf.* n° 425).

## III. — ENVELOPPES DE COURBES DANS L'ESPACE.

286. Courbes définies par deux équations implicites. — Soit la famille de courbes (C) définie par les équations

$$(51)\qquad f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad g(x, y, z, \alpha) = 0,$$

qui renferment le paramètre variable $\alpha$. Proposons-nous de chercher une courbe (E) tangente à toutes les courbes (C).

Soit M un point de contact de la courbe $(C_\alpha)$, de paramètre $\alpha$. Les coordonnées X, Y, Z de ce point sont des fonctions de $\alpha$, qui vérifient identiquement les équations (51). On a donc, quel que soit $\alpha$,

$$(52)\qquad f(X, Y, Z, \alpha) = 0, \qquad g(X, Y, Z, \alpha) = 0.$$

Exprimons maintenant que les deux lignes (E) et $(C_\alpha)$ sont tangentes. La tangente à (E) a pour paramètres directeurs (n° 192)

$$(53)\qquad \frac{dX}{d\alpha}, \frac{dY}{d\alpha}, \frac{dZ}{d\alpha}.$$

La tangente à $(C_\alpha)$ a pour équations (n° 205)

$$(54)\qquad \begin{cases} (x - X)f'_X + (y - Y)f'_Y + (z - Z)f'_Z = 0, \\ (x - X)g'_X + (y - Y)g'_Y + (z - Z)g'_Z = 0, \end{cases}$$

où $x, y, z$ représentent les coordonnées courantes.

Pour que ces deux tangentes coïncident, il suffit qu'elles aient la même direction, puisqu'elles ont déjà le point M commun. Écrivons donc que la direction (53) est parallèle aux deux plans (54), nous avons les deux conditions

$$(55)\qquad \begin{cases} f'_X \dfrac{dX}{d\alpha} + f'_Y \dfrac{dY}{d\alpha} + f'_Z \dfrac{dZ}{d\alpha} = 0, \\ g'_X \dfrac{dX}{d\alpha} + g'_Y \dfrac{dY}{d\alpha} + g'_Z \dfrac{dZ}{d\alpha} = 0. \end{cases}$$

Si, maintenant, nous dérivons totalement, par rapport à $\alpha$, les équations (52), nous voyons, comme au n° 271, que les conditions (55) équivalent aux suivantes :

$$(56)\qquad f'_\alpha = 0, \qquad g'_\alpha = 0.$$

En définitive, les trois fonctions inconnues X, Y, Z doivent satisfaire identiquement aux quatre équations (52) et (56). De telles fonctions n'existent pas en général. Donc :

Théorème. — *Une famille de courbes à un paramètre prise au hasard dans l'espace ne possède, en général, pas d'enveloppe. Pour que cette enveloppe existe, dans le cas où la famille est définie par les équations* (51), *il faut et il suffit que les quatre équations* (51) *et* (56) *soient compatibles en* $x$, $y$, $z$, *quel que soit* $\alpha$. *Si cela est, la solution commune donne les coordonnées du point de contact en fonction de* $\alpha$ *et, par suite, les équations paramétriques de l'enveloppe.*

287. Signalons *un cas où l'enveloppe existe toujours*. C'est celui où *la famille de courbes est constituée par les caractéristiques d'une famille de surfaces à un paramètre.*

Soit, en effet, la famille de surfaces définie par l'équation

(57) $$f(x, y, z, \alpha) = 0.$$

Les caractéristiques de cette famille ont pour équations l'équation (57) et la suivante (n° 280)

(58) $$f'_\alpha = 0.$$

Pour cette famille de courbes, les équations (56) deviennent

(59) $$f'_\alpha = 0, \qquad f''_{\alpha^2} = 0.$$

Les quatre équations (57), (58), (59), se réduisent, comme on le voit, aux trois suivantes :

(60) $$f = 0, \qquad f'_\alpha = 0, \qquad f''_{\alpha^2} = 0.$$

Elles sont généralement compatibles en $x, y, z$, puisqu'il y a juste autant d'équations que d'inconnues. *Il y a donc bien une enveloppe, dont on calculerait les équations paramétriques en résolvant le système* (60) *par rapport à* $x, y, z$.

288. Enveloppes de droites. — Appliquons ce qui précède aux enveloppes de droites. Soit la famille de droites définie par les

équations

$$(61)\qquad Ax + By + Cz + D = 0, \qquad A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,$$

où les coefficients A, B, …, $D_1$ sont des fonctions quelconques de $\alpha$. Dérivons, par rapport à $\alpha$,

$$(62)\qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0, \qquad A'_1 x + B'_1 y + C'_1 z + D'_1 = 0.$$

Pour que les équations (61) et (62) soient compatibles en $x$, $y$, $z$, il faut et il suffit que l'on ait

$$(63)\qquad \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A' & B' & C' & D' \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Telle est la condition que doivent remplir les coefficients pour que nos droites aient une enveloppe.*

289. Conformément au n° 287, cette condition est toujours remplie lorsqu'on a affaire aux caractéristiques d'une famille de plans à un paramètre, définie, par exemple, par la première équation (61). Le point de contact est alors déterminé par le système

$$(64)\qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$(65)\qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

$$(66)\qquad A''x + B''y + C''z + D'' = 0.$$

En résolvant ce dernier par rapport à $x$, $y$, $z$, on a les équations paramétriques de l'enveloppe.

Si l'on se reporte au n° 281, on peut dire que *les génératrices d'une surface développable ont toujours une enveloppe.* Cette enveloppe est appelée *arête de rebroussement de la surface* [1].

Théorème. — *Le plan osculateur en un point* M *de l'arête de*

[1] Cette dénomination tient à ce que tout plan coupe la surface suivant une courbe admettant pour points de rebroussement les points de rencontre du plan avec l'arête.

Lorsque la développable est un cône, le point limite de chaque génératrice est le sommet du cône. L'arête de rebroussement est alors réduite à ce sommet. Ceci s'applique également aux cylindres, considérés comme des cônes de sommet à l'infini.

*rebroussement coïncide avec le plan tangent à la surface développable tout le long de la génératrice tangente en M à l'arête.*

Nous allons montrer, en effet, que les fonctions $x$, $y$, $z$, définies par (64), (65) et (66), vérifient identiquement les équations

$$A x' + B y' + C z' = 0, \tag{67}$$

$$A x'' + B y'' + C z'' = 0, \tag{68}$$

ce qui suffit pour démontrer le théorème (n° 226).

Dérivons totalement (64) par rapport à $\alpha$,

$$A' x + B' y + C' z + D' + A x' + B y' + C z' = 0.$$

En tenant compte de (65), cette équation se réduit à (67).

Dérivons maintenant totalement (67),

$$A' x' + B' y' + C' z' + A x'' + B y'' + C z'' = 0.$$

Nous aurons démontré (68), si nous prouvons que l'on a

$$A' x' + B' y' + C' z' = 0. \tag{69}$$

Or, dérivons totalement (65),

$$A'' x + B'' y + C'' z + D'' + A' x' + B' y' + C' z' = 0.$$

En tenant compte de (66), cette équation se réduit à (69). Donc, le théorème est démontré.

On peut aisément démontrer que, réciproquement, *les plans osculateurs d'une courbe gauche quelconque enveloppent une surface développable dont la courbe gauche est l'arête de rebroussement.*

En effet, admettons que l'équation (64) représente le plan osculateur au point $M(x, y, z)$, de paramètre $\alpha$. On a, dans ce cas, les identités (64), (67) et (68). En dérivant totalement (64), par rapport à $\alpha$, et tenant compte de (67), on obtient (65). En dérivant (67) et tenant compte de (68), on obtient (69). Enfin, en dérivant (65) et tenant compte de (69), on obtient (66). Les coordonnées $x$, $y$, $z$ vérifiant à la fois (64), (65) et (66), le point M décrit bien, quand $\alpha$ varie, l'arête de rebroussement de la développable enveloppée par le plan osculateur (64). C. Q. F. D.

290. Courbes définies par des équations paramétriques. — Soit

maintenant la famille de courbes définie par les équations

$$(70) \qquad x = f(t, \alpha), \qquad y = g(t, \alpha), \qquad z = h(t, \alpha).$$

En raisonnant comme au n° 279, on voit que, s'il y a une enveloppe, le $t$ du point de contact de la courbe $(C_\alpha)$ doit satisfaire aux égalités

$$(71) \qquad \frac{f'_t}{f'_\alpha} = \frac{g'_t}{g'_\alpha} = \frac{h'_t}{h'_\alpha}.$$

Pour qu'il y ait une enveloppe, il faut et suffit que ces équations soient compatibles par rapport à $t$, quel que soit $\alpha$. Si cela est, la solution commune constitue le $t$ du point de contact. En portant dans (70), on a les équations paramétriques de l'enveloppe.

# CHAPITRE XX.

## COORDONNÉES TANGENTIELLES.

### I. — COORDONNÉES TANGENTIELLES DANS LE PLAN.

291. Coordonnées d'une droite. — Jusqu'à présent, l'élément sur lequel nous avons fait reposer la Géométrie analytique a été *le point*. C'est lui qui nous a servi de point de départ et nous a permis d'édifier la théorie analytique des lignes et des surfaces, par la considération des diverses relations que l'on peut établir entre ses coordonnées. La Géométrie, envisagée de ce point de vue, porte le nom de *Géométrie ponctuelle* et les coordonnées correspondantes sont appelées *coordonnées ponctuelles*.

Mais, on peut, tout aussi bien, prendre comme élément générateur une ligne quelconque d'une nature déterminée, telle que la droite, le cercle, les coniques, etc., ou bien une surface, telle que le plan, la sphère, les quadriques, etc. Cela peut être commode pour l'étude de certaines questions, d'un genre particulier.

Nous ne pouvons entreprendre ici le développement de considérations aussi générales. Nous nous contenterons d'exposer, dans ce paragraphe, le point de vue qui consiste à prendre *la droite* comme élément générateur du plan et qui conduit à la *Géométrie* et aux *coordonnées tangentielles*.

292. Il s'agit d'abord de *définir les coordonnées d'une droite*. Nous avons déjà donné une telle définition au n° 65, sous la dénomination de *coordonnées normales*. Mais ce ne sont pas celles dont nous voulons entreprendre ici l'étude systématique.

Soient deux axes de coordonnées quelconques $Ox$ et $Oy$. Par rapport à ces axes, toute droite D a une équation de la forme

$$(1) \qquad ux + vy + w = 0.$$

Nous appellerons *coordonnées homogènes de cette droite* les coefficients $u$, $v$, $w$. Ce sont des coordonnées homogènes, en ce sens que, pour une droite donnée, elles ne sont évidemment définies qu'à un facteur près.

Par exemple, les coordonnées homogènes de *l'axe des $x$* sont

(o, $v$, o). *Celles de* O$y$ sont de même ($u$, o, o) et celles de *la droite de l'infini* (o, o, $w$). Les parallèles à O$x$ sont caractérisées par la condition $u = 0$ et les parallèles à O$y$ par la condition $v = 0$. Pour une *droite isotrope*, on doit avoir, en supposant les axes rectangulaires, $u + iv = 0$ ou bien $u - iv = 0$.

La définition précédente convient, sans modification aucune, aux coordonnées trilinéaires (Chap. X). Si, dans un tel système, la droite D a pour équation

$$ux + vy + wz = 0, \tag{2}$$

les coefficients $u$, $v$, $w$ sont ses *coordonnées trilinéaires*.

Par exemple, les côtés du triangle de référence ont respectivement pour coordonnées ($u$, o, o), (o, $v$, o), (o, o, $w$).

Toute droite passant par le sommet A(1, o, o) est caractérisée par la condition $u = 0$. De même, si elle passe par B ou C, on a $v = 0$ ou $w = 0$.

293. Équations tangentielles. — Proposons-nous maintenant d'*interpréter les équations que l'on peut établir entre les coordonnées que nous venons de définir*.

Tout d'abord, il convient d'observer qu'*une telle équation doit être homogène*. Si, en effet, elle est vérifiée par les coordonnées $u$, $v$, $w$, elle doit l'être aussi, quel que soit $\lambda$, par les coordonnées $\lambda u$, $\lambda v$, $\lambda w$, qui conviennent à la même droite.

Cela posé, soit l'équation homogène

$$f(u, v, w) = 0. \tag{3}$$

Elle établit une équation entre les deux paramètres indépendants dont dépend la droite D. *Elle définit une famille de droites*, à un paramètre. Ces droites admettent une enveloppe (E), de sorte que l'on peut dire, tout aussi bien, que *l'équation* (3) *définit cette enveloppe* dont elle est appelée *l'équation tangentielle* (*cf.* n° 207).

On peut se proposer de passer de cette équation tangentielle à l'équation ponctuelle de l'enveloppe (E). Pour cela, il suffit d'appliquer la méthode générale du n° 278.

Nous avons à chercher l'enveloppe de la droite (1), sachant que ses coefficients sont liés par la relation (3). Nous pouvons toujours considérer, par exemple, $w$ comme constant, de façon à ne plus avoir que deux paramètres non homogènes $u$ et $v$ liés par une relation. On

sait alors que, pour avoir l'équation ponctuelle de l'enveloppe, il faut éliminer $u$ et $v$ entre les équations (1), (3) et

$$(4) \qquad \frac{f'_u}{x} = \frac{f'_v}{y}.$$

On peut simplifier un peu les calculs et les rendre plus symétriques, en faisant la remarque suivante. La valeur commune des rapports (4) est égale, d'après une propriété élémentaire, au rapport

$$(5) \qquad \frac{uf'_u + vf'_v}{ux + vy}.$$

Or, d'après l'identité d'Euler (t. I, n° 134), on a, en appelant $m$ le degré d'homogénéité de $f(u, v, w)$,

$$(6) \qquad uf'_u + vf'_v + wf'_w \equiv mf(u, v, w).$$

Si l'on tient compte de (3), ceci nous donne

$$(7) \qquad uf'_u + vf'_v = -wf'_w.$$

D'autre part, d'après (1), on peut écrire

$$ux + vy = -w.$$

Dès lors, le rapport (5) devient égal à $\dfrac{-wf'_w}{-w} = f'_w$.

On peut donc affirmer que les équations (1), (3), (4) entraînent les suivantes :

$$(8) \qquad \frac{f'_u}{x} = \frac{f'_v}{y} = \frac{f'_w}{1}.$$

Réciproquement, si l'on a (8), chacune des équations (1) et (3) entraîne l'autre. En effet, la valeur commune des rapports (8) peut s'écrire

$$\frac{uf'_u + vf'_v + wf'_w}{ux + vy + w} \equiv \frac{mf(u, v, w)}{ux + vy + w}.$$

Si, comme nous le supposons, les rapports (8) ne sont ni nuls ni infinis (¹), ceci nous montre que chacune des quantités $f(u, v, w)$ et $ux + vy + w$ ne peut être nulle sans que l'autre le soit.

(¹) Ils ne peuvent évidemment être infinis, car le dénominateur du dernier est 1. Pour qu'ils soient nuls, il faudrait que $f'_u$, $f'_v$ et $f'_w$ le fussent. La droite D correspondante serait alors une tangente singulière (n° 299).

Finalement, pour obtenir l'équation ponctuelle cherchée, il suffit d'éliminer $u$ et $v$ ou, ce qui revient au même, à cause de l'homogénéité, $u$, $v$, $w$ entre (8) et (1) ou entre (8) et (3).

Introduisant, pour plus de symétrie dans les formules, des coordonnées homogènes (ou trilinéaires) $x$, $y$, $z$, nous pouvons énoncer la règle suivante :

Règle. — *Pour calculer l'équation ponctuelle homogène de la courbe définie par l'équation tangentielle homogène* (3), *il suffit d'éliminer* $u$, $v$, $w$ *entre les équations*

$$\frac{f'_u}{x} = \frac{f'_v}{y} = \frac{f'_w}{z} \tag{9}$$

*et l'une ou l'autre des équations* (2) *et* (3).

Remarquons d'ailleurs que l'équation (2) sera généralement préférable à l'équation (3), comme étant plus simple.

294. D'après (9), *les coordonnées homogènes du point de contact de la droite* D $(u, v, w)$ *sont* $f'_u$, $f'_v$, $f'_w$.

On peut en déduire une méthode pour trouver les points d'intersection de la courbe (E) avec une courbe quelconque, définie par son équation ponctuelle

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Il suffit de résoudre le système constitué par l'équation (3) et la suivante :

$$\varphi(f'_u, f'_v, f'_w) = 0.$$

On obtient ainsi les coordonnées des tangentes à (E) aux points cherchés : d'où l'on peut déduire les coordonnées de ces points eux-mêmes, par l'application des formules (9).

C'est ainsi qu'en coordonnées cartésiennes, *on aura les points à l'infini*, en combinant l'équation (3) avec $f'_w = 0$.

295. Courbes algébriques. Classe. — Nous savons déjà (n° 207) que toute courbe algébrique a une équation tangentielle algébrique. Réciproquement, *toute équation tangentielle algébrique définit une courbe algébrique.* Cela résulte, en effet, de ce que les calculs qui conduisent à l'équation ponctuelle de cette courbe sont, d'après la règle précédente, tous algébriques et aboutissent, par conséquent, à une équation algébrique en $x$, $y$, $z$.

On appelle *classe* d'une courbe algébrique le degré de son équation tangentielle (*cf.* n° 212). C'est aussi le nombre des tangentes à la courbe qu'on peut mener par un point quelconque de son plan.

296. Équation tangentielle du point. — Toute *courbe de première classe* a une équation tangentielle de la forme

$$(10) \qquad Au + Bv + Cw = 0.$$

Or, une telle équation exprime simplement que la droite D $(u, v, w)$ passe par le point P qui a pour coordonnées homogènes (A, B, C). La courbe (E) dégénère donc, dans ce cas, en un point (*cf.* n° 274) et l'on peut dire que :

Théorème. — *Toute équation tangentielle du premier degré représente un point* ou, ce qui revient au même, *toute courbe de première classe est un point.*

Réciproquement, toute droite qui passe par le point P a des coordonnées qui satisfont à l'équation (10). Donc, *tout point est représenté, en coordonnées tangentielles, par une équation du premier degré.*

Signalons les équations tangentielles de quelques points remarquables du plan :

*Origine :* $w = 0$.
*Point à l'infini* dans la direction de paramètres directeurs $a$, $b$ :

$$au + bv = 0.$$

*Point à l'infini sur* $Ox$ : $u = 0$.
*Point à l'infini sur* $Oy$ : $v = 0$ [1].
*Points cycliques* (en coordonnées rectangulaires) :

$$u \pm iv = 0 \quad \text{ou} \quad u^2 + v^2 = 0.$$

Théorème. — *Deux courbes algébriques, de classes* $m$ et $p$ *ont* $mp$ *tangentes communes.*

---

[1] En coordonnées trilinéaires, les équations $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ représentent les sommets A, B, C du triangle de référence.

Les tangentes sont, en effet, déterminées par deux équations algébriques homogènes en $u$, $v$, $w$, de degrés respectifs $m$ et $p$ et auxquelles il suffit d'appliquer le théorème de Bezout (t. I, n° 238).

Si, en particulier, on prend $p = 1$, on retrouve la propriété connue, d'après laquelle on peut mener $m$ tangentes à une courbe de la $m^{\text{ième}}$ classe, par tout point de son plan.

Théorème. — *Une courbe algébrique de la $m^{\text{ième}}$ classe est, en général, de degré $m\,(m-1)$.*

Coupons-la, en effet, par une droite quelconque. Nous avons à combiner l'équation (3) avec (n° 294).

$$Af'_u + Bf'_v + Cf'_w = 0.$$

Cette dernière étant de degré $m-1$, il y a $m\,(m-1)$ solutions.

Toutefois, il y a lieu d'observer que certaines de ces solutions peuvent ne pas convenir. Ce sont celles qui annulent à la fois $f'_u$, $f'_v$, $f'_w$. Elles correspondent, comme on sait (n° 299), aux tangentes multiples. S'il n'y a que des tangentes doubles et d'inflexion, on démontre la formule suivante :

$$\delta = m(m-1) - 2d - 3i,$$

où $\delta$ désigne le degré, $d$ le nombre des tangentes doubles, $i$ le nombre des tangentes d'inflexion.

297. Principe de dualité. — Le lecteur, s'il se reporte aux calculs développés au n° 207, ne manquera pas de remarquer l'analogie qu'ils présentent avec ceux du n° 293. On passe des premiers aux seconds, ainsi que des seconds aux premiers, par le simple échange des variables $x$, $y$, $z$ (ou $t$) avec les variables $u$, $v$, $w$.

Observons aussi que, si la droite a une équation ponctuelle du premier degré, le point a, de son côté, une équation tangentielle du premier degré.

Une analogie semble donc se dessiner entre la géométrie ponctuelle et la géométrie tangentielle. En fait, cette analogie peut être poursuivie aussi loin qu'on le veut. On peut déduire analytiquement toute la géométrie tangentielle de la géométrie ponctuelle, par le simple échange, signalé plus haut, des variables $x$, $y$, $z$ avec les variables $u$, $v$, $w$. Il suffit de savoir interpréter géométriquement cet échange. Il équivaut à une transformation importante, que nous retrouverons plus tard, mais dont nous allons néanmoins établir, dès maintenant, les propriétés fondamentales.

A tout point $m(x, y, z)$, on fait correspondre la droite $D(u, v, w)$, définie par

$$u = x, \quad v = y, \quad w = z. \tag{11}$$

*Si* M *décrit la droite* $D_0(u_0, v_0, w_0)$, on a

$$u_0 x + v_0 y + w_0 z = 0. \tag{12}$$

Or, ceci peut s'écrire, d'après (11),

$$x_0 u + y_0 v + z_0 w = 0, \tag{13}$$

ce qui exprime que *la droite* D *passe par le point fixe* $M_0$ *qui correspond à* $D_0$.

Si l'on prend quatre points $M_1, M_2, M_3, M_4$ sur $D_0$, leurs coordonnées sont de la forme $(x + \lambda_i x', y + \lambda_i y', z + \lambda_i z')$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Celles des droites $D_1, D_2, D_3, D_4$ correspondantes sont de la même forme, d'après (11). Il s'ensuit que *les rapports anharmoniques* $(M_1 M_2 M_3 M_4)$ *et* $(D_1 D_2 D_3 D_4)$ *sont égaux*, comme égaux tous deux à $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$.

Les deux propriétés précédentes suffisent pour caractériser notre transformation et en établir toutes les autres propriétés.

298. Imaginons, par exemple, que M décrive une certaine courbe (C); D enveloppe alors une certaine courbe (E). Je dis que *la tangente en* M *à* (C) *est la droite homologue du point de contact de* D *avec* (E). En effet, prenons sur (C) le point M' voisin de M. Il lui correspond la droite D', tangente à (E). A la droite MM' correspond le point P de rencontre de D et de D', comme il résulte de la première des propriétés précédentes. Or, si M' tend vers M, MM' tend vers la tangente MT en M à (C); d'autre part, D' tend vers D et le point P tend vers le point de contact de D avec (E) (n° 273). Ce point de contact est donc bien l'homologue de la tangente MT.

Au reste, ceci n'est pas moins évident par le calcul. Soit, en effet,

$$f(x, y, z) = 0 \tag{14}$$

l'équation ponctuelle de (C). L'équation tangentielle de (E) est alors

$$f(u, v, w) = 0. \tag{15}$$

Or, les coordonnées de la tangente en M à (C) sont $f'_x, f'_y, f'_z$ (n° 197); d'autre part, les coordonnées du point de contact de D avec (E) sont $f'_u, f'_v, f'_w$ (n° 294). Si l'on tient compte de (11), on voit bien que ce point de contact et cette tangente sont point et droite homologues.

Grâce à cette proposition, *la relation entre les deux courbes* (C) *et* (E) *est réciproque*. Si

$$\Phi(u, v, w) = 0 \tag{16}$$

est l'équation tangentielle de (C),

$$\Phi(x, y, z) = 0 \tag{17}$$

est l'équation ponctuelle de (E). Ceci résulte, d'ailleurs, aussi de la remarque faite au début du numéro précédent.

Dans le cas où elles sont algébriques, *le degré de chacune des deux courbes égale la classe de l'autre*.

299. La correspondance dont nous venons d'exposer les propriétés fondamentales permet de déduire de n'importe quelle proposition une proposition nouvelle, qui est dite *corrélative* de la première. On obtient son énoncé et sa démonstration, en remplaçant, dans l'énoncé et la démonstration de la proposition primitive, les droites par des points et les points par des droites, conformément aux principes généraux ci-dessus.

Analytiquement, à toute formule de géométrie ponctuelle [1], correspond une formule de géométrie tangentielle, qu'on peut écrire immédiatement par le simple échange de $x, y, z$ avec $u, v, w$.

C'est ainsi que de l'équation de la tangente en coordonnées ponctuelles (n° 197), on déduit *l'équation du point de contact en coor-*

---

[1] A vrai dire, cette transformation des formules ou des propositions ne conduit à des résultats d'interprétation simple que s'il s'agit de formules ou propositions ayant trait à des éléments projectifs. Il ne saurait être question de propriétés métriques, puisque nos coordonnées peuvent être des coordonnées trilinéaires quelconques. Si l'on veut transformer par corrélation des propriétés métriques, il faut, au préalable, les traduire en langage projectif (*cf.* n° 164); à moins qu'on n'ait choisi des coordonnées particulières, telles que les coordonnées cartésiennes rectangulaires.

*données tangentielles :*

(18) $$Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w = 0,$$

qui résulte d'ailleurs aussi de ce qui a été vu au n° 294.

De la théorie des points multiples (n° 198), on peut déduire la théorie des *tangentes multiples*. Une tangente est multiple d'ordre $p$, si elle compte pour $p$ parmi les tangentes issues d'un quelconque de ses points. Elle possède alors $p$ points de contact, caractérisés par le fait que, parmi les tangentes issues de chacun d'eux, $p+1$ sont confondues avec elles.

Analytiquement, une telle tangente se reconnaît à ce qu'elle annule les dérivées partielles de $f(u, v, w)$, jusqu'à l'ordre $p$ exclusivement. L'équation simultanée des $p$ points de contact s'écrit

(19) $$(Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w)^{(p)} = 0.$$

Du théorème du n° 200, on déduit corrélativement le suivant :

THÉORÈME. — *Si les termes de moindre degré en $u$, $v$ sont de degré $p$, soit $w^{m-p}\varphi_p(u, v)$, le côté* AB *du triangle de référence est tangente multiple d'ordre $p$. L'équation simultanée des $p$ points de contact est*

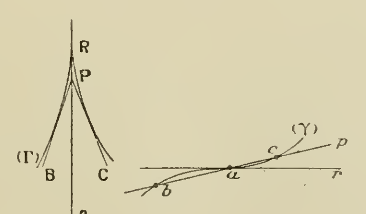
(20) $$\varphi_p(u, v) = 0.$$

Ceci s'applique, en particulier, si les coordonnées sont cartésiennes, à la droite de l'infini.

300. *A un point de rebroussement, correspond* une tangente double, dont les deux points de contact sont confondus. On peut démontrer que cette tangente est, en général, *une tangente d'inflexion*. Voici par exemple, comment on peut raisonner.

*Premier cas : Le point de rebroussement est de première espèce* (n° 198). — Soient le point de rebroussement R et la tangente de rebroussement A (*fig.* 29)

Fig. 29.




Prenons, sur cette tangente, le point P, voisin de R. De ce point, on peut mener, outre PA, les deux tangentes voisines PB et PC, qui comprennent PA dans leur petit angle.

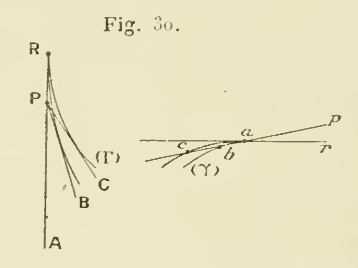
Dans la figure corrélative, le point R devient la droite $r$; la tangente A devient le point $a$; le point P devient la droite $p$, voisine de $r$ et passant par $a$. Les droites PB et PC deviennent les points $b$ et $c$. En outre, comme on peut, par une rotation très petite autour de P, amener PB sur PC, en passant par PA, on peut aussi, par un déplacement très petit sur $p$, amener $b$ sur $c$, en passant par $a$. Cela signifie que $b$ et $c$ sont, sur $p$, de part et d'autre de $a$.

Si l'on prend maintenant le point P sur le prolongement de AR, on ne peut plus mener les tangentes PB, PC. Donc, si l'on prend la droite $p$ de l'autre côté de la droite $r$, par rapport à la position précédente, les points $b$ et $c$ n'existent plus.

De ces considérations, il résulte manifestement que le point $a$ et la droite $r$ sont, pour la courbe $(\gamma)$, un point et une tangente d'inflexion.

*Deuxième cas : Le point de rebroussement est de seconde espèce* (n° 198). — Reprenons les notations et les raisonnements précédents, mais en examinant la figure 30. La droite PA est, cette fois, extérieure au petit angle formé par

Fig. 30.




les droites PB et PC. Donc, les points $b$ et $c$ sont du même côté de $a$. Il s'ensuit que la courbe $(\gamma)$ présente en $a$ un point de rebroussement de seconde espèce.

En définitive, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La figure corrélative d'un point de rebroussement de première espèce est un point d'inflexion; la figure corrélative d'un point de rebroussement de seconde espèce est un point de rebroussement de seconde espèce.*

En géométrie tangentielle, le point de rebroussement est caractérisé par le fait que, parmi les tangentes qui en sont issues, il y en a trois de confondues avec la tangente de rebroussement. Cela résulte visiblement de la démonstration précédente, quand on suppose que P tend vers R, et cela correspond à une propriété caractéristique des tangentes d'inflexion (n° 219). On peut tirer de là une méthode de recherche des points de rebroussement, en coordonnées tangentielles.

La formule du n° 296 apparaît, en vertu du théorème ci-dessus, comme corrélative de la formule de Plücker du n° 212. De même, en partant de la formule du n° 222, on voit que le nombre des rebroussements d'une courbe

algébrique de classe $m$ est $3m(m-2)-6d-8i$, $d$ désignant le nombre des tangentes doubles et $i$ le nombre des tangentes d'inflexion.

La corrélation étroite, que nous venons de mettre en évidence, entre la géométrie ponctuelle et la géométrie tangentielle, porte le nom de *principe de dualité*. Elle a été mise en relief, pour la première fois, par le géomètre français Chasles.

## II. — COORDONNÉES TANGENTIELLES DANS L'ESPACE.

301. Coordonnées d'un plan. — *La géométrie tangentielle de l'espace est obtenue en prenant le plan comme élément fondamental.*

Si un plan P a pour équation, en coordonnées homogènes ou tétraédriques,

$$ux+vy+wz+rt=0, \tag{21}$$

les coefficients $u$, $v$, $w$, $r$ sont appelés *les coordonnées homogènes de ce plan.*

Par exemple, les coordonnées des plans $yOz$, $zOx$ et $xOy$ sont respectivement $(u, 0, 0, 0)$, $(0, v, 0, 0)$, $(0, 0, w, 0)$. Celles du plan de l'infini sont $(0, 0, 0, r)$.

S'il s'agit de coordonnées tétraédriques, nous avons là les coordonnées des faces du tétraèdre de référence.

302. Équations tangentielles. — Pour la raison exposée au n° 293, toute équation établie entre $u$, $v$, $w$, $r$ doit être homogène. Soit, par exemple,

$$f(u, v, w, r)=0. \tag{22}$$

Les trois paramètres dont dépend le plan P sont liés par une relation ; nous obtenons donc une *famille de plans à deux paramètres*. Ces plans admettent une enveloppe (E), dont l'équation (22) est dite *l'équation tangentielle*.

En appliquant la règle du n° 284 et raisonnant comme au n° 293, on établira la règle suivante :

Règle. — *L'équation ponctuelle qui correspond à l'équation*

*tangentielle* (22) *est obtenue en éliminant* $u$, $v$, $w$, $r$ *entre les équations*

$$(23)\qquad \frac{f'_u}{x} = \frac{f'_v}{y} = \frac{f'_w}{z} = \frac{f'_r}{t}$$

et l'une ou l'autre des équations (21) et (22).

L'équation (21) est généralement préférable, comme plus simple.

D'après (23), *le point de contact du plan* $P(u, v, w, r)$ *a pour coordonnées homogènes* $f'_u$, $f'_v$, $f'_w$, $f'_r$.

*L'enveloppe* (E) *est, en général, une surface non développable. Mais, ce peut être aussi une courbe.* On sait, en effet, qu'une courbe de l'espace possède, tout comme une surface, une équation tangentielle (n° 208). Quand il en est ainsi, on dit que l'*enveloppe* (E) *est dégénérée*. On distingue ce cas du cas général par le fait que la règle énoncée ci-dessus conduit à deux équations en $x, y, z, t$, au lieu d'une, ou encore à ce que les quantités $f'_u$, $f'_v$, $f'_w$, $f'_r$, sont proportionnelles, quand on tient compte de (22), à quatre fonctions d'un seul paramètre.

Théorème. — *Toute équation qui ne renferme pas une des coordonnées représente une courbe plane, située dans une des faces du tétraèdre de référence.*

Soit, par exemple, l'équation

$$(24)\qquad f(v, w, r) = 0.$$

La trace du plan $P(u, v, w, r)$ sur la face BCD du tétraèdre de référence a pour coordonnées, dans ce plan et par rapport au triangle BCD, $v$, $w$, $r$. Dès lors, l'équation (24) exprime que cette trace est tangente à une certaine courbe ($\gamma$) du plan BCD ou, ce qui revient au même, que le plan P est tangent à cette courbe. C. Q. F. D.

En coordonnées cartésiennes, *une équation qui ne renferme pas* $u$ (ou $v$, ou $w$) *représente une courbe du plan des* $y$, $z$ (ou des $z$, $x$, ou des $x$, $y$). *Une équation qui ne renferme pas* $r$ *représente une courbe du plan de l'infini.*

C'est ainsi qu'avec des axes rectangulaires, l'*équation*

$$(25)\qquad u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

*représente le cercle imaginaire de l'infini* (n° 181).

**303.** Équations tangentielles d'une surface développable. — Donnons-nous maintenant deux équations tangentielles

$$(26)\qquad f(u, v, w, r) = 0, \qquad g(u, v, w, r) = 0.$$

Les plans P qui y satisfont ne dépendent plus que d'un seul paramètre. Ils enveloppent, en conséquence, une surface développable $(\Sigma)$ (nº 281). Ce sont, d'ailleurs, les plans tangents communs aux deux surfaces (ou courbes) (S) et (S'), définies respectivement par la première et par la deuxième équation (26). De sorte que la développable $(\Sigma)$ est circonscrite à la fois à (S) et à (S').

On obtiendrait son équation, en appliquant la méthode générale du nº 284 ou bien en essayant d'exprimer $u$, $v$, $w$, $r$ en fonction d'un paramètre et appliquant ensuite la règle du nº 280.

Dans le cas particulier où $g$, par exemple, est du premier degré, (S') se réduit à un point A (nº 283). La développable $(\Sigma)$ est alors le cône de sommet A, circonscrit à (S).

**304.** Surfaces et courbes algébriques. Classe. — Toute équation tangentielle algébrique définit une surface non développable ou une courbe algébriques. Cela se justifie comme au nº 295.

Le degré de ladite équation se nomme *la classe de la surface ou de la courbe*. C'est aussi le nombre des plans tangents qu'on peut mener par une droite quelconque (nº 213).

*Une équation du premier degré*,

$$(27)\qquad Au + Bv + Cw + Dr = 0,$$

*représente un point*, à savoir le point (A, B, C, D).

Elle exprime, en effet, que ce point se trouve dans le plan P$(u, v, w, r)$.

Signalons les équations de quelques points remarquables :

*Origine* : $r = 0$.

*Points à l'infini sur* $Ox$, $Oy$ *ou* $Oz$ : $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$.

**305.** Deux équations algébriques représentent une *développable algébrique*. *La classe de cette développable* est, par définition, *le nombre des plans tangents qu'on peut lui mener par un point quelconque de l'espace*. Si (A, B, C, D) sont les coordonnées de ce point, ces plans tangents sont déterminés par le système (26), (27).

Si $m$ et $p$ sont les degrés respectifs de $f$ et de $g$, le nombre des solutions de ce système est égal à $mp$, d'aprés le théorème de Bezout. Donc :

Théorème. — *La classe de la développable circonscrite à deux surfaces algébriques de classes $m$ et $p$ est égale à $mp$.*

En particulier, si $p = 1$, la seconde surface se réduit à un point et l'on voit que *le cône circonscrit à une surface algébrique à partir d'un point quelconque de l'espace est de la même classe que cette surface.*

*Deux équations du premier degré répresentent une droite*, à savoir la droite qui joint les deux points représentés par chacune des équations prise séparément.

306. Principe de dualité. — Le principe de dualité s'étend à l'espace. Il résulte analytiquement de l'échange des coordonnées ponctuelles et tangentielles.

Au point $M(x, y, z, t)$, on fait correspondre le plan $P(u, v, w, r)$, défini par

$$(28) \qquad u = x, \qquad v = y, \qquad w = z, \qquad r = t.$$

En raisonnant comme au n° 297, on constate que *si* M *décrit le plan* $P_0$, P *pivote autour du point* $M_0$ *homologue de ce plan.*

Supposons maintenant que M décrive la droite D, d'équations

$$(29) \qquad u_0 x + v_0 y + w_0 z + r_0 t = 0, \qquad u_1 x + v_1 y + w_1 z + r_1 t = 0.$$

Les coordonnées du plan P satisferont, conformément à (28), à

$$(30) \qquad x_0 u + y_0 v + z_0 w + t_0 r = 0, \qquad x_1 u + y_1 v + z_1 w + t_1 r = 0.$$

Ceci exprime que P contient la droite D', qui joint les points $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ et $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$.

Si M décrit maintenant D', P passe par une droite fixe D''. Or, $M_0$ et $M_1$ constituant deux positions particulières de M, les deux plans (29) constituent deux positions particulières de P. Par suite, D'' n'est autre que D.

Les droites D et D' sont donc telles que *les plans homologues des points de chacune d'elles passent par l'autre.*

On dit qu'elles sont *conjuguées* (*cf.* n° 436).

En raisonnant comme au n° 297, on montrera que *le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite égale le rapport anharmonique des quatre plans homologues.*

307. Imaginons maintenant que M *décrive une surface* (S). Le plan P dépend de deux paramètres et admet une enveloppe (E), qui est, *a priori*, une surface non développable ou une courbe. Au plan qui contient trois positions infiniment voisines de M, correspond le point d'intersection des trois plans P homologues. D'où il résulte qu'au plan tangent (Π) en M à (S), correspond le point de contact $\mu$ de P avec (E) (n° 283).

Deux cas sont maintenant à distinguer.

*Premier cas : La surface* (S) *n'est pas développable.* — Le plan (Π) dépend de deux paramètres; donc aussi le point $\mu$. Par suite, l'*enveloppe* (E) *est une surface.*

*Deuxième cas : La surface* (S) *est développable.* — Le plan (Π) ne dépend plus que d'un seul paramètre; donc aussi le point $\mu$.

Par suite, l'*enveloppe* (E) *est une courbe* ($\gamma$).

Plus particulièrement, *si* (S) *est un cône*, de sommet $\sigma$, tous les plans (Π) passent par ce sommet. Les points $\mu$ sont, par suite, tous dans le plan homologue de $\sigma$.

*La courbe* ($\gamma$) *est plane.*

Réciproquement, si M décrit une courbe, P enveloppe une développable. Cette développable est un cône, si la courbe est plane.

Analytiquement, dans le premier cas, les équations ponctuelle et tangentielle de (E) se déduisent des équations tangentielle et ponctuelle de (S), par l'emploi des formules (28).

Le degré de chacune des deux surfaces égale la classe de l'autre.

Dans le second cas, l'équation tangentielle de ($\gamma$) se déduit de l'équation ponctuelle de (S) et les deux équations ponctuelles de ($\gamma$) se déduisent des deux équations tangentielles de (S), toujours par l'emploi des formules (28). Le degré et la classe de (S) égalent la classe et le degré de ($\gamma$).

D'une règle donnée au n° 376, on déduit, par dualité, la suivante :

Théorème. — *Étant donnée la développable* ($\Sigma$), *définie par les deux équations tangentielles* (26), *on obtient l'équation tangentielle de sa*

*section par la face* ABC *du tétraèdre de référence, en éliminant $r$ entre les deux équations* (26).

On peut appliquer maintenant ceci à la recherche de la section d'une surface (S) non développable par le même plan. Il suffit de prendre, pour ($\Sigma$), la développable circonscrite à (S) tout le long de cette section, en observant que cette développable est définie par l'équation de (S), soit (22) et par $f'_r = 0$ (*cf.* n° 294).

**308.** Comme en Géométrie plane, toute proposition possède sa corrélative. Il en va de même pour les diverses formules de Géométrie analytique.

A la théorie des points multiples (n° 206), correspond celle des *plans tangents multiples*. Au cône des tangentes, correspond la courbe de contact.

Le théorème du n° 206 (3°) donne, par dualité, le suivant :

Théorème. — *Si les termes de moindre degré en $u$, $v$, $w$ sont de degré $p$, soit $r^{m-p}\varphi_p(u, v, w)$, la face* ABC *du tétraèdre de référence est plan tangent multiple d'ordre $p$. La courbe de contact, qui est de la $p^{\text{ième}}$ classe, a pour équation tangentielle*

$$\varphi_p(u, v, w) = 0. \tag{31}$$

Ceci s'applique, en particulier, si les coordonnées sont cartésiennes, au plan de l'infini.

## CHAPITRE XXI.

### COURBURE DES COURBES PLANES.

309. Définitions. — Tout le monde possède, d'une manière plus ou moins vague, la notion de courbure. Pour ne citer qu'un exemple, les cyclistes savent très bien apprécier la courbure d'un virage, pour l'avoir quelquefois appris à leurs dépens.

De cette notion vulgaire, il s'agit de tirer une notion précise, se traduisant par une définition mathématique.

On reconnaît pratiquement que la courbure d'une ligne est plus accentuée, à ce fait que l'orientation de sa tangente change plus rapidement, quand le point de contact décrit une longueur déterminée sur cette ligne. Ceci nous conduit assez naturellement à la définition suivante.

Soient, sur la courbe plane (C), les deux points M et M′ et leurs tangentes MT et M′T′. Ces deux tangentes font entre elles un certain angle $\varepsilon$, appelé *angle de contingence*. Plus cet angle est grand, pour une longueur donnée de l'arc MM′, plus la courbure dudit arc est accentuée. Dès lors, *nous appellerons courbure moyenne de l'arc* MM′ *le quotient* $\frac{\varepsilon}{\text{arc MM}'}$, l'angle $\varepsilon$ étant évalué en radians. Imaginons maintenant que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M. Les quantités $\varepsilon$ et arc MM′ tendent toutes deux vers zéro; mais, leur rapport tend, en général, vers une limite déterminée, qui est appelée *la courbure de la courbe* (C) *au point* M.

Si l'on applique ces deux définitions à un cercle, on reconnaît immédiatement que la courbure moyenne d'un arc quelconque et la courbure en un point quelconque sont égales à l'inverse du rayon du cercle. Par analogie, on appelle *rayon de courbure de la courbe* (C) *au point* M *l'inverse de la courbure précédemment définie*.

On appelle *cercle de courbure* un cercle tangent en M à (C), ayant la même courbure que cette ligne au point considéré et situé

du même côté qu'elle, au voisinage de M, par rapport à la tangente MT. Son rayon est évidemment égal au rayon de courbure en M. Son centre est obtenu en portant sur la normale en M, à partir de M et vers la concavité de la courbe, une longueur égale au rayon de courbure; on l'appelle *le centre de courbure.*

**310.** Courbure algébrique. — L'étude de la courbure des courbes planes est considérablement facilitée par l'introduction du signe de cette courbure.

Imaginons que la courbe (C) soit orientée, ainsi que le plan dans lequel elle est tracée. Soient MT et M'T' les demi-tangentes positives en M et en M'. Nous appellerons, cette fois, $\varepsilon$ l'angle algébrique (nº 14)

$$\varepsilon = (\widehat{MT, M'T'}). \tag{1}$$

D'autre part, soit $\Delta s$ l'arc algébrique $\widehat{MM'}$. Nous appellerons *courbure algébrique au point* M *la limite du rapport* $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$, quand $\Delta s$ tend vers zéro. Il est facile d'interpréter le signe de cette quantité. Menons, en M, *la demi-normale positive* MN, qui, par définition, se déduit de MT par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ (nº 209). Si cette demi-normale est dirigée vers la convexité de la courbe, on voit que $\varepsilon$ et $\Delta s$ sont de signes contraires, $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$ est négatif. Au contraire, si MN est dirigée vers la concavité, $\varepsilon$ et $\Delta s$ sont de même signe, $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$ est positif. Finalement, *la courbure algébrique est positive ou négative, suivant que la demi-normale positive est dirigée vers la concavité ou la convexité de la courbe.*

Il y a deux cas où cet énoncé peut, *a priori*, sembler en défaut. Ce sont ceux où le point M est un point d'inflexion ou un point de rebroussement. La concavité n'est, dans chacun de ces cas, pas déterminée. Il en est, par suite, de même du signe de la courbure. Mais nous verrons (nº 319) que, précisément, la courbure est nulle dans le premier cas, et infinie dans le second. Il n'est donc pas étonnant qu'elle n'ait plus de signe.

L'inverse R de la courbure algébrique sera appelé *le rayon de courbure algébrique.*

Théorème. — *Si* $M_1$ *désigne le centre de courbure relatif au point* M, *on a* $\overline{MM_1} = R$, *en mesurant le vecteur* $\overrightarrow{MM_1}$ *suivant la demi-normale positive* MN.

En effet, si $R > 0$, MN est dirigée vers la concavité, c'est-à-dire dans le sens de $\overrightarrow{MM_1}$ (n° 309); donc $\overline{MM_1} > 0$. Si, au contraire, $R < 0$, MN est dirigée vers la convexité, c'est-à-dire dans le sens opposé de $\overrightarrow{MM_1}$; donc $\overline{MM_1} < 0$. Dans les deux cas, R et $\overline{MM_1}$ ont le même signe. Ils ont, d'autre part, la même valeur absolue (n° 309). Notre formule est donc exacte.

311. Formules relatives a la courbure. — Supposons la courbe (C) rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires $Ox$, $Oy$. Appelons $x$, $y$ les coordonnées du point M, $s$ son abscisse curviligne sur (C) et $\alpha$ l'angle polaire de la demi-tangente positive MT.

Si l'on se reporte aux notations du numéro précédent, on a, d'après la formule de Chasles (n° 14), $\varepsilon = \Delta\alpha$. La courbure algébrique est donc la limite de $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$, quand $\Delta s$ tend vers zéro. Cette limite n'est autre que la dérivée $\frac{d\alpha}{ds}$. On a donc la formule

$$R = \frac{ds}{d\alpha}. \tag{2}$$

Rappelons, d'autre part, les suivantes (n° 196) :

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha. \tag{3}$$

*Les formules* (2) *et* (3) *sont les formules fondamentales, sur lesquelles repose toute la théorie de la courbure des courbes planes*. Il importe de les connaître par cœur, sans aucune hésitation.

On peut immédiatement en déduire d'autres, qu'il est également bon de retenir ou, en tout cas, de savoir retrouver instantanément.

Tout d'abord, la comparaison des formules (2) et (3) nous donne

$$dx = R\cos\alpha\, d\alpha, \qquad dy = R\sin\alpha\, d\alpha. \tag{4}$$

Cherchons maintenant les coordonnées $(x_1, y_1)$ du centre de cour-

bure. D'après le théorème du n° 310, nous avons

$$(5)\qquad x_1 = x + \mathrm{R}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \qquad y_1 = y + \mathrm{R}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

ou

$$(6)\qquad x_1 = x - \mathrm{R}\sin\alpha, \qquad y_1 = y + \mathrm{R}\cos\alpha.$$

312. Développée. — *On appelle développée d'une courbe le lieu de ses centres de courbure.*

Si l'on imagine $x, y$, R exprimés en fonction de $\alpha$, les formules (6) constituent les équations paramétriques de la développée ($C_1$) de la courbe (C). Cherchons la tangente en $M_1$ à cette développée. A cet effet, nous différentions les formules (6) :

$$dx_1 = dx + \mathrm{R}\cos\alpha\, d\alpha - d\mathrm{R}\sin\alpha,$$
$$dy_1 = dy - \mathrm{R}\sin\alpha\, d\alpha + d\mathrm{R}\cos\alpha$$

ou, en tenant compte de (4),

$$(7)\qquad \begin{cases} dx_1 = -d\mathrm{R}\sin\alpha = d\mathrm{R}\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right), \\ dy_1 = \phantom{-}d\mathrm{R}\cos\alpha = d\mathrm{R}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Ces formules nous montrent que l'angle polaire de la tangente cherchée est $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Donc, cette tangente n'est autre que la normale $M_1M$ à (C). Il suit de là que *la développée d'une courbe est aussi l'enveloppe de ses normales.* Le centre de courbure $M_1$ est le point limite de la normale (n° 273), c'est-à-dire la limite vers laquelle tend le point de rencontre de cette normale avec la normale en M', quand M' tend vers M.

313. Cette nouvelle propriété du centre de courbure est d'un emploi très commode pour la recherche du centre de courbure d'une courbe définie d'une manière quelconque et dont on ne veut calculer ni l'arc $s$, ni l'angle polaire $\alpha$ de la tangente.

Supposons, par exemple, que la courbe (C) soit définie par des équations paramétriques quelconques, c'est-à-dire que $x$ et $y$ soient exprimés en fonction d'un paramètre $t$ quelconque. Écrivons l'équa-

tion de la normale en M (n° 209)

(8) $$(X-x)x'+(Y-y)y'=0.$$

Différentions par rapport à $t$ :

(9) $$(X-x)x''+(Y-y)y''=x'^2+y'^2.$$

Les deux équations (8), (9), en X, Y, définissent le point limite de la normale (n° 273), c'est-à-dire le centre de courbure $M_1$. En y remplaçant X par $x_1$, Y par $y_1$ et résolvant ensuite par rapport à $x_1-x$ et $y_1-y$, on obtient les formules

(10) $$x_1=x-\frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''},\qquad y_1=y+\frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}.$$

Ces formules peuvent être quelquefois d'un emploi commode. Mais, elles sont assez difficiles à retenir exactement et il nous semble préférable, lorsqu'on ne peut utiliser pratiquement les formules (6), d'écrire l'équation de la normale et de répéter, sur chaque cas particulier, les calculs que nous venons de faire.

Des formules (10), on peut déduire le rayon de courbure absolu. On a

$$R^2=(x_1-x)^2+(y_1-y)^2=\frac{(x'^2+y'^2)^3}{(x'y''-y'x'')^2};$$

d'où

(11) $$|R|=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y''-y'x''|}.$$

Cette formule est seulement à utiliser pour la recherche de la valeur absolue du rayon de courbure et quand on ne possède pas déjà les éléments $s$ et $\alpha$, qui figurent dans la formule (2). Mais, *son emploi est peu commode et souvent néfaste, dans toute question où doit intervenir la courbure algébrique*. Elle peut donner lieu à des fautes de signe, en particulier, lorsqu'on cherche non seulement le rayon de courbure, mais aussi le centre de courbure. Elle rend très souvent impraticable la solution de certaines questions, qui sont, au contraire, très simples, lorsqu'on utilise la formule (2). Ceci s'applique, en particulier, aux problèmes qui consistent à rechercher les courbes satisfaisant, relativement à leur courbure, à certaines propriétés imposées à l'avance (*cf.* n° 348).

Si l'on a affaire à une courbe définie par une équation de la forme

$y = f(x)$, il suffit de supposer $x = t$, dans les formules (10) et (11). Elles deviennent alors

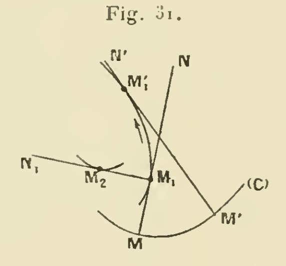
$$(12) \qquad x_1 = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \qquad y_1 = y + \frac{1+y'^2}{y''},$$

$$(13) \qquad |R| = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Ce que nous venons de dire, relativement à l'emploi des formules (10) et (11), s'applique aux formules (12) et (13). En particulier, nous ne saurions trop recommander au lecteur de *ne pas attacher une importance exagérée à la formule* (13), *qui doit s'effacer devant la formule* (2) [1].

314. Longueur de la développée. — Les formules (7) mettent en évidence une autre propriété très élégante de la développée. Orientons cette courbe de telle manière que *la demi-tangente positive*

Fig. 31.




*en* $M_1$ *ait le sens de la demi-normale positive* MN, d'angle polaire $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Si nous appelons $s_1$ l'abscisse curviligne de $M_1$ sur la

[1] Si nous insistons de la sorte, ce n'est point que la formule (13) nous inspire une aversion irraisonnée. Mais, nous avons eu, à maintes reprises, l'occasion de nous rendre compte du rôle néfaste qu'elle a joué jusqu'à présent, dans l'enseignement de la courbure. Elle constitue, pour bien des élèves, la base de toute recherche relative à cette si intéressante théorie et contribue à leur donner l'impression que cette dernière nécessite toujours des calculs pénibles et inélégants. Que de fois n'avons-nous pas entendu dire : « La courbure, c'est difficile! », à des élèves qui savaient par cœur la formule (13), mais ignoraient la formule (2) ou la considéraient comme d'une importance négligeable. Quand on part d'une formule inélégante, on arrive toujours, à moins d'être un artiste, à des résultats inélégants, quand on obtient des résultats.

développée, nous avons, en comparant les formules (3) et (7),

$$ds_1 = dR \tag{14}$$

ou

$$s_1 = R + \text{const.} \tag{15}$$

On en déduit immédiatement la mesure algébrique d'un arc quelconque de la développée. On a, par exemple (*fig.* 31),

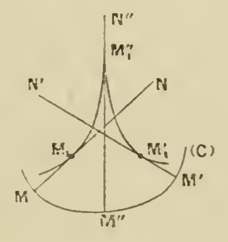
$$\widehat{M_1 M'_1} = s'_1 - s_1 = R' - R = \overline{M'M'_1} - \overline{MM_1}, \tag{16}$$

ce qui se traduit par l'énoncé suivant :

Théorème. — *La mesure algébrique d'un arc* ($M_1 M'_1$) *de la développée d'une courbe* (C) *égale l'accroissement algébrique du rayon de courbure algébrique de cette dernière, quand le centre de courbure correspondant passe de* $M_1$ à $M'_1$.

315. Ce théorème permet de calculer, sans quadrature, la longueur de tout arc de développée. Il convient seulement, pour l'appliquer correctement, d'observer avec soin les signes des arcs et rayons de courbure. Faute de prendre toutes les précautions nécessaires, on peut être conduit quelquefois à des résultats tout à fait paradoxaux. Imaginons, par exemple, qu'aux deux points M et M' (*fig.* 32), les rayons de courbure R et R' soient égaux en

Fig. 32.




grandeur et en signe. On peut être tenté d'en conclure que la longueur de l'arc de développée compris entre les points $M_1$ et $M'_1$ est nulle, ce qui est manifestement absurde. En réalité, c'est la mesure algébrique $\widehat{M_1 M'_1}$ qui est nulle. Ceci prouve que si l'on décrit cet arc, de $M_1$ vers $M'_1$, on parcourt une certaine longueur dans le sens positif et une certaine longueur dans le sens négatif. Donc, à un moment donné, on rebrousse chemin. Comme on ne revient pas sur un arc déjà décrit, on traverse nécessairement un point de rebrous-

sement $M''_1$. Du reste, ceci résulte aussi (n$^{os}$ 316 et 319) de ce que le rayon de courbure de (C) passe, entre M et M', par un maximum ou un minimum (sur la figure 32, par un maximum), puisqu'il revient, en M', à la valeur initiale qu'il avait en M.

Dès lors, la longueur $l$ de l'arc de développée compris entre $M_1$ et $M'_1$ s'évaluera de la manière suivante. On a

$$l = M_1 M''_1 + M''_1 M'_1 = \widehat{M_1 M''_1} - \widehat{M''_1 M'_1} = R'' - R - (R' - R'')$$

ou, puisque $R = R'$,

$$l = 2(R'' - R).$$

Des précautions analogues doivent être prises toutes les fois que, sur l'arc de développée dont on cherche la longueur, se trouvent un ou plusieurs points de rebroussement.

316. Développées successives. — L'angle polaire de la demi-tangente positive en $M_1$ à $(C_1)$ étant $\alpha_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}$, le rayon de courbure en ce point est, en tenant compte de (14),

$$(17) \qquad R_1 = \frac{ds_1}{d\alpha_1} = \frac{dR}{d\alpha}.$$

Le centre de courbure correspondant est le point $M_2$ (*fig.* 31), tel que $\overline{M_1 M_2} = R_1$, suivant la demi-droite $M_1 N_1$, d'angle polaire $\alpha_1 + \frac{\pi}{2} = \alpha + \pi$. Il décrit la développée $(C_2)$ de $(C_1)$ ou, comme on dit quelquefois, la *développée seconde* de (C).

Le rayon de courbure de $(C_2)$ est $R_2 = \frac{dR_1}{d\alpha_1} = \frac{dR_1}{d\alpha} = \frac{d^2 R}{d\alpha^2}$; il est mesuré suivant la demi-droite d'angle polaire $\alpha + \frac{3\pi}{2}$. On peut continuer ainsi indéfiniment et obtenir les développées successives de la courbe initiale (C). On trouve que la *développée* $n^{\text{ième}}$ a pour rayon de courbure $R_n = \frac{d^n R}{d\alpha^n}$, mesuré suivant la demi-droite d'angle polaire $\alpha + (n+1)\frac{\pi}{2}$.

*Remarque.* — La formule (17) nous apprend que $R_1$ s'annule, quand R passe par un maximum ou un minimum. Si l'on se reporte au n° 319, on en déduit le théorème suivant :

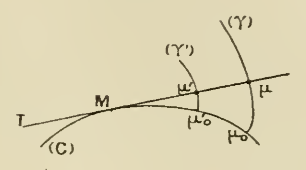
Théorème. — *Lorsque le rayon de courbure d'une courbe plane passe par un maximum ou un minimum, le centre de courbure correspondant est un point de rebroussement sur la développée.*

**317. Développantes.** — Les propriétés découvertes au n° 314 donnent une solution immédiate du problème suivant :

*Trouver toutes les courbes qui admettent pour développée une courbe donnée.*

Soient (C) la courbe donnée et ($\gamma$) une des courbes cherchées (*fig.* 33). La tangente en M à (C) est normale en $\mu$ à ($\gamma$). Si nous

Fig. 33.




orientons (C) d'une manière quelconque et si nous appelons $s$ l'abscisse curviligne de M, nous avons, d'après (15),

$$s = \overline{\mu M} + \text{const.},$$

le vecteur $\overrightarrow{\mu M}$ étant mesuré suivant la demi-tangente positive MT. Nous pouvons d'ailleurs supprimer la constante, en choisissant convenablement l'origine des arcs $\mu_0$. Nous avons alors

$$\overline{M\mu} = -s. \tag{18}$$

On conclut de là qu'*on obtient une des courbes cherchées en portant, sur chaque tangente* MT, *un vecteur* $\overrightarrow{M\mu}$, *ayant pour mesure algébrique* $-s$, *suivant la demi-tangente positive. Le point* $\mu$ *décrit cette courbe, quand* M *décrit la proposée. En changeant l'origine des arcs sur cette dernière, on obtient toutes les courbes demandées.*

Ces courbes, en nombre infini, portent le nom de *développantes* de la courbe (C). Leur détermination est, comme on le voit, subordonnée à la rectification de (C).

De l'une d'elles ($\gamma$), on peut déduire toutes les autres, en portant, sur chaque normale à ($\gamma$), une longueur constante $\overline{\mu\mu'} = l$. On a, en effet,

$$\overline{M\mu'} = \overline{M\mu} + l = -s + l.$$

En faisant varier $l$, on a toutes les développées.

Les deux courbes $(\gamma)$ et $(\gamma')$ sont dites *parallèles*. Dans le cas particulier où la courbe (C) se réduit à un point P, on a $s = 0$ et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Toute courbe plane dont les normales passent par un point fixe* P *est un cercle de centre* P.

*Description mécanique des développantes.* — Imaginons un fil d'une certaine longueur $\lambda$, enroulé sur la courbe (C) et fixé, par une de ses extrémités, à cette courbe. L'autre extrémité est libre et se trouve primitivement en $\mu_0$. Déroulons notre fil, en le maintenant tendu. A chaque instant, la portion déroulée $M\mu$ a évidemment même longueur que l'arc de courbe $M\mu_0$ qu'elle recouvrait précédemment. Dès lors, si l'on oriente la courbe (C) dans le sens du déroulement, on a

$$\overline{M\mu} = \widehat{M\mu_0} = -s.$$

Le point $\mu$ décrit donc la développante $(\gamma)$ et il suffit de fixer la pointe d'un crayon à l'extrémité libre du fil pour obtenir le tracé de cette courbe.

En faisant varier la longueur du fil ou son point d'attache avec (C), on a toutes les développantes.

*Remarque.* — La courbe $(\gamma)$ est normale, en $\mu_0$, à (C). Ce point est, sur $(\gamma)$, un point de rebroussement, car le rayon de courbure correspondant est nul (nº 319). L'autre branche du rebroussement serait obtenue en donnant à $s$ des valeurs négatives.

318. Cercle osculateur. — Reprenons la courbe (C) du nº 311. Considérons un de ses points $M_0$ et les cercles qui lui sont tangents en ce point. Cherchons, parmi ces cercles, ceux qui ont, avec la courbe, un contact du second ordre.

Afin de simplifier les calculs, prenons le point $M_0$ pour origine des coordonnées, la demi-tangente positive en ce point pour axe des $x$ et la demi-normale positive pour axe des $y$. Tout cercle $(\Gamma)$, tangent en O à la courbe, a une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0. \tag{19}$$

Imaginons, d'autre part, que les coordonnées $x$, $y$ d'un point M

quelconque de (C) aient été exprimées en fonction de l'angle polaire $\alpha$ de la demi-tangente positive en ce point. Si, dans (19), on remplace $x$ et $y$ par ces expressions, on obtient l'équation aux $\alpha$ des points de rencontre de (C) et de ($\Gamma$). Il s'agit de déterminer $\lambda$ pour que cette équation ait une racine triple nulle.

La valeur $\alpha = 0$ est déjà racine simple, car, pour $\alpha = 0$, $x$ et $y$ sont nuls, d'après les hypothèses faites plus haut. Écrivons maintenant qu'elle est racine double, en annulant la dérivée totale par rapport à $\alpha$ :

$$xx' + yy' - \lambda y' = 0$$

ou, en tenant compte de (4),

$$(20) \qquad x \cos\alpha + y \sin\alpha - \lambda \sin\alpha = 0.$$

Cette équation est encore vérifiée identiquement pour $\alpha = 0$, comme il fallait du reste s'y attendre, puisque, quel que soit $\lambda$, le cercle ($\Gamma$) est tangent à (C).

Écrivons enfin que $\alpha = 0$ est racine triple, en annulant la dérivée seconde, c'est-à-dire en dérivant l'équation (20) :

$$x' \cos\alpha + y' \sin\alpha - x \sin\alpha + y \cos\alpha - \lambda \cos\alpha = 0$$

ou, en tenant compte de (4),

$$R - x \sin\alpha + y \cos\alpha - \lambda \cos\alpha = 0.$$

Si, dans cette équation, on fait $\alpha = 0$, il vient

$$\lambda = R_0.$$

De là, résulte la proposition suivante :

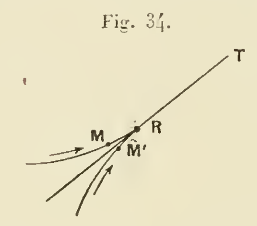
Théorème. — *En chaque point de toute courbe plane, il existe un seul cercle ayant, avec la courbe, un contact du second ordre. Ce cercle n'est autre que le cercle de courbure qui, pour cette raison, est aussi appelé cercle osculateur.*

Ce théorème fournit un moyen indirect quelquefois commode de déterminer le centre et le rayon de courbure d'une courbe plane. On cherche le cercle osculateur, en exprimant qu'il coupe la courbe en trois points confondus. Ce procédé sera utilisé, en particulier, pour les coniques (n° 532).

**319. Rayon de courbure en un point d'inflexion ou de rebroussement.** — 1° *Point d'inflexion.* — En un tel point, l'angle polaire $\alpha$ de la tangente passe par un maximum ou par un minimum. Donc, la dérivée $\frac{d\alpha}{ds}$ est nulle. D'où il résulte que *le rayon de courbure est infini.* Ceci peut d'ailleurs se voir aussi sur les formules (11) ou (13), dont les dénominateurs sont nuls (n° 221). Enfin, on peut observer que la tangente, ayant un contact du second ordre avec la courbe, doit être considérée comme le cercle osculateur, dont le rayon est dès lors infini.

2° *Point de rebroussement.* — Soit le point de rebroussement R (*fig.* 34). Supposons, pour fixer les idées, que la demi-tangente positive en ce point

Fig. 34.




soit RT. Les sens positifs sur les deux branches du rebroussement sont, en conséquence, les sens indiqués par les deux flèches.

Cela posé, appelons $s_M$, $s_{M'}$, $s_R$ les abscisses curvilignes des points M, M', R. On a

$$s_R - s_M = \widehat{MR} > 0,$$
$$s_R - s_{M'} = \widehat{M'R} > 0.$$

L'abscisse curviligne de R est donc plus grande que celles des points voisins; elle constitue un maximum de $s$, considérée comme fonction de l'angle polaire $\alpha$. Dès lors, la dérivée $\frac{ds}{d\alpha}$ est nulle au point R. Autrement dit, *le rayon de courbure en un point de rebroussement est nul.*

On peut donner, de cette proposition, une démonstration plus analytique, basée sur la formule (11). On sait que, si la représentation paramétrique de la courbe est convenablement choisie, les dérivées $x'$ et $y'$ s'annulent toutes deux pour la valeur $t_0$, qui correspond au point R (n° 202). Soient, d'autre part, $a$ et $b$ les cosinus directeurs de la tangente au point de paramètre $t$. On a

$$x' = \rho a, \qquad y' = \rho b; \tag{21}$$

$$a^2 + b^2 = 1; \tag{22}$$

la fonction $\rho$ devenant nulle pour $t = t_0$.

Dérivons les formules (21) par rapport à $t$ :

$$x'' = \rho a' + \rho' a, \qquad y'' = \rho b' + \rho' b. \tag{23}$$

Portons enfin (21) et (23) dans (11); il vient, en tenant compte de (22),

$$|R| = \rho \cdot \frac{1}{|ab' - ba'|}. \tag{24}$$

On voit bien que, pour $t = t_0$, cette quantité s'annule [1].

**320. Courbure déduite de l'équation normale de la tangente.** — Imaginons que la courbe (C) soit l'enveloppe de la droite (D), définie par l'équation normale (n° 65)

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = p, \tag{25}$$

où $p$ désigne une certaine fonction de $\varphi$.

Le point de contact M est défini par l'équation (25) et par l'équation dérivée

$$-x \sin\varphi + y \cos\varphi = p'. \tag{26}$$

Or, l'équation (26) représente une droite ($D_1$) perpendiculaire à (D). Comme cette droite passe en outre par M, ce n'est autre que la normale en ce point. Elle enveloppe la développée ($C_1$) de (C). Pour avoir son point de contact, c'est-à-dire le centre de courbure $M_1$ de (C), il suffit de dériver une nouvelle fois :

$$-x \cos\varphi - y \sin\varphi = p''. \tag{27}$$

Les équations (26) et (27) définissent les coordonnées de $M_1$; il serait facile de les calculer. Nous préférons faire les remarques suivantes :

L'équation (27) représente la droite ($D_2$) menée, par $M_1$, parallèlement à (D). Or, si l'on mène la perpendiculaire O$\lambda$ à (D) (*fig.* 35) et si on l'oriente par l'angle polaire $\varphi$, on sait que (n° 65)

$$\overline{OP} = p, \qquad \overline{OP_2} = -p''.$$

---

[1] A condition toutefois que $ab' - ba'$ ne s'annule pas. Ceci n'arriverait que si le coefficient angulaire de la tangente passait par un maximum ou un minimum, c'est-à-dire si l'on avait un rebroussement de seconde espèce. Il y aurait alors indétermination. Mais nous ne pouvons insister davantage sur ce sujet.

D'autre part, on a

$$\overline{MM_1} = \overline{PP_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP} = -p'' - p = -(p + p'').$$

On voit donc que *si l'on définit la demi-normale positive à la courbe* (C) *par l'angle polaire* $\varphi$, *le rayon de courbure algébrique de cette courbe est* $-(p+p'')$.

Fig. 35.



C'est là une proposition fort élégante, qui permet de résoudre rapidement bien des questions relatives à la courbure.

*Remarque.* — La droite $(D_2)$ enveloppe la développée seconde de (C). En continuant les dérivations, *on obtiendrait les développées successives*. D'une façon générale, la développée $n^{ième}$ est l'enveloppe de la droite $(D_n)$, d'équation

(28) $$x \cos\left(\varphi + n\frac{\pi}{2}\right) + y \sin\left(\varphi + n\frac{\pi}{2}\right) = p^{(n)}.$$

321. Courbure en coordonnées polaires. — Soient $r$ et $\theta$ les coordonnées polaires du point M de la courbe (C). L'angle polaire $\alpha$ de la demi-tangente positive est définie par les formules (n° 252)

(29) $$\alpha = \theta + V,$$

(30) $$dr = ds \cos V, \qquad r\, d\theta = ds \sin V.$$

Le rayon de courbure algébrique est ensuite donné par la formule (2), qui devient

(31) $$R = \frac{ds}{d\theta + dV}.$$

*Les formules* (30) *et* (31) *sont les formules fondamentales de la courbure, en coordonnées polaires.*

On pourrait en éliminer $s$ et V, de manière à obtenir le rayon de courbure en fonction des seules variables $r$ et $\theta$ et des dérivées $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{d^2r}{d\theta^2}$ (*cf.* exercice résolu n° 7). Mais la formule à laquelle on arriverait est compliquée et sans grand intérêt. Mieux vaut la remplacer par les trois formules simples (30) et (31).

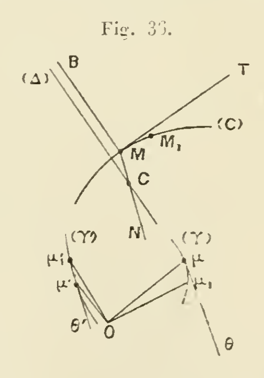
# CHAPITRE XXII.

## COURBURE DES COURBES GAUCHES.

322. Indicatrice des tangentes ; courbure. — Ce que nous avons dit au n° 309 pour les courbes planes peut se répéter pour les courbes gauches. Étant donné un arc MM′ d'une telle courbe, les tangentes en M et M′ font un angle $\varepsilon$, appelé *angle de contingence*. Le rapport $\frac{\varepsilon}{\text{arc MM}'}$ est appelé *courbure moyenne* dudit arc et la limite de ce rapport, lorsque M′ tend vers M, est *la courbure au point* M.

De même que pour les courbes planes, il est indispensable, pour la simplicité et l'élégance de la théorie, d'introduire la *courbure algébrique*. A cet effet, nous commençons par orienter notre courbe d'une manière quelconque. Soient $s$ l'abscisse curviligne du point M et MT la demi-tangente positive en ce point (*fig.* 36). Par le point

Fig. 36.




fixe O, menons la demi-droite O$\mu$, parallèle à MT et de même sens et prenons son intersection $\mu$ avec la sphère ($\Sigma$), de centre O et de rayon 1 [1]. Lorsque M décrit (C), $\mu$ décrit une courbe sphérique ($\gamma$).

(1) Ce point $\mu$ n'est autre que le point directeur de la demi-droite MT (n° 24).

qui est appelée l'*indicatrice des tangentes* ou *première indicatrice* de la courbe (C). Orientons cette indicatrice dans un sens arbitraire. Soit alors $\sigma$ l'abscisse curviligne du point $\mu$. Nous appellerons *rayon de courbure algébrique* de la courbe (C), au point M, la quantité

$$(1) \qquad R = \frac{ds}{d\sigma}.$$

La *courbure algébrique* est, par définition, $\frac{1}{R} = \frac{d\sigma}{ds}$. Il est facile de vérifier que sa valeur absolue n'est autre que la courbure telle qu'elle a été définie plus haut, au moyen de l'angle de contingence. En effet, prenons, sur (C), le point $M_1$, infiniment voisin de M et d'abscisse curviligne $s + \Delta s$. Il lui correspond, sur l'indicatrice, le point $\mu_1$, infiniment voisin de $\mu$ et d'abscisse curviligne $\sigma + \Delta\sigma$. L'angle de contingence $\varepsilon$ relatif à l'arc $MM_1$ est évidemment égal à l'angle $\mu O \mu_1$ ou encore à la longueur de l'arc de grand cercle tracé sur $(\Sigma)$ entre $\mu$ et $\mu_1$. Or, cet arc est un infiniment petit équivalent à l'arc $\mu\mu_1$ de l'indicatrice, soit $|\Delta\sigma|$, car ces deux arcs sont des infiniment petits équivalents à la corde $\mu\mu_1$ (t. I, n° 172). Dès lors, le rapport $\frac{\varepsilon}{\text{arc } MM_1}$ a même limite que le rapport $\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right|$. Cette limite est donc $\left|\frac{d\sigma}{ds}\right| = \left|\frac{1}{R}\right|$. C. Q. F. D.

*Remarque.* — Si la courbe (C) est plane, l'indicatrice $(\gamma)$ est un grand cercle ; l'abscisse curviligne $\sigma$ n'est autre que l'angle polaire $\alpha$ de la demi-tangente MT ; on retombe, dès lors, sur la définition du n° 310.

323. Normale principale ; centre, cercle et axe de courbure ; binormale ; torsion. — Menons la demi-tangente positive $\mu\theta$ à la courbe $(\gamma)$. Elle est située dans le plan tangent en $\mu$ à la sphère $(\Sigma)$ ; elle est donc perpendiculaire à $O\mu$ et, par suite, à MT. Si nous menons maintenant la parallèle MN à $\mu\theta$, nous obtenons une normale à la courbe (C), qui sera appelée la *normale principale*. Elle sera orientée comme $\mu\theta$.

Je dis que le plan NMT est le plan osculateur en M à (C). En effet, ce plan est parallèle au plan $O\mu\theta$, lequel peut être considéré comme la limite du plan $O\mu\mu_1$, quand $\mu_1$ tend vers $\mu$. Comme $O\mu_1$ est paral-

lèle à la tangente en $M_1$ à (C), on est ramené au théorème III du n° 225.

On peut donc dire que *la normale principale est la normale située dans le plan osculateur.*

Nous appellerons *centre de courbure* de la courbe (C) au point M, le point C de MN défini par

$$(2) \qquad \overline{MC} = R.$$

Nous appellerons *cercle de courbure* le cercle de centre C et de rayon R tracé dans le plan osculateur. L'axe de ce cercle, c'est-à-dire la perpendiculaire (Δ) menée par C au plan osculateur, sera appelé *axe de courbure* ou *droite polaire.*

324. La perpendiculaire MB au plan osculateur, menée par M, est appelée *binormale.* On l'appelle ainsi parce qu'elle peut être considérée comme normale à deux tangentes infiniment voisines, en vertu d'un théorème rappelé tout à l'heure. Elle sera toujours orientée de telle manière que le trièdre trirectangle MTNB soit un trièdre positif (n° 28). Ce trièdre est appelé *trièdre de Frenet* ou *trièdre principal* relatif au point M.

Menons la demi-droite $O\mu'$ parallèle à MB et de même sens. Elle perce la sphère (Σ) au point $\mu'$. Quand M décrit (C), $\mu'$ décrit une courbe ($\gamma'$), qui est appelée l'*indicatrice des binormales* ou *seconde indicatrice* de la courbe (C).

Je dis que *la tangente $\mu'\theta'$ est parallèle à $\mu\theta$.*

En effet, le cône décrit par $O\mu'$ est supplémentaire du cône décrit par $O\mu$, puisque $O\mu'$ est perpendiculaire au plan tangent $O\mu\theta$ (n° 378). Il s'ensuit que $O\mu$ est perpendiculaire au plan tangent $O\mu'\theta'$. Donc $\mu'\theta'$ est perpendiculaire à $O\mu$. Mais elle est aussi perpendiculaire à $O\mu'$. Elle est donc perpendiculaire au plan $\mu O \mu'$ et, par suite, parallèle à $\mu\theta$.

Si l'on veut éviter l'emploi des cônes supplémentaires, on peut donner la démonstration analytique suivante :

Soient $(a, b, c)$, $(a', b', c')$, $(a'', b'', c'')$ les cosinus directeurs respectifs de MT, MN, MB. Ils sont liés par les relations bien connues entre les neuf cosinus (n° 35). Les coordonnées du point $\mu'$ sont $a''$, $b''$, $c''$. Les paramètres directeurs de $\mu'\theta'$ sont donc $da''$, $db''$, $dc''$.

Il nous suffit de vérifier que $\mu'\theta'$ est perpendiculaire à MT et MB,

c'est-à-dire que l'on a

$$(3)\qquad a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'' = 0,$$

$$(4)\qquad a''da'' + b''db'' + c''dc'' = 0.$$

L'équation (4) résulte de la différentiation de $a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$. Pour établir (3), différentions $aa'' + bb'' + cc'' = 0$; il vient

$$(a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'') + (a''\,da + b''\,db + c''\,dc) = 0.$$

Or, la seconde parenthèse est nulle, car elle exprime que MB est perpendiculaire à $\mu\theta$. La première l'est donc aussi, ce qui prouve la relation (3).

325. Ceci étant établi, nous orienterons $\mu'\theta'$ comme $\mu\theta$ et $(\gamma')$ de telle manière que sa demi-tangente positive en $\mu'$ soit $\mu'\theta'$. Soit maintenant $\sigma'$ l'abscisse curviligne de $\mu'$. Nous appellerons *torsion* de la courbe (C) au point M la quantité

$$(5)\qquad \frac{1}{T} = \frac{d\sigma'}{ds}.$$

L'inverse $T = \frac{ds}{d\sigma'}$ de la torsion sera appelé *rayon de torsion*.

La torsion peut s'interpréter d'une manière analogue à la courbure. Considérons le point $\mu'_1$ de $(\gamma')$, qui correspond au point $M_1$ de (C). L'arc $\Delta\sigma' = \widehat{\mu'\mu'_1}$ est un infiniment petit équivalent à l'angle $\varepsilon' = (\widehat{O\mu', O\mu'_1})$. Or, cet angle n'est autre que celui des plans osculateurs en M et en $M_1$. On peut donc dire que *la torsion en* M *est la limite du rapport* $\frac{\varepsilon'}{\text{arc } MM_1}$, *quand* $M_1$ *tend vers* M.

On peut aussi interpréter le *signe de la torsion*. Si le plan $\mu' O \mu'_1$, qui est sensiblement perpendiculaire à $O\mu$, est orienté par cette demi-droite (n° 27), l'angle $\varepsilon' = (\widehat{O\mu', O\mu'_1})$ est, à vrai dire, un infiniment petit équivalent non pas à $\Delta\sigma'$, mais à $-\Delta\sigma'$; de sorte que la torsion est la limite de $\frac{-\varepsilon'}{\Delta s}$. Si l'on suppose, pour fixer les idées, $\Delta s > 0$, $\frac{1}{T}$ a le signe contraire à $\varepsilon'$. Or, quand on passe du point M au point $M_1$, le plan osculateur tourne sensiblement autour de MT, puisque cette droite est la caractéristique dudit plan. Cette rotation a pour amplitude $\varepsilon'$, en grandeur et en signe, puisque $\varepsilon'$ est l'angle dont tourne la perpendiculaire $O\mu'$ au plan osculateur. Si l'on observe, d'autre

part, que le sens positif de MT est le sens de M vers $M_1$, puisque $\Delta s$ est supposé positif, on peut énoncer la proposition suivante :

*Si le point* M *se déplace infiniment peu sur la courbe* (C), *le plan osculateur en ce point tourne infiniment peu autour de la tangente en* M. *Si l'on évalue le sens de cette rotation en orientant la tangente dans le sens du déplacement du point* M, *la torsion en* M *est positive ou négative, suivant que la rotation est négative ou positive.*

Ceci nous montre que le signe de la torsion n'est pas conventionnel, comme celui de la courbure. Ce dernier dépend du sens, arbitraire, dans lequel on a orienté ($\gamma$). *Le signe de la torsion*, au contraire, *est entièrement déterminé par la courbe.* De la forme de cette dernière dépend, en effet, uniquement le sens dans lequel tourne le plan osculateur pour un déplacement infiniment petit du point M. Si, d'ailleurs, on change le sens de ce déplacement, le sens de la rotation change aussi ; mais, la demi-droite autour de laquelle elle est évaluée est remplacée par la demi-droite opposée ; de sorte que le signe de la rotation demeure le même [1].

326. Formules de Frenet. — Nous allons calculer les dérivées des neuf cosinus introduits au n° 324, par rapport à $s$.

Les coordonnées du point $\mu$ étant $a$, $b$, $c$, les cosinus directeurs $a'$, $b'$, $c'$ de $\mu\theta$ sont $\frac{da}{d\sigma}$, $\frac{db}{d\sigma}$, $\frac{dc}{d\sigma}$ (n° 193). On a donc, par exemple, $\frac{da}{d\sigma} = a'$. Mais, on peut écrire

$$\frac{da}{d\sigma} = \frac{da}{ds}\cdot\frac{ds}{d\sigma} = \frac{da}{ds}\cdot \mathrm{R}.$$

Donc

$$(6)\qquad \frac{da}{ds} = \frac{a'}{\mathrm{R}}, \qquad \frac{db}{ds} = \frac{b'}{\mathrm{R}}, \qquad \frac{dc}{ds} = \frac{c'}{\mathrm{R}}.$$

Répétons le même calcul pour le point $\mu'(a'', b'', c'')$ :

$$a' = \frac{da''}{d\sigma'} = \frac{da''}{ds}\cdot\frac{ds}{d\sigma'} = \frac{da''}{ds}\cdot \mathrm{T} ;$$

d'où

$$(7)\qquad \frac{da''}{ds} = \frac{a'}{\mathrm{T}}, \qquad \frac{db''}{ds} = \frac{b'}{\mathrm{T}}, \qquad \frac{dc''}{ds} = \frac{c'}{\mathrm{T}}.$$

Pour calculer $\frac{da'}{ds}$, dérivons la relation

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 ;$$

---

[1] On peut aussi vérifier l'invariance du signe de la torsion, en changeant le sens positif soit de (C), soit de ($\gamma$).

nous obtenons

$$a\frac{da}{ds} + a'\frac{da'}{ds} + a''\frac{da''}{ds} = 0$$

ou, en tenant compte de (6) et (7),

$$\frac{aa'}{R} + a'\frac{da'}{ds} + \frac{a''a'}{T} = 0.$$

Divisant par $a'$, nous avons

$$(8)\qquad \frac{da'}{ds} = -\frac{a}{R} - \frac{a''}{T},\qquad \frac{db'}{ds} = -\frac{b}{R} - \frac{b''}{T},\qquad \frac{dc'}{ds} = -\frac{c}{R} - \frac{c''}{T}.$$

Les trois groupes de formules (6), (7), (8) portent le nom de *formules de Frenet* (²).

Elles permettent, quand on connaît les neuf cosinus, de calculer R et T, en grandeur et en signe.

327. On peut aussi calculer R, en élevant les formules (6) au carré et ajoutant, on obtient ainsi

$$(9)\qquad \frac{1}{R^2} = \left(\frac{da}{ds}\right)^2 + \left(\frac{db}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dc}{ds}\right)^2.$$

Cette formule aurait d'ailleurs pu se déduire immédiatement de la formule (1), qui donne, en effet,

$$\frac{1}{R^2} = \frac{d\sigma^2}{ds^2} = \frac{da^2 + db^2 + dc^2}{ds^2},$$

c'est-à-dire (9).

Si l'on appelle $x$, $y$, $z$ les coordonnées du point M de (C), on sait que $a = \frac{dx}{ds}$, $b = \frac{dy}{ds}$, $c = \frac{dz}{ds}$. La formule (9) peut donc aussi s'écrire

$$(10)\qquad \frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2.$$

On peut transformer cette formule en imaginant que $x, y, z$ sont exprimés en fonction d'un paramètre $t$ quelconque. On a, en désignant par des accents les dérivées par rapport à $t$ et supposant, pour fixer les idées, que la courbe

(²) Les formules (8) sont aussi appelées *formules de Serret*.

est orientée dans le sens des $t$ croissants,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \left[\frac{x''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} - \frac{x'(x'x'' + y'y'' + z'z'')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}\right] \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{x''(x'^2 + y'^2 + z'^2) - x'(x'x'' + y'y'' + z'z'')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2}.$$

Par permutations circulaires, on aurait $\frac{d^2y}{ds^2}$ et $\frac{d^2z}{ds^2}$. Portant dans (10), il vient

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'^2 + y'^2 + z'^2)(x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^4}$$

$$= \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}.$$

Si nous transformons le numérateur par l'identité de Lagrange (t. I, n° 285), nous obtenons enfin

$$(11) \qquad \frac{1}{R^2} = \frac{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}.$$

Cette formule [ainsi d'ailleurs que les formules (9) et (10)] permet de calculer seulement la valeur absolue de la courbure. Elle présente les mêmes inconvénients que la formule (11) du Chapitre précédent, à laquelle elle se réduit d'ailleurs, quand on y fait $z = 0$.

328. On peut faire un calcul analogue pour la torsion. Multipliant la première formule (8) par $a''$, la deuxième par $b''$, la troisième par $c''$ et ajoutant, nous avons

$$(12) \qquad -\frac{1}{T} = a''\frac{da'}{ds} + b''\frac{db'}{ds} + c''\frac{dc'}{ds}.$$

Or, on a, d'après (6),

$$\frac{da'}{ds} = \frac{d}{ds}\left(R\frac{da}{ds}\right) = \frac{dR}{ds}\frac{da}{ds} + R\frac{d^2a}{ds^2}.$$

Portant dans (12), il vient, en remarquant que

$$a''\frac{da}{ds} + b''\frac{db}{ds} + c''\frac{dc}{ds} = 0;$$

$$(13) \qquad -\frac{1}{TR} = a''\frac{d^2a}{ds^2} + b''\frac{d^2b}{ds^2} + c''\frac{d^2c}{ds^2}.$$

Calculons $\frac{d^2 a}{ds^2}$. On a, en posant, pour simplifier l'écriture, $\frac{dt}{ds} = \lambda$,

$$a = x'\lambda,$$

$$\frac{da}{ds} = (x''\lambda + x'\lambda')\lambda = x''\lambda^2 + x'\lambda\lambda',$$

$$(14) \qquad \frac{d^2 a}{ds^2} = [x'''\lambda^2 + 3x''\lambda\lambda' + x'(\lambda\lambda')']\lambda.$$

D'autre part, on sait que $a'' = bc' - cb'$ (n° 35); donc,

$$a'' = \mathrm{R}\left(b\frac{dc}{ds} - c\frac{db}{ds}\right) = \mathrm{R}[y'\lambda(z''\lambda^2 + z'\lambda\lambda') - z'\lambda(y''\lambda^2 + y'\lambda\lambda')],$$

$$(15) \qquad a'' = \mathrm{R}\lambda^3(y'z'' - z'y'').$$

Si nous portons maintenant (14) et (15) et les formules analogues dans (13), nous avons

$$(16) \qquad -\frac{1}{\mathrm{T}} = \mathrm{R}^2\lambda^6[x'''(y'z'' - z'y'') + y'''(z'x'' - x'z'') + z'''(x'y'' - y'z'')].$$

Si nous nous souvenons que $\lambda^2 = \frac{1}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ et si nous nous reportons à (11), nous avons

$$\mathrm{R}^2\lambda^6 = \frac{1}{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}.$$

La formule (16) devient, dès lors,

$$(17) \qquad \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{-\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}.$$

On voit que l'expression obtenue est rationnelle, ce qui confirme l'existence d'un signe déterminé pour la torsion (*cf.* n° 325).

329. Développées d'une courbe gauche. — Imaginons qu'en chaque point M de la courbe (C), on mène une normale M$\lambda$ à cette courbe et cherchons s'il est possible de déterminer la loi suivant laquelle varie cette normale, de telle manière qu'elle engendre une développable.

Nous définirons cette normale par l'angle $\theta = (\widehat{\mathrm{MN}, \mathrm{M}\lambda})$, mesuré dans le plan orienté NMB. Ses cosinus directeurs sont

$$\alpha = a'\cos\theta + a''\sin\theta, \qquad \beta = b'\cos\theta + b''\sin\theta, \qquad \gamma = c'\cos\theta + c''\sin\theta.$$

La condition, pour qu'elle engendre une développable, est (n° 372)

$$\left\| \frac{dx}{ds} \quad \frac{d\alpha}{ds} \quad \alpha \right\| = 0$$

ou

$$\left\| a \quad \frac{da'}{ds}\cos\theta + \frac{da''}{ds}\sin\theta + \frac{d\theta}{ds}(-a'\sin\theta + a''\cos\theta) \quad a'\cos\theta + a''\sin\theta \right\| = 0$$

ou, en tenant compte des formules de Frenet,

$$\left\| a \quad \left(-\frac{a}{R} - \frac{a''}{T}\right)\cos\theta + \frac{a'}{T}\sin\theta + \frac{d\theta}{ds}(-a'\sin\theta + a''\cos\theta) \quad a'\cos\theta + a''\sin\theta \right\| = 0.$$

Si l'on multiplie la première colonne par $\frac{\cos\theta}{R}$ et qu'on l'ajoute à la seconde, l'équation devient

$$\left\| a \quad \left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{T}\right)(a''\cos\theta - a'\sin\theta) \quad a'\cos\theta + a''\sin\theta \right\| = 0$$

ou

$$\left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{T}\right)\| a \quad a''\cos\theta - a'\sin\theta \quad a'\cos\theta + a''\sin\theta \| = 0.$$

Le déterminant qui nous reste est égal à $-1$, comme il résulte de sa décomposition en déterminants partiels (t. I, n° 281). Finalement, la condition cherchée se réduit à

$$(18) \qquad \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{T} = 0;$$

d'où l'on tire

$$(19) \qquad \theta = \int \frac{ds}{T} = \int_0^s \frac{ds}{T} + \text{const.}$$

Nous pouvons finalement énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Il existe une infinité de développables engendrées par des normales à la courbe* (C). *Quand on a l'une d'elles, on obtient les autres en faisant tourner la normale* M$\lambda$, *d'un angle constant quelconque, autour de* MT.

Les arêtes de rebroussement de ces développables, qui sont des enveloppes de normales de la courbe (C), sont appelées *les développées* de cette dernière. Il est facile d'avoir leurs équations paramétriques. Celles-ci sont de la forme

$$(20) \qquad X = x + \rho(a'\cos\theta + a''\sin\theta), \qquad Y = \ldots, \qquad Z = \ldots,$$

$\rho$ étant déterminé par la condition

$$(21) \qquad \frac{dX}{\alpha} = \frac{dY}{\beta} = \frac{dZ}{\gamma}.$$

Or, on a, en utilisant les formules de Frenet et la formule (18),

$$\frac{dX}{ds} = a + \frac{d\rho}{ds}(a' \cos\theta + a'' \sin\theta)$$
$$+ \rho\left[-\cos\theta\left(\frac{a}{R} + \frac{a''}{T}\right) + \frac{a'}{T}\sin\theta + \frac{1}{T}(a''\cos\theta - a'\sin\theta)\right],$$
$$\frac{dX}{ds} = a\left(1 - \frac{\rho\cos\theta}{R}\right) + \frac{d\rho}{ds}\alpha.$$

Les équations (21) seront vérifiées si l'on prend

$$\rho = \frac{R}{\cos\theta}.$$

Portant dans (20), nous avons les équations des développées

$$(22)\quad \begin{cases} X = x + Ra' + Ra''\operatorname{tang}\theta, \qquad Y = y + Rb' + Rb''\operatorname{tang}\theta, \\ Z = z + Rc' + Rc''\operatorname{tang}\theta, \end{cases}$$

où $\theta$ est donné par la formule (19).

Ces équations montrent que le point de contact de $M\lambda$ avec la développée se trouve sur l'axe de courbure de (C). Ceci est, du reste, une conséquence du théorème II du n° 331, qui permettrait d'écrire directement les formules (22).

Quand la courbe (C) est plane, une des développées est la développée au sens du n° 312 ou *développée plane*. Les autres sont enveloppées par des normales faisant un angle constant avec le plan de la courbe. Ce sont des hélices (*cf.* Chap. XXIV, exercice résolu n° 9).

330. Courbe rapportée a un trièdre de Frenet. — Pour étudier les propriétés relatives à la courbure des courbes gauches, il est commode de choisir les axes suivants. Prenons pour origine des coordonnées un point O de la courbe (C), qui sera, en même temps, l'origine des arcs. Prenons pour axe des $x$ la demi-tangente positive en ce point, pour axe des $y$ la normale principale et pour axe des $z$ la binormale.

Cela posé, considérons un point M de la courbe, voisin de O et d'abscisse curviligne $s$. Nous allons nous proposer de calculer les développements de ses coordonnées $x$, $y$, $z$ suivant les puissances croissantes de $s$, en nous limitant au troisième ordre. Soient

$$(23)\quad \begin{cases} x = a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \ldots, \\ y = b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + \ldots, \\ z = c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \ldots \end{cases}$$

les développements cherchés. Nous en déduisons

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2 + \ldots,\\ b &= b_1 + 2b_2 s + 3b_3 s^2 + \ldots,\\ c &= c_1 + 2c_2 s + 3c_3 s^2 + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Pour $s = 0$, on doit avoir $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$; donc,

$$(25)\qquad a_1 = 1, \qquad b_1 = 0, \qquad c_1 = 0.$$

Nous avons ensuite, d'après les formules (6),

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} a' &= \mathrm{R}\frac{da}{ds} = \mathrm{R}(2a_2 + 6a_3 s + \ldots),\\ b' &= \mathrm{R}\frac{db}{ds} = \mathrm{R}(2b_2 + 6b_3 s + \ldots),\\ c' &= \mathrm{R}\frac{dc}{ds} = \mathrm{R}(2c_2 + 6c_3 s + \ldots), \end{aligned}\right.$$

Pour $s = 0$, on doit avoir $a' = 0$, $b' = 1$, $c' = 0$; donc,

$$(27)\qquad a_2 = 0, \qquad b_2 = \frac{1}{2\mathrm{R}_0}, \qquad c_2 = 0.$$

Nous avons enfin, d'après (8),

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} 6a_3\mathrm{R} + 6a_3\frac{d\mathrm{R}}{ds}s + \ldots &= -\frac{a}{\mathrm{R}} - \frac{a''}{\mathrm{T}},\\ \frac{1}{\mathrm{R}_0}\frac{d\mathrm{R}}{ds} + 6b_3\mathrm{R} + 6b_3\frac{d\mathrm{R}}{ds}s + \ldots &= -\frac{b}{\mathrm{R}} - \frac{b''}{\mathrm{T}},\\ 6c_3\mathrm{R} + 6c_3\frac{d\mathrm{R}}{ds}s + \ldots &= -\frac{c}{\mathrm{R}} - \frac{c''}{\mathrm{T}}. \end{aligned}\right.$$

Faisons $s = 0$, en observant que l'on doit alors avoir $a'' = 0$, $b'' = 0$, $c'' = 1$; il vient

$$(29)\qquad a_3 = -\frac{1}{6\mathrm{R}_0^2}, \qquad b_3 = -\frac{1}{6\mathrm{R}_0^2}\left(\frac{d\mathrm{R}}{ds}\right)_0, \qquad c_3 = -\frac{1}{6\mathrm{R}_0\mathrm{T}_0}.$$

Nous avons finalement nos neuf coefficients. En portant leurs valeurs dans (23), nous obtenons les développements cherchés :

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= s - \frac{s^3}{6\mathrm{R}^2} + \ldots,\\ y &= \frac{s^2}{2\mathrm{R}} + \frac{s^3}{6}\,\frac{d\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right)}{ds} + \ldots,\\ z &= -\frac{s^3}{6\mathrm{RT}} + \ldots \end{aligned}\right.$$

Nous avons supprimé les indices o, qui figuraient dans les formules (27) et (29), afin de simplifier l'écriture. Mais, il est bien entendu que les quantités R, T, $\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{ds}$ sont prises, dans les formules (30), avec leurs valeurs pour $s = 0$. Ce sont donc des constantes et non des fonctions de $s$.

331. Propriétés diverses. — Les formules (30) permettent de découvrir très simplement un grand nombre de propriétés des courbes gauches.

On peut d'abord retrouver immédiatement toutes les propriétés caractéristiques du plan osculateur, établies aux nos 224 et 225.

Voici maintenant un théorème sur les tangentes :

Théorème I. — *La plus courte distance de deux tangentes infiniment voisines est un infiniment petit du troisième ordre par rapport à l'arc qui sépare les deux points de contact.*

Soit $\delta$ la plus courte distance de la tangente $Ox$ et de la tangente MT. Elle est égale à la distance de O à la projection de MT sur $yOz$. Or cette projection a pour équation dans le plan des $yz$

$$-(Y-y)\frac{dz}{ds}+(Z-z)\frac{dy}{ds}=0$$

ou

$$\left(Y-\frac{s^2}{2R}-\ldots\right)\left(\frac{s}{2RT}+\ldots\right)+\left(Z+\frac{s^3}{6RT}+\ldots\right)\left(\frac{1}{R}+\ldots\right)=0$$

ou

$$Y\left(\frac{s}{2RT}+\ldots\right)+Z\left(\frac{1}{R}+\ldots\right)-\frac{s^3}{12R^2T}+\ldots=0,$$

les points de suspension, dans chaque parenthèse, représentant des termes de degrés supérieurs à ceux des termes écrits. On a, dès lors,

$$\delta=\frac{\left|\frac{-s^3}{12R^2T}+\ldots\right|}{\sqrt{\left(\frac{s}{2RT}+\ldots\right)^2+\left(\frac{1}{R}+\ldots\right)^2}}.$$

Si l'on prend $s$ pour infiniment petit principal, la partie principale de cette

quantité est

$$(31) \qquad \delta' = \frac{\left|\frac{s^3}{12R^2T}\right|}{\left|\frac{1}{R}\right|} = \left|\frac{s^3}{12RT}\right|.$$

Elle est bien du troisième ordre.

Théorème II. — *La caractéristique du plan normal est l'axe de courbure.*

Le plan normal en M a pour équation

$$(32) \qquad a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0.$$

Sa caractéristique est définie par cette équation et l'équation dérivée par rapport à $s$ (n° 280), soit

$$\frac{da}{ds}(X-x)+\frac{db}{ds}(Y-y)+\frac{dc}{ds}(Z-z)-(a^2+b^2+c^2)=0.$$

ou

$$(33) \qquad a'(X-x)+b'(Y-y)+c'(Z-z)-R=0.$$

Pour $s=0$, les équations (32) et (33) se réduisent respectivement à

$$(34) \qquad X=0, \qquad Y-R=0.$$

Telles sont les équations de la caractéristique du plan normal en O; ce sont bien les équations de l'axe de courbure.

332. Ce théorème fournit un moyen de déterminer le centre et le rayon de courbure d'une courbe gauche définie d'une manière quelconque. Supposons, par exemple, que $x$, $y$, $z$ soient exprimés en fonction d'un paramètre $t$ quelconque. Le plan normal a pour équation

$$(35) \qquad (X-x)x'+(Y-y)y'+(Z-z)z'=0.$$

L'axe de courbure a pour équations l'équation (35) et la suivante :

$$(36) \qquad (X-x)x''+(Y-y)y''+(Z-z)z''=x'^2+y'^2+z'^2.$$

En prenant l'intersection de cette droite avec le plan osculateur (n° 226),

on a les coordonnées du centre de courbure :

$$(37)\quad \begin{cases} x_1 = x + \dfrac{x'^2+y'^2+z'^2}{A^2+B^2+C^2}[x''(x'^2+y'^2+z'^2) - x'(x'x''+y'y''+z'z'')], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

en appelant A, B, C les coefficients $y'z''-z'y''$, ... du plan osculateur.

Quant au rayon de courbure, on peut le calculer en prenant la distance du point $M(x, y, z)$ à l'axe de courbure ou bien par la formule

$$R^2 = (x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2.$$

En tenant compte de (37), on retrouve la formule (11).

**333. Cercle osculateur ; sphère osculatrice.** — Reprenons la courbe (C) définie par les équations (30) et cherchons les sphères qui ont avec elle, au point O, un contact du second ordre.

*A priori*, une telle sphère (S) doit être tangente, en O, à $Ox$, et, par conséquent, avoir son centre dans le plan des $yz$. Son équation est de la forme

$$(38)\qquad X^2+Y^2+Z^2-2\beta Y-2\gamma Z = 0.$$

Remplaçons-y X, Y, Z par les développements (30) et écrivons que l'équation en $s$ obtenue admet une racine triple nulle, c'est-à-dire que son premier membre est divisible par $s^3$. Notre équation s'écrit, en négligeant les termes de degré supérieur au troisième,

$$s^2\left(1-\frac{s^2}{6R^2}+\ldots\right)^2 - 2\beta s^2\left[\frac{1}{2R}+\frac{s}{6}\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{ds}+\ldots\right] + 2\gamma s^3\left(\frac{1}{6RT}+\ldots\right) = 0$$

ou

$$(39)\qquad s^2\left(1-\frac{\beta}{R}\right)+\frac{s^3}{3}\left(\frac{\gamma}{RT}+\frac{\beta\frac{dR}{ds}}{R^2}\right)+\ldots = 0.$$

Pour qu'il y ait une racine triple nulle, il faut et il suffit que l'on ait $\beta = R$. L'équation générale des sphères (S) est donc

$$(40)\qquad X^2+Y^2+Z^2-2RY-2\gamma Z = 0,$$

où $\gamma$ demeure arbitraire. Cette équation définit un faisceau, admettant le cercle de courbure pour cercle de base. Donc :

Théorème I. — *Les sphères qui ont un contact du second ordre*

*avec une courbe donnée, en un point donné, sont les sphères qui contiennent le cercle de courbure en ce point.*

Ce cercle est, par suite, le seul qui coupe la courbe en trois points confondus; c'est le *cercle osculateur* (*cf.* n° 318).

Cherchons maintenant si, parmi les sphères (S), il y en a une qui ait un contact du troisième ordre. Il nous faut annuler, dans l'équation (39), le coefficient de $s^3$; cela nous donne

$$\gamma = -\mathrm{T}\frac{d\mathrm{R}}{ds}. \tag{41}$$

Donc :

Théorème II. — *Il y a une seule sphère ayant un contact du troisième ordre avec une courbe donnée, en un point donné.*

Il n'y a pas de sphère ayant un contact d'ordre supérieur (¹) (sauf en certains points exceptionnels); aussi, la sphère précédente, qui a le contact d'ordre maximum, est-elle appelée *la sphère osculatrice.*

Théorème III. — *Le centre de la sphère osculatrice coïncide avec le point de contact de l'axe de courbure avec son enveloppe.*

Reprenons, en effet, les notations du théorème II du n° 331. Le point limite de l'axe de courbure est obtenu en dérivant l'équation (33) par rapport à $s$, ce qui donne, en utilisant les formules (8),

$$\left(\frac{a}{\mathrm{R}}+\frac{a''}{\mathrm{T}}\right)(\mathrm{X}-x)+\left(\frac{b}{\mathrm{R}}+\frac{b''}{\mathrm{T}}\right)(\mathrm{Y}-y)+\left(\frac{c}{\mathrm{R}}+\frac{c''}{\mathrm{T}}\right)(\mathrm{Z}-z)+\frac{d\mathrm{R}}{ds}=0.$$

Pour $s=0$, cette équation se réduit à

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{R}}+\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{T}}+\frac{d\mathrm{R}}{ds}=0.$$

Si l'on tient compte de (34), on en tire

$$\mathrm{Z}=-\mathrm{T}\frac{d\mathrm{R}}{ds}.$$

En comparant avec (41), on termine la démonstration.

---

(¹) Cela tient à ce qu'une sphère est déterminée par quatre points; ici, ces points sont infiniment voisins.

# CHAPITRE XXIII.

## COURBURE DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE.

334. Courbure normale ; théorème de Meusnier. — Soient une surface (S) et un point O de cette surface. Nous nous proposons d'étudier la courbure au point O des différentes lignes tracées sur (S) et passant par ce point.

Pour simplifier les calculs, prenons O pour origine des coordonnées et le plan tangent en ce point pour plan des $xy$. L'équation de notre surface est alors de la forme

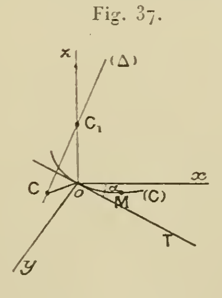
$$(1) \qquad z = f(x, y),$$

les fonctions $z$, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ s'annulant toutes trois pour

$$x = y = 0 \quad (^1).$$

Cela posé, traçons, sur (S) et par le point O, la courbe (C) (*fig.* 37).

Fig. 37.




Orientons-la d'une manière quelconque et soit OT la demi-tangente positive en O, d'angle polaire $\alpha$. Pour déterminer le centre de courbure C relatif à ce point, nous allons chercher l'axe de courbure ($\Delta$)

[1] Le point O est supposé *non singulier*. Tout ce qui va suivre ne saurait donc s'appliquer à un point singulier (*cf.* exercice résolu n° 5).

et le point $C_1$ où cette droite rencontre $Oz$ (¹). Ayant $C_1$, on en déduira $C$ par projection orthogonale sur le plan osculateur (n° 331).

Imaginons qu'on ait exprimé les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point quelconque M de (C) en fonction de l'abscisse curviligne $s = \widehat{OM}$. L'équation du plan normal en ce point à (C) est

$$(X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0. \tag{2}$$

La caractéristique de ce plan est définie par l'équation (2) et la suivante (n° 280) :

$$(X - x)x'' - (Y - y)y'' + (Z - z)z'' = 1, \tag{3}$$

en observant que $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$.

Pour $s = 0$, ces deux équations définissent la droite ($\Delta$). La première représente le plan normal en O, qui contient $Oz$. La seconde représente un autre plan, qui coupe $Oz$ au point $C_1$. Pour avoir la cote $\rho_1$ de ce point, il suffit donc de faire $s = 0$, $X = 0$, $Y = 0$, dans (3), et d'en tirer Z ou $\rho_1$ ; on obtient ainsi

$$\rho_1 = \frac{1}{z''_0}. \tag{4}$$

Calculons $z''_0$. Les trois fonctions $x$, $y$, $z$ de $s$ vérifient identiquement l'équation (1). Dérivons totalement par rapport à $s$ (t. I, n° 130) :

$$z' = px' + qy'. \tag{5}$$

Dérivons encore une fois :

$$z'' = px'' + qy'' + rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2, \tag{6}$$

$r$, $s$, $t$ désignant, suivant une notation classique, les dérivées partielles $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Si, dans l'identité (6), nous faisons maintenant $s = 0$, nous avons

$$z''_0 = r_0 x'^2_0 + 2 s_0 x'_0 y'_0 + t_0 y'^2_0.$$

---

(¹) ($\Delta$) rencontre $Oz$, car elle est dans le plan normal en O à (C), lequel passe par $Oz$.

Or, $x'_0 = \cos\alpha$, $y'_0 = \sin\alpha$ (n° 193). Donc,

$$z''_0 = r_0 \cos^2\alpha + 2s_0 \cos\alpha \sin\alpha + t_0 \sin^2\alpha.$$

Portons dans (4), en supprimant, pour simplifier l'écriture, les indices de $r_0$, $s_0$, $t_0$; nous avons la formule

$$(7) \qquad \frac{1}{\rho_1} = r \cos^2\alpha + 2s \cos\alpha \sin\alpha + t \sin^2\alpha.$$

Cette formule, fondamentale pour la théorie qui nous occupe, nous montre que le point $C_1$ est entièrement déterminé quand on se donne la tangente OT.

335. De là résultent les conséquences suivantes :

Théorème I. — *Toutes les courbes de la surface qui ont le même plan osculateur en* O *ont le même centre de courbure.*

En effet, ce centre de courbure est la projection du point $C_1$ sur le plan osculateur commun.

Corollaire. — *Toute courbe tracée sur la surface et passant par* O *a même centre de courbure, en* O, *que la section de la surface par le plan osculateur de ladite courbe au point* O.

Car le plan osculateur d'une courbe plane n'est autre que le plan de cette courbe.

Théorème II (dit théorème de Meusnier). — *Le lieu des centres de courbure des courbes tracées sur la surface et tangentes en* O *à* OT *est un cercle, dit cercle de Meusnier.*

Ce cercle est, en effet, le cercle décrit dans le plan perpendiculaire en O à OT, sur $OC_1$ comme diamètre, puisque l'angle $\widehat{C_1CO}$ est droit.

Si l'on appelle $\theta$ l'angle du plan osculateur TOC avec le plan tangent $xOy$, le rayon de courbure $\rho = OC$ est donné par la formule

$$(8) \qquad \rho = \rho_1 \sin\theta.$$

Cela est évident, dans le triangle rectangle $C_1CO$. Le point $C_1$ et

la longueur $\rho_1$ sont appelés *centre et rayon de courbure normale* de la courbe (C). Ce sont manifestement le centre et le rayon de courbure de la section normale qui admet même tangente en O que (C).

336. Indicatrice d'Euler. — Proposons-nous maintenant d'étudier les variations de la courbure normale, quand la tangente OT décrit le plan $xOy$. Ceci revient à étudier les variations de la quantité $\frac{1}{\rho_1}$ définie par la formule (7), quand on fait varier $\alpha$. Cette étude ne présente, analytiquement, aucune difficulté. Mais, elle est rendue plus intuitive par l'interprétation géométrique suivante.

Portons, sur OT, une longueur $OP = \sqrt{\rho_1}$ et cherchons le lieu du point P. Les coordonnées de ce point dans le plan $xOy$ sont

$$x = \sqrt{\rho_1}\cos\alpha, \qquad y = \sqrt{\rho_1}\sin\alpha.$$

Moyennant ces formules, l'équation (7) s'écrit

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 1. \tag{9}$$

Elle nous montre que le lieu du point P est une conique de centre O. Cette conique est appelée l'*indicatrice d'Euler* relative au point O. Quand elle est construite, elle permet de suivre aisément les variations de $\rho_1$, car ces variations sont celles de $\overline{OP}^2$, lesquelles sont évidentes pour n'importe quelle conique.

L'indicatrice est une ellipse, une hyperbole ou un système de deux droites parallèles, suivant que $rt - s^2$ est $> 0$, $< 0$ ou $= 0$.

Les asymptotes, qui sont imaginaires dans le premier cas, réelles et distinctes dans le second cas, confondues dans le troisième cas, portent le nom de *tangentes asymptotiques* de la surface (S) au point O. Le rayon de courbure normale correspondant à chacune d'elles est infini. Autrement dit, *toute section normale tangente en* O *à une tangente asymptotique admet le point* O *comme point d'inflexion* (n° 319). Il en est de même, d'ailleurs, de toute section oblique en vertu du théorème de Meusnier.

337. Les axes de l'indicatrice sont appelés les *tangentes principales* de la surface (S) au point O. Ces tangentes sont rectangulaires

et toujours réelles. Les sections normales correspondantes sont appelées *sections normales principales*. Les centres et rayons de courbure de ces sections sont les *centres et rayons de courbure principaux*.

Les rayons de courbure principaux sont, d'après la définition de l'indicatrice, les maximum et minimum du rayon de courbure normale $\rho_1$. Si l'on se reporte à la formule (7), on peut déduire immédiatement de cette remarque l'équation qui donne ces rayons. Il suffit, en effet, d'écrire (7) sous la forme

$$(10)\qquad \left(r - \frac{1}{\rho_1}\right)\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\sin\alpha + \left(t - \frac{1}{\rho_1}\right)\sin^2\alpha = 0.$$

D'après une méthode élémentaire bien connue, les maximum et minimum de $\rho_1$ sont obtenus en exprimant que cette équation du second degré en $\tang\alpha$ ou $\cotang\alpha$ admet une racine double. On obtient ainsi l'équation du second degré en R

$$(11)\qquad \left(\frac{1}{R} - r\right)\left(\frac{1}{R} - t\right) - s^2 = 0,$$

dont les racines $R_1$ et $R_2$ sont les rayons de courbure principaux.

Développée et ordonnée par rapport à $\frac{1}{R}$, elle s'écrit

$$(12)\qquad \frac{1}{R^2} - (r + t)\frac{1}{R} + rt - s^2 = 0.$$

Les fonctions symétriques élémentaires

$$\frac{1}{R_1 R_2} = rt - s^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = r + t$$

jouent un rôle très important dans la théorie des surfaces et portent les noms respectifs de *courbure totale* et *courbure moyenne* [1] de la surface (S) au point O.

Lorsque cette dernière est nulle en chaque point, la surface est appelée *surface minima*.

Si l'on annule la dérivée de $\frac{1}{\rho_1}$ par rapport à $\alpha$, on obtient l'*équa-*

[1] La courbure moyenne est, plus exactement, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$.

*tion aux angles polaires des tangentes principales :*

$$(t - r)\sin 2\alpha + 2s\cos 2\alpha = 0$$

ou

(13) $$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2s}{r - t}.$$

338. *Ombilics.* — La formule (13) devient illusoire quand on a à la fois

(14) $$s = 0, \qquad r = t.$$

Dans ce cas, le point O est appelé *ombilic* de la surface (S) et jouit manifestement des propriétés suivantes :

L'indicatrice est un cercle;
Toutes les tangentes en O sont principales;
Le rayon de courbure normale est constant;
Les tangentes asymptotiques sont isotropes.

339. Formule d'Euler. — Imaginons que les axes $Ox$ et $Oy$ qui, jusqu'à présent, ont été deux tangentes rectangulaires quelconques, soient les tangentes principales. L'indicatrice est alors rapportée à ses axes, ce qui est caractérisé par la condition $s = 0$.

Les courbures principales sont données, l'une par $\alpha = 0$, soit $\frac{1}{R_1} = r$, l'autre par $\alpha = \frac{\pi}{2}$, soit $\frac{1}{R_2} = t$. La formule (7) peut alors s'écrire, en remplaçant, pour plus de symétrie dans l'écriture, $\rho_1$ par R,

(15) $$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2}.$$

Cette élégante formule porte le nom de *formule d'Euler*.

Elle permet d'établir rapidement certaines propriétés.

Par exemple, changeons $\alpha$ en $\alpha + \frac{\pi}{2}$, nous avons

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin^2\alpha}{R_1} + \frac{\cos^2\alpha}{R_2}.$$

Ajoutons à (15) :

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

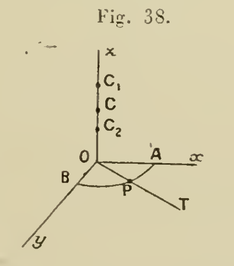
Donc, *la somme des courbures de deux sections normales rectangulaires est constante et égale à la courbure moyenne.*

340. Forme d'une surface au voisinage d'un de ses points. — La connaissance de l'indicatrice relative au point O permet de se rendre compte de la forme de la surface (S), au voisinage de ce point. Trois cas sont à distinguer, suivant le genre de cette indicatrice, que nous allons d'ailleurs supposer rapportée à ses axes.

Premier cas : *Indicatrice elliptique.* — On peut avoir une ellipse réelle ou imaginaire, suivant que le signe commun à $r$ et à $t$ est le signe $+$ ou le signe $-$. Dans le second cas, la courbure normale est constamment négative. En changeant le sens de $Oz$, on la rend positive et l'on se ramène au premier cas, que nous allons donc seul examiner.

Supposons, pour fixer les idées, que $Ox$ soit le grand axe de l'indicatrice et $Oy$ le petit axe. Si l'on imagine un plan normal, partant de $zOx$ et venant s'appliquer sur $zOy$, le rayon de courbure correspondant diminue de $R_1$ à $R_2$; le centre de courbure décrit le vecteur $\overrightarrow{C_1C_2}$, situé sur la partie positive de $Oz$ (*fig.* 38) et tel

Fig. 38.



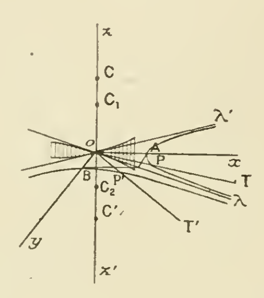

que $\overline{OC_1} = \overline{OA}^2$, $\overline{OC_2} = \overline{OB}^2$. Si notre plan sécant, continuant à tourner dans le même sens, quitte $zOy$ pour venir de nouveau s'appliquer sur $zOx$, le rayon de courbure reprend symétriquement les mêmes valeurs que précédemment ; le centre de courbure décrit le vecteur $\overrightarrow{C_2C_1}$. Ceci nous montre que toute section normale est concave au point O vers les $z$ positifs et a une courbure d'autant plus grande que son plan est plus voisin de $zOy$. La surface est donc située, au voisinage du point O, tout entière au-dessus du plan $xOy$.

On dit qu'elle est *concave vers les z positifs* et *convexe vers les z négatifs*.

Ce cas est caractérisé par le fait que *les rayons de courbure principaux ont le même signe*.

Deuxième cas : *Indicatrice hyperbolique*. — Supposons, pour fixer les idées, que $Ox$ soit l'axe transverse. Soient $O\lambda$ et $O\lambda'$ les deux asymptotes (*fig*. 39).

Fig. 39.




Reprenons notre plan normal, tournant autour de $Oz$, dans le sens positif, à partir de $zOx$. Le rayon de courbure correspondant commence à croître, à partir de $R_1 = \overline{OC_1} = \overline{OA}^2$. Il devient infini, pour le plan $zO\lambda$. Le centre de courbure décrit la demi-droite $C_1 z$. Les sections correspondantes sont concaves, en O, vers les $z$ positifs et ont une courbure de plus en plus petite. La section par $zO\lambda$ a une courbure nulle; elle présente, en O, une inflexion et traverse, par suite, le plan tangent.

Continuons maintenant à faire tourner notre plan sécant. Il coupe dorénavant l'indicatrice en des points imaginaires. Le demi-diamètre OP est une imaginaire pure : son carré, c'est-à-dire $\rho_1$, est négatif. Pour suivre ses variations, il suffit de construire l'hyperbole conjuguée de l'indicatrice (nº 452), définie par l'équation

$$rx^2 + ty^2 = -1.$$

Le plan $zOT'$ coupe cette hyperbole en $P'$ et le rayon de courbure correspondant est égal à $-\overline{OP'}^2$. Quand $OT'$ va de $O\lambda$ à $Oy$, ce rayon croît de $-\infty$ à $R_2 = \overline{OC_2} = -\overline{OB}^2$ ; le centre de courbure $C'$ décrit, dans le sens des $z$ croissants, la demi-droite $C_2 z'$. La section

tourne sa concavité vers les $z$ négatifs et a une courbure absolue de plus en plus grande.

Si l'on continue à faire tourner le plan sécant, la courbure reprend symétriquement les mêmes valeurs. Le centre de courbure décrit $C_2z'$, puis $zC_1$.

En résumé, on voit que les sections dont la tangente en O se trouve dans l'angle des asymptotes qui comprend O$x$, sont, au voisinage de O, au-dessus de $x$O$y$. Celles, dont la tangente se trouve dans l'angle des asymptotes qui comprend O$y$, sont, au contraire, au voisinage de O, au-dessous de $x$O$y$. Les sections intermédiaires, tangentes à O$\lambda$ ou O$\lambda'$, traversent $x$O$y$.

*La surface traverse donc son plan tangent*, la traversée ayant lieu tangentiellement à O$\lambda$ et à O$\lambda'$.

Nous verrons d'ailleurs (n° 342) que la section par $x$O$y$ présente, en O, un point double, dont les tangentes sont O$\lambda$ et O$\lambda'$; ceci confirme la conclusion précédente et montre que, au voisinage du point O, la portion du plan couverte de hachures (*fig.* 39) est au-dessous de la surface; la portion non hachurée est, au contraire, au-dessus de la surface.

On dit qu'au point O, la surface est *à courbures opposées*.

Dans ce cas, *les rayons de courbure principaux sont de signes contraires*.

Troisième cas : *Indicatrice parabolique*. — Comme elle a un centre, elle se décompose en deux droites parallèles. Ces deux droites peuvent être réelles ou imaginaires conjuguées.

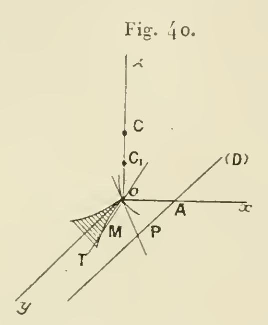
Le second cas se ramène au premier, par un changement de sens de O$z$, comme pour l'indicatrice elliptique. Supposons donc nos deux droites réelles et, prenant pour axe des $y$ la droite équidistante, figurons l'une d'elles, (D) (*fig.* 40).

Reprenons toujours notre plan normal, tournant autour de O$z$. Lorsqu'il est sur $z$O$x$, le rayon de courbure est minimum : $R_1 = \overline{OC_1} = \overline{OA}^2$. Quand le plan tourne et vient s'appliquer sur $z$O$y$, $\rho_1 = \overline{OP}^2$ augmente constamment jusqu'à $+\infty$; le centre de courbure C décrit la demi-droite $C_1z$.

Ceci nous montre que toutes les sections normales sont concaves, en O, vers les $z$ positifs, sauf la section par $z$O$y$, qui présente une

inflexion. On sait d'ailleurs (n° 342) que la section par $xOy$ admet le point O et l'axe $Oy$ pour point et tangente de rebroussement. On peut essayer, d'après cela, de se représenter la forme de la surface au voisinage du point O. Cela est beaucoup plus difficile que dans les deux cas précédents. Si l'on considère la section par le plan $z$OT, voisin de $zOy$ (*fig.* 40), cette section est, au voisinage immédiat

Fig. 40.




du point O, au-dessus du plan tangent; mais, elle traverse ce dernier au point M, qui est d'autant plus voisin de O que la droite OT est plus voisine de $Oy$. Entre O et M, elle présente nécessairement une inflexion. D'après cela, on peut voir que, au voisinage de O, la portion du plan $xOy$ extérieure aux deux branches du rebroussement est au-dessous de la surface; la portion comprise entre ces deux branches (couverte de hachures) est, au contraire, au-dessus de la surface.

Le point O est appelé *point parabolique*.

Ce cas est caractérisé par le fait qu'*un des rayons de courbure principaux est infini*.

341. *Maximum ou minimum d'une fonction de deux variables.* — Aux considérations qui précèdent, peut être rattachée l'étude des maxima ou minima d'une fonction de deux variables.

On dit que la fonction $z = f(x, y)$ est maximum (ou minimum) pour $x = x_0$, $y = y_0$, si l'on a $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ [ou $f(x_0, y_0) < f(x, y)$], pour toutes les valeurs de $x$, $y$ infiniment voisines de $x_0$, $y_0$ [1].

Par un changement de variables évident [2], nous pouvons, pour simplifier, nous ramener aux hypothèses $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

---

[1] D'une façon précise pour $|x - x_0| < \varepsilon$ et $|y - y_0| < \varepsilon$, $\varepsilon$ étant un nombre positif suffisamment petit.

[2] $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$, $z = z_0 + z'$.

Si nous interprétons géométriquement notre définition, nous voyons que pour qu'il y ait, par exemple, minimum, il faut et il suffit que la surface (S), représentée par l'équation $z = f(x, y)$ soit, au voisinage de l'origine, tout entière au-dessus du plan des $xy$. Si nous excluons les cas où le point O serait un point singulier pour cette surface, il est tout d'abord évident que le plan tangent en ce point doit être $xOy$; ce qui se traduit analytiquement par les conditions

$$f'_x(0, 0) = 0, \qquad f'_y(0, 0) = 0.$$

Ensuite, l'indicatrice d'Euler doit être une ellipse réelle; ce qui peut se traduire analytiquement par la condition que $rx^2 + 2sxy + ty^2$ soit une forme quadratique définie positive (t. I, n° 306).

En définitive, nous pouvons énoncer le théorème suivant, qu'on peut d'ailleurs démontrer analytiquement :

Théorème. — *Pour que la fonction $f(x, y)$ soit minimum pour $x = x_0$, $y = y_0$, il faut et il suffit :*

1° *Que $f'_x$ et $f'_y$ s'annulent pour $x = x_0$, $y = y_0$;*

2° *Que la forme quadratique $r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2$ soit définie positive, en appelant $r_0$, $s_0$, $t_0$ les valeurs des dérivées partielles $f''_{x^2}$, $f''_{xy}$, $f''_{y^2}$, pour $x = x_0$, $y = y_0$.*

342. Section d'une surface par son plan tangent. — A la théorie de l'indicatrice, se rattache l'étude de la section de la surface (S) par le plan tangent $xOy$, ainsi que par les plans parallèles infiniment voisins.

Développant la fonction $f(x, y)$ suivant la formule de Mac-Laurin (t. I, n° 132), l'équation (1) peut s'écrire

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \varphi_3(x, y), \tag{16}$$

$\varphi_3(x, y)$ désignant un polynome homogène et du troisième degré en $x$, $y$, dont les coefficients sont des fonctions de $x$ et de $y$ demeurant finies quand $x$ et $y$ tendent vers zéro.

La section par $xOy$ a pour équation dans ce plan

$$\frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \varphi_3(x, y) = 0. \tag{17}$$

D'après le théorème du n° 199, elle admet l'origine pour point double, les tangentes en ce point ayant pour équation quadratique

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0. \tag{18}$$

On reconnaît l'équation des tangentes asymptotiques. Donc :

Théorème I. — *La section d'une surface par un de ses plans tangents admet le point de contact pour point double, les tangentes en ce point étant les tangentes asymptotiques.*

Le point double est donc isolé, nodal ou de rebroussement, suivant que l'indicatrice est elliptique, hyperbolique ou parabolique.

Coupons maintenant la surface (S) par le plan $z = \varepsilon$, $\varepsilon$ désignant un infiniment petit. La projection de la section sur $xOy$ a pour équation

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \varphi_3(x, y). \tag{19}$$

Elle possède des points (réels ou imaginaires) infiniment voisins de l'origine. Si l'on considère $x$ et $y$ comme des infiniment petits du premier ordre, $\varphi_3(x, y)$ est un infiniment petit du troisième ordre, négligeable vis-à-vis de $\frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2)$, qui n'est que du second ordre. Dès lors, on peut dire que les parties principales $\xi$ et $\eta$ de $x$ et de $y$ satisfont à l'équation

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2), \tag{20}$$

qui représente une conique homothétique à l'indicatrice. Donc :

Théorème II. — *Tout plan parallèle au plan tangent et infiniment voisin de ce plan coupe la surface suivant une courbe, qui,* DANS LE VOISINAGE DU POINT DE CONTACT, *est sensiblement homothétique à l'indicatrice.*

Le lecteur utilisera ce théorème pour compléter l'étude faite, au n° 340, sur la forme de la surface au voisinage du point O. Il supposera successivement $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < 0$.

343. Intersection de deux surfaces tangentes. — Soit une deuxième surface (S'), tangente en O à $xOy$. Son équation peut se mettre sous une forme analogue à (16), soit

$$z = \frac{1}{2}(r'x^2 + 2s'xy + t'y^2) + \varphi'_3(x, y). \tag{21}$$

La projection de l'intersection des deux surfaces sur le plan des $xy$ a pour équation (n° 51)

$$\frac{1}{2}[(r - r')x^2 + 2(s - s')xy + (t - t')y^2] + \varphi_3(x, y) - \varphi'_3(x, y) = 0.$$

On voit qu'elle admet l'origine pour point double, les tangentes en ce point ayant pour équation

$$(22) \qquad (r-r')x^2+2(s-s')xy+(t-t')y^2=0.$$

Or, cette équation n'est autre que celle du faisceau des diamètres communs aux deux indicatrices (n° 78). Donc :

THÉORÈME III. — *Si deux surfaces sont tangentes, leur intersection admet le point de contact pour point double, les tangentes en ce point étant les diamètres communs aux deux indicatrices des deux surfaces.*

314. TANGENTES CONJUGUÉES. — Deux tangentes en un même point sont dites *conjuguées*, lorsqu'elles sont conjuguées par rapport à l'indicatrice de ce point ou, ce qui revient au même, conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes asymptotiques.

THÉORÈME (*de Dupin*). — *Si une courbe* (C), *tracée sur la surface, est tangente en* O *à* OT, *le plan tangent à la surface le long de cette courbe enveloppe une développable qui, au point* O, *est tangente au plan tangent le long de la tangente* OT′, *conjuguée de* OT.

En effet, soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point quelconque M de (C), supposées exprimées en fonction d'un paramètre $t$ quelconque. Le plan tangent à (S) en ce point a pour équation

$$(23) \qquad Z-z=p(X-x)+q(Y-y).$$

La caractéristique de ce plan est définie par cette équation et par l'équation dérivée par rapport à $t$ :

$$-z'=p'(X-x)+q'(Y-y)-px'-qy'$$

ou, en observant qu'on a identiquement [1] $z'=px'+qy'$,

$$(24) \qquad p'(X-x)+q'(Y-y)=0.$$

Au point O, cette dernière équation devient

$$(25) \qquad p'_0X+q'_0Y=0;$$

c'est l'équation, dans le plan des $xy$, de la caractéristique OT′. Les paramètres directeurs de cette caractéristique sont donc, si l'on veut, $q'_0$, $-p'_0$, 0. D'autre part, ceux de la tangente OT sont $x'_0$, $y'_0$, 0. La condition de conju-

---

[1] Cela résulte de ce que les fonctions $x$, $y$, $z$ vérifient identiquement l'équation (1).

guaison s'écrit donc (n° 463)

(26) $$q'_0(r_0 x'_0 + s_0 y'_0) - p'_0(s_0 x'_0 + t_0 y'_0) = 0.$$

Or, d'après le théorème des fonctions composées, on a, pour toute valeur de $t$,

$$p' = \frac{\partial p}{\partial x} x' + \frac{\partial p}{\partial y} y' = r x' + s y',$$

$$q' = \frac{\partial q}{\partial x} x' + \frac{\partial q}{\partial y} y' = s x' + t y'.$$

L'égalité (26) devient dès lors évidente et le théorème est démontré.

345. Lignes asymptotiques. — On dit que *la ligne* (C) *est une ligne asymptotique, si la tangente en chacun de ses points est une tangente asymptotique.*

Une telle tangente étant à elle-même sa propre conjuguée, elle est aussi la caractéristique du plan tangent à (S), en vertu du théorème de Dupin. Il s'ensuit que la développable enveloppe de ce plan tangent admet (C) pour arête de rebroussement (n° 289). Donc, le dit plan tangent est osculateur à (C).

Réciproquement, si le plan osculateur en chaque point M de (C) est tangent à (S), comme sa caractéristique est la tangente MT à (C), cette tangente est à elle-même sa propre conjuguée; c'est donc une tangente asymptotique et la ligne (C) est une ligne asymptotique.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Les lignes asymptotiques d'une surface sont caractérisées par ce fait que le plan osculateur en chacun de leurs points est tangent à la surface* (1).

Ce théorème permet d'écrire immédiatement l'équation différentielle des lignes asymptotiques.

Soit

(27) $$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0$$

l'équation du plan tangent à (S) au point $M(x, y, z)$. Pour que ce plan soit osculateur à la ligne (C), il faut et il suffit qu'on ait (n° 226)

(28) $$a x'' + b y'' + c z'' = 0.$$

Or, on a identiquement

(29) $$a x' + b y' + c z' = 0,$$

---

(1) On appelle *ligne géodésique* une ligne dont les plans osculateurs sont *normaux* à la surface. On démontre qu'elle est plus courte que toute autre ligne joignant deux de ses points et tracée sur la surface.

puisque la tangente à (C) se trouve dans le plan tangent à (S). En dérivant par rapport à $t$, il vient

$$(30) \qquad (ax'' + by'' + cz'') + (a'x' + b'y' + c'z') = 0.$$

Moyennant cette identité, la condition (28) équivaut à

$$(31) \qquad a'x' + b'y' + c'z' = 0$$

ou à

$$(32) \qquad da\,dx + db\,dy + dc\,dz = 0.$$

Telle est l'*équation différentielle des lignes asymptotiques.*

Si la surface est définie paramétriquement, elle est de la forme [1]

$$(33) \qquad A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0$$

et se décompose en deux équations différentielles du premier ordre. *Il y a donc deux familles de lignes asymptotiques, dépendant chacune d'un paramètre arbitraire.*

346. Lignes de courbure. — On dit que *la ligne* (C) *est une ligne de courbure, si la tangente en chacun de ses points est une tangente principale.*

Si l'on applique, à une telle ligne, le théorème de Dupin, on voit que la normale MT' à (C) située dans le plan tangent à (S), qui est conjuguée de la tangente MT à (C), enveloppe une courbe, laquelle est une développée de (C) (n° 329). Il en résulte que la normale MN à (S) le long de (C), qui, en chaque point M, se déduit de MT' par une rotation d'un angle droit autour de MT, enveloppe une autre développée, autrement dit, engendre une développable.

Réciproquement, si MN engendre une développable, il en est de même de MT', qui est, dès lors, conjuguée de MT. Comme ces deux tangentes sont à la fois rectangulaires et conjuguées, ce sont les tangentes principales, et la ligne (C) est une ligne de courbure. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Les lignes de courbure d'une surface sont caractérisées par ce fait que les normales à la surface tout le long de chacune d'elles engendrent une développable.*

On peut en déduire immédiatement *l'équation différentielle des lignes de courbure.* En conservant les notations du n° 345 et se reportant au n° 372,

(1) Si l'on prend pour paramètres $x$ et $y$, on a $a = p$, $b = q$, $c = -1$; l'équation (32) devient

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

cette équation s'écrit

$$(34) \qquad \begin{vmatrix} dx & da & a \\ dy & db & b \\ dz & dc & c \end{vmatrix} = 0.$$

Il y a lieu de faire à son sujet les mêmes remarques que sur l'équation (32) des lignes asymptotiques.

347. Lorsque M décrit la ligne de courbure (C), la normale MN enveloppe une courbe Γ, développée de (C). Le point de contact ω se trouve sur l'axe de courbure de (C) (n° 329). Donc, en vertu du théorème de Meusnier, ω est le centre de courbure normale de (C). Comme la tangente MT est une tangente principale, ω *est un centre de courbure principale.*

A la seconde ligne de courbure (C′), qui passe par M, correspond de même le second centre de courbure principale ω′.

Quand M décrit (S), ω et ω′ décrivent deux surfaces Σ et Σ′, dont l'ensemble est appelé *surface des centres de courbure.* Elles contiennent respectivement les courbes Γ et Γ′, puisque Γ, par exemple, est le lieu de ω, quand M décrit C. Il s'ensuit que *la normale* MN *est tangente en* ω *à* Σ *et en* ω′ *à* Σ′ (*cf.* n° 391).

## CHAPITRE XXIV.

### PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE QUI CONDUISENT A DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

348. Méthode générale. — Nous nous proposons d'étudier, dans ce Chapitre, une catégorie fort intéressante de problèmes, dont la solution est subordonnée à l'intégration d'une ou plusieurs équations différentielles. Ces problèmes consistent à *chercher les courbes qui satisfont à certaines conditions, imposées à l'avance et concernant leurs tangentes, normales, arc, rayon de courbure, etc.* On peut aussi quelquefois leur rattacher la recherche de certaines surfaces assujetties à des conditions analogues ; mais, en général, de tels problèmes conduisent à des équations aux dérivées partielles et ne sont pas du ressort de cet Ouvrage. La plupart du temps, d'ailleurs, nous nous bornerons à des problèmes de Géométrie plane. La méthode générale que nous préconisons pour la résolution de semblables problèmes est la suivante :

*On exprime analytiquement la condition imposée, en introduisant pour cela les quantités nécessaires (telles que coordonnées du point courant, angle polaire de la tangente, abscisse curviligne, coordonnées normales de la tangente, rayon de courbure, etc.) et les différentielles de ces quantités. On écrit ensuite, outre cette condition imposée, toutes les relations indépendantes, qui doivent exister, pour une courbe quelconque, entre les quantités introduites ou leurs différentielles. Si $n$ désigne le nombre de ces quantités, on doit alors avoir en tout $n-1$ équations. On élimine, entre elles, $n-2$ des variables introduites et il reste finalement une équation différentielle, qu'on intègre. En se servant ensuite des autres équations, on calcule, de proche en proche, $n-1$ des variables en fonction de la $n^{ième}$. On obtient, en particulier, les coordonnées du point courant en fonction de*

*cette $n^{ième}$ variable et, par conséquent, les équations paramétriques de la courbe cherchée.*

Ces équations renfermant un certain nombre de constantes arbitraires d'intégration, *il y a toujours une infinité de courbes qui répondent à la question.*

349. Cette règle générale attire un certain nombre de remarques. Tout d'abord, il arrive souvent qu'on peut se borner à introduire, comme variables, les coordonnées (cartésiennes ou polaires) du point courant de la courbe cherchée. On considère l'une de ces coordonnées comme fonction de l'autre, par exemple, $y$ comme fonction de $x$ et l'on écrit la condition imposée, qui se traduit par une équation différentielle d'un ordre plus ou moins élevé. Théoriquement, cette façon de procéder est même toujours possible. Mais, il ne faut l'utiliser qu'à condition qu'elle conduise, rapidement et sans calculs pénibles, à une équation simple de forme. Si on l'applique, au contraire, d'une manière inconsidérée, elle peut être désastreuse, compliquer le problème et le rendre insoluble.

Il faut bien se rendre compte, en effet, de la justesse des réflexions suivantes. Quand on recherche une courbe, on n'est pas du tout certain, *a priori*, que son équation implicite soit simple et cela est encore plus vrai, si l'on assujettit cette équation à être de la forme $y = f(x)$. Il peut très bien se faire que cette dernière équation soit excessivement compliquée et que cependant la courbe cherchée soit susceptible d'une représentation paramétrique simple. Dans cette circonstance, l'équation différentielle qui lie $x$ et $y$ sera compliquée, ne rentrera peut-être pas dans un type connu comme intégrable et, en tout cas, si elle est intégrable, donnera lieu à des calculs pénibles et conduira à un résultat inélégant.

On aura, au contraire, très probablement, des calculs beaucoup plus simples si l'on s'arrange de manière à obtenir, en définitive, la représentation paramétrique à laquelle nous avons fait allusion plus haut.

Mais, comment peut-on reconnaître, à l'avance, la variable susceptible de conduire à cette représentation ? Le moyen le plus sûr de la découvrir consiste précisément à appliquer la règle générale donnée au numéro précédent, en se guidant uniquement, pour l'élimination

des variables surabondantes, sur le maximum de simplicité des calculs. Si une façon d'éliminer ne donne rien, on en essaie une autre, jusqu'à ce qu'on obtienne, en définitive, une équation différentielle simple et intégrable.

Bien entendu, ceci n'est pas toujours possible et nombreux sont les problèmes de Géométrie infinitésimale, qui sont insolubles par le moyen des seules fonctions élémentaires ou de quadratures effectuées sur ces fonctions. Mais, il n'en est pas moins vrai qu'on échoue bien souvent dans la résolution d'un tel problème, pour l'unique raison qu'on a mal choisi ses variables ([1]). Il ne faut jamais faire ce choix *a priori*, sauf dans quelques cas évidents. Ce sont les calculs qui doivent le faire ressortir, à condition toutefois qu'on ne les ait pas brutalisés et qu'on se soit, au contraire, laissé guider par eux. S'ils ne sont pas suffisamment simples, qu'on introduise des variables surabondantes. Mieux vaut avoir affaire à plusieurs équations simples qu'à une seule équation compliquée.

Ajoutons à cela que quelques considérations géométriques sur le problème posé sont parfois fort utiles et permettent de prévoir les variables qu'il faudra garder, parce que, par exemple, on sera certain qu'elles conduisent à une équation à variables séparées (*cf.* n° 353).

Ces généralités étant exposées, nous allons passer en revue les principaux types de problèmes qu'on rencontre dans la pratique.

350. Trajectoires orthogonales. — Soit une famille de courbes (C), dépendant d'un paramètre arbitraire $\alpha$ et que nous supposerons d'abord définie par l'équation

$$f(x, y, \alpha) = 0. \tag{1}$$

Nous nous proposons de trouver toutes les courbes qui coupent orthogonalement toutes les courbes (C).

Soit (Γ) l'une d'elles. Elle coupe à angle droit la courbe $(C_\alpha)$, en un point M, dont les coordonnées $x$ et $y$ peuvent être considérées comme des fonctions de $\alpha$. Les paramètres directeurs de la tangente Mθ

---

([1]) C'est ainsi que bien des élèves ont la fâcheuse habitude de choisir invariablement, quel que soit le problème posé, $x$ et $y$ pour variables. La plupart du temps, ils sont immédiatement arrêtés par la complication des calculs. S'ils les poussent jusqu'au bout, ils sont effrayés par l'équation différentielle à laquelle ils arrivent et déclarent le problème insoluble.

à (Γ) sont $dx$, $dy$. D'autre part, l'équation de la tangente MT, en M, à $(C_\alpha)$ est (n° 197)

$$(X - x) f'_x + (Y - y) f'_y = 0.$$

La condition d'orthogonalité de ces deux tangentes est

$$\frac{dx}{f'_x} = \frac{dy}{f'_y} \text{ [1]}. \tag{2}$$

Les fonctions inconnues $x$ et $y$ sont définies par le système (1), (2).

Si l'on élimine $\alpha$ entre ces deux équations, on obtient une équation différentielle du premier ordre en $x$, $y$, dont les courbes intégrales (t. I, n° 186) constituent les courbes (Γ) cherchées. On sait que ces courbes forment une famille à un paramètre. On les appelle *les trajectoires orthogonales* des courbes (C). Ces dernières sont, elles-mêmes, les trajectoires orthogonales des courbes (Γ). Les deux familles réunies constituent *un réseau orthogonal*.

Au lieu d'éliminer $\alpha$ entre les équations (1) et (2), on peut éliminer $y$, par exemple, en tirant cette coordonnée de (1) et portant dans (2). On obtient une équation différentielle du premier ordre en $x$ et $\alpha$. En l'intégrant, on a $x$ en fonction de $\alpha$ et d'une constante arbitraire; portant dans (1), on a ensuite $y$. On obtient ainsi les équations paramétriques générales des courbes (Γ).

351. Il arrive quelquefois que les courbes (C) sont définies comme courbes intégrales d'une équation différentielle du premier ordre

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{3}$$

On peut, dans ce cas, écrire immédiatement l'équation différentielle des courbes (Γ). En effet, soient $x$, $y$ les coordonnées d'un point quelconque M d'une de ces courbes. Le coefficient angulaire de la tangente Mθ, en ce point, à cette courbe est $\frac{dy}{dx}$. Celui de la tangente MT à la courbe (C) qui passe par M est donc $m = -\frac{dx}{dy}$. Or, la courbe (C) vérifiant l'équation (3), on a

$$F(x, y, m) = 0$$

---

[1] Cette équation s'obtient pratiquement, en différentiant totalement l'équation (1) par rapport à $x$ et à $y$, puis en changeant $dx$ et $dy$ en $dy$ et $-dx$.

et, par conséquent,

$$(4)\qquad F\left(x, y, -\frac{dx}{dy}\right) = 0.$$

L'équation (4) est l'équation différentielle des courbes (Γ). On voit qu'elle se déduit de l'équation (3) par une règle très simple et, d'ailleurs, toute intuitive [*cf.* note (1) de la page précédente].

352. Supposons maintenant que les courbes (C) soient définies par des équations paramétriques :

$$(5)\qquad x = f(t, \alpha), \qquad y = g(t, \alpha).$$

Une courbe (Γ) déterminée coupe orthogonalement la courbe $(C_\alpha)$ en un point M, dont le $t$ est une certaine fonction de $\alpha$, qu'il s'agit de déterminer. Les paramètres directeurs de la tangente MΘ à (Γ) sont, en tout cas,

$$\frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial \alpha}d\alpha, \qquad \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial \alpha}d\alpha,$$

étant bien entendu qu'on doit, dans ces expressions, remplacer $t$ par la fonction précédente et $dt$ par sa différentielle. D'autre part, les paramètres directeurs de la tangente MT à $(C_\alpha)$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial g}{\partial t}.$$

La condition d'orthogonalité s'écrit, dès lors,

$$(6)\qquad \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2\right] dt + \left[\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right] d\alpha = 0.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre en $t$, $\alpha$, d'où l'on tirera $t$ en fonction de $\alpha$ et d'une constante arbitraire. En portant dans (5), on aura les équations paramétriques générales des courbes (Γ).

On peut d'ailleurs tout aussi bien, si cela semble plus commode, calculer $\alpha$ en fonction de $t$ ou bien $\alpha$ et $t$ en fonction d'un troisième paramètre (t. I, n° 189). En portant dans (5), on obtient toujours les équations paramétriques des courbes (Γ).

353. Cas divers d'intégration. — Voici quelques types de familles de

courbes, pour lesquels on peut toujours, *a priori*, résoudre, par quadratures, le problème des trajectoires orthogonales.

I. *Les courbes* (C) *se déduisent de l'une d'elles par des translations rectilignes de même direction.* — Prenons, par exemple, $Ox$ parallèle à cette direction. La famille des courbes (C) demeurant invariante pour toute translation parallèle à $Ox$ (¹), il en est nécessairement de même pour la famille des courbes (Γ). Dès lors, celles-ci ont certainement une équation générale de la forme

$$x = \varphi(y) + \text{const.}, \tag{7}$$

à laquelle correspond l'équation différentielle

$$dx = \varphi'(y)\,dy. \tag{8}$$

*Nous sommes donc assurés à l'avance que l'équation différentielle de nos trajectoires est à variables séparées.*

C'est ce qu'il est aisé de vérifier *a posteriori*. L'équation générale des courbes (C) est de la forme

$$x = f(y) + \text{const.}, \tag{9}$$

à laquelle correspond l'équation différentielle

$$dx = f'(y)\,dy. \tag{10}$$

Par la règle du n° 351, on en déduit immédiatement l'équation différentielle des trajectoires orthogonales

$$dy = -f'(y)\,dx$$

ou

$$dx = -\frac{dy}{f'(y)}. \tag{11}$$

Nos prévisions sont bien réalisées et l'équation générale des courbes (Γ) est

$$x = -\int \frac{dy}{f'(y)} + \text{const.} \tag{12}$$

II. *Les courbes* (C) *se déduisent de l'une d'elles par des rotations autour d'un point fixe* O. — En raisonnant comme tout à l'heure, on voit que les courbes (Γ) jouissent de la même propriété. Ceci se traduit analytiquement en coordonnées polaires, de pôle O, par une équation générale de la forme

$$\omega = \varphi(\rho) + \text{const.},$$

---

(¹) On dit qu'*elle appartient au groupe des translations parallèles à* $Ox$.

à laquelle correspond l'équation différentielle

$$d\omega = \varphi'(\rho)\, d\rho.$$

*Les variables seront donc encore séparées, si l'on opère en coordonnées polaires.*

Effectivement, soit

$$\omega = f(\rho) + \text{const.} \tag{13}$$

l'équation générale des courbes (C). La tangente à l'une d'elles, en un de ses points M, se déduit du rayon vecteur OM par une rotation de l'angle V défini par la formule (n° 252)

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho} = \rho f'(\rho). \tag{14}$$

La tangente à la courbe (Γ) qui passe par M est pareillement déterminée par un angle V', défini par

$$\operatorname{tang} V' = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho}, \tag{15}$$

la dérivée $\frac{d\omega}{d\rho}$ se rapportant cette fois à la courbe (Γ). Or, on doit avoir $V' = V + \frac{\pi}{2}$, donc

$$\operatorname{tang} V' = -\frac{1}{\operatorname{tang} V} = -\frac{1}{\rho f'(\rho)}.$$

L'équation différentielle des courbes (Γ) est finalement

$$\frac{\rho\, d\omega}{d\rho} = -\frac{1}{\rho f'(\rho)}$$

ou

$$d\omega = -\frac{d\rho}{\rho^2 f'(\rho)},$$

qui est bien du type prévu et donne, par intégration,

$$\omega = -\int \frac{d\rho}{\rho^2 f'(\rho)} + \text{const.}$$

III. *Les courbes* (C) *se déduisent de l'une d'elles par des homothéties de centre fixe* O. — En répétant toujours le même raisonnement, on voit que les courbes (Γ) jouissent de la même propriété, ce qui se traduit analytiquement, en coordonnées polaires, par une équation de la forme

$$C\rho = \varphi(\omega) \qquad (C = \text{const.}),$$

à laquelle correspond l'équation différentielle

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\varphi'(\omega)}{\varphi(\omega)}\, d\omega,$$

qui est encore à variables séparées.

Effectivement, soit

(16) $$K\rho = f(\omega) \qquad (K = \text{const.})$$

l'équation générale des courbes (C). En adoptant les notations du cas précédent, on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{f(\omega)}{f'(\omega)}.$$

D'où l'on déduit l'équation différentielle des courbes (Γ)

$$\frac{\rho\, d\omega}{d\rho} = -\frac{f'(\omega)}{f(\omega)}$$

ou

(17) $$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{f(\omega)\, d\omega}{f'(\omega)};$$

d'où

$$C\rho = e^{-\int \frac{f(\omega)\, d\omega}{f'(\omega)}} \qquad (C = \text{const.}).$$

On pourrait aussi opérer en coordonnées cartésiennes, d'origine O. On obtiendrait une équation homogène en $x$, $y$, qui s'intègre, comme on sait, par quadrature (t. I, n° 190).

354. Trajectoires orthogonales d'une famille de cercles. — Soient $\alpha$, $\beta$, R les coordonnées du centre et le rayon d'un quelconque de nos cercles, ces trois quantités étant des fonctions connues d'un même paramètre $t$. Écrivons les équations paramétriques de ce cercle :

(18) $$x = \alpha + R\cos\varphi, \qquad y = \beta + R\sin\varphi.$$

Appliquant la méthode du n° 352, nous pouvons écrire immédiatement l'équation différentielle en $\varphi$, $t$ des trajectoires orthogonales :

$$\frac{dx}{\cos\varphi} = \frac{dy}{\sin\varphi}$$

ou

$$\frac{d\alpha - R\sin\varphi\, d\varphi + dR\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{d\beta + R\cos\varphi\, d\varphi + dR\sin\varphi}{\sin\varphi}$$

ou, en retranchant $dR$ des deux membres et chassant les dénominateurs,

$$d\alpha\sin\varphi - d\beta\cos\varphi = R\, d\varphi$$

ou, enfin,

$$(19) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\alpha' \sin\varphi - \beta' \cos\varphi}{R}.$$

Or, cette équation se ramène à une équation de Riccati, en posan $\tang\frac{\varphi}{2} = \theta$ (t. I, n° 326). On peut, dès lors, en conclure, d'après les propriétés classiques de cette équation, que *la détermination de nos trajectoires se ramène à deux, une ou zéro quadratures, suivant qu'on connaît à l'avance une, deux ou trois de ces trajectoires.* Par exemple, si les cercles (C) sont orthogonaux à un cercle fixe ($\Gamma_0$), celui-ci compte pour deux trajectoires, puisqu'il est orthogonal à chaque cercle (C) en deux points, ce qui fait connaître deux solutions particulières de l'équation (19). La détermination des autres trajectoires n'exige plus qu'une quadrature. Ceci s'applique, en particulier, lorsque les cercles (C) ont leurs centres en ligne droite.

Énonçons enfin la proposition suivante, qui résulte des n^os 324 (t. I) et de l'exercice proposé n° 2 du Chapitre XXXVII :

*Si l'on considère quatre trajectoires particulières* ($\Gamma_1$), ($\Gamma_2$), ($\Gamma_3$), ($\Gamma_4$), *elles coupent orthogonalement chaque cercle* (C) *en quatre points* $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, *dont le rapport anharmonique demeure constant, quand* (C) *varie.*

355. Équation intrinsèque d'une courbe plane. — Passons maintenant à un autre type de problème, qui est le suivant :

*Déterminer une courbe plane, sachant que le rayon de courbure* R *en chacun de ses points est lié à l'abscisse curviligne s de ce point par une équation donnée*

$$(20) \qquad R = f(s).$$

En adoptant les notations du Chapitre XXI, nous avons

$$\frac{ds}{d\alpha} = f(s).$$

Cette équation s'intègre immédiatement et donne

$$(21) \qquad \alpha = \int \frac{ds}{f(s)}.$$

Le second membre renferme implicitement une constante arbitraire additive. Mais, *on peut la négliger,* en remarquant que son introduction équivaut à augmenter toutes les valeurs de $\alpha$ d'une même

quantité, ce qui revient à faire tourner les axes d'un certain angle, variant avec la constante.

Nous connaissons maintenant $\alpha$ en fonction de $s$ ou, si l'on veut, $s$ en fonction de $\alpha$. Nous avons ensuite

$$dx = ds \cos\alpha, \qquad dy = ds \sin\alpha;$$

d'où

$$(22) \qquad x = \int \cos\alpha \, ds, \qquad y = \int \sin\alpha \, ds.$$

Ces deux nouvelles quadratures comportent encore deux constantes arbitraires, mais *qui peuvent encore être supprimées*, par une translation convenable des axes. Cette translation est, d'ailleurs, la plus générale dans le plan, si l'on donne aux deux constantes toutes les valeurs possibles.

En définitive, les équations paramétriques d'une des courbes cherchées sont données par les formules (22), où l'on néglige les constantes d'intégration; $\alpha$ étant donné, en fonction de $s$, par la formule (21), où l'on néglige également la constante [1].

Toutes les autres courbes se déduisent de celle-là par une translation quelconque, suivie d'une rotation quelconque, autrement dit par un déplacement quelconque dans le plan. Il équivaut de dire que toutes les courbes qui satisfont à l'équation (20) sont toutes les courbes du plan égales à l'une d'elles.

On pouvait, du reste, prévoir qu'ayant une des courbes cherchées, on en aurait une infinité d'autres par des déplacements dans le plan, car un tel déplacement n'influe ni sur R, ni sur $s$. Nous venons de prouver qu'on les obtient toutes par ce procédé.

On peut donc dire que *l'équation* (20) *définit une courbe unique, si l'on fait abstraction de sa position dans le plan*, c'est-à-dire si l'on ne tient compte que de sa forme et de sa grandeur. Pour cette raison, on l'appelle l'*équation intrinsèque de cette courbe* [2].

---

(1) Au lieu de calculer $\alpha$, $x$, $y$ en fonction de $s$, on peut, si cela parait plus commode, calculer $s$, $x$, $y$ en fonction de $\alpha$.

(2) Le lecteur a pu se rendre compte que la recherche d'une courbe définie par son équation intrinsèque est un problème très simple, quand on le traite comme nous l'avons fait, conformément à la méthode générale exposée au n° 348. Il serait, au contraire, impraticable, si l'on s'imposait à l'avance de trouver la courbe sous la forme $y = f(x)$, en utilisant la formule (13) du n° 313. Ceci s'explique, du reste, par la manière compliquée dont s'introduiraient les trois constantes d'intégration.

356. Problèmes divers. — Voici d'autres problèmes, moins classiques que les précédents, mais dont on rencontre assez fréquemment des exemples, pour que nous jugions utile de les traiter rapidement.

Problème I. — *Déterminer les courbes dont le rayon de courbure est une fonction donnée de la normale limitée à une droite fixe.*

Prenons la droite fixe pour axe des $x$. La normale en M rencontre cet axe au point N. Posons $\lambda = \overline{MN}$. Par hypothèse, on a

$$R = f(\lambda), \tag{23}$$

$f(\lambda)$ désignant une fonction donnée.

Écrivons les différentes relations qui existent entre $x$, $y$, R, $\lambda$ et les autres quantités qui vont s'introduire. Nous avons d'abord (n° 311)

$$dx = R\cos\alpha\, d\alpha, \qquad dy = R\sin\alpha\, d\alpha. \tag{24}$$

Écrivons maintenant que l'ordonnée $y + \lambda\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ du point N est nulle; nous avons

$$y + \lambda\cos\alpha = 0. \tag{25}$$

Les quatre équations (23), (24), (25) entre les cinq variables R, $\lambda$, $x$, $y$, $\alpha$ déterminent entièrement le problème. Il s'agit d'éliminer trois de ces cinq variables. La variable $x$ est toute éliminée, puisqu'elle figure seulement dans la première équation (24). Quant à $y$, son élimination est immédiate. En différentiant (25), nous avons

$$R\sin\alpha\, d\alpha + d\lambda\cos\alpha - \lambda\sin\alpha\, d\alpha = 0$$

ou

$$d\lambda\cos\alpha = \sin\alpha\, d\alpha[\lambda - f(\lambda)]$$

ou

$$\tang\alpha\, d\alpha = \frac{d\lambda}{\lambda - f(\lambda)}. \tag{26}$$

Cette équation est à variables séparées et donne

$$\log|\cos\alpha| = \int\frac{d\lambda}{f(\lambda) - \lambda} = \log|\varphi(\lambda)| + \log C, \tag{27}$$

$\varphi(\lambda)$ désignant une fonction déterminée et C une constante arbitraire positive. On tire de là

$$\cos\alpha = C\varphi(\lambda). \tag{28}$$

Portant dans (25), nous avons ensuite

$$y = -C\lambda\varphi(\lambda). \tag{29}$$

Enfin, la première équation (24) nous donne

$$dx = Cf(\lambda)\varphi(\lambda)\,d\alpha = \frac{C^2 f(\lambda)\varphi(\lambda)\varphi'(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{1 - C^2\varphi^2(\lambda)}};$$

d'où

(30) $$x = C^2 \int \frac{f(\lambda)\varphi(\lambda)\varphi'(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{1 - C^2\varphi^2(\lambda)}},$$

à une constante additive près, dont la suppression revient à négliger une translation parallèle à $Ox$. Les équations (29) et (30) constituent les équations paramétriques des courbes cherchées. Elles renferment la constante arbitraire C.

*Remarque.* — Au lieu de calculer $x$ et $y$ en fonction de $\lambda$, on peut, si cela semble plus simple, les calculer en fonction de $\alpha$. A cet effet, on calcule $\lambda$ en fonction de $\alpha$, au moyen de (28). En portant dans (25), on a $y$. En portant dans (23), puis (24), on a $x$, par une quadrature [1].

357. Problème II. — *Déterminer les courbes dont le rayon de courbure est une fonction donnée de la normale, limitée à la sous-normale polaire.*

Soient $r$, $\theta$ les coordonnées polaires d'un point quelconque M d'une des courbes cherchées. La normale en ce point rencontre la perpendiculaire en O à OM au point N. Posons $\lambda = \overline{MN}$. Nous avons, par hypothèse,

(31) $$R = f(\lambda).$$

D'autre part (n° 321), on a

(32) $$R = \frac{ds}{d\theta + dV},$$

(33) $$dr = ds\cos V, \qquad r\,d\theta = ds\sin V.$$

Enfin, si l'on observe que la normale MN est orientée par l'angle polaire $\theta + V + \frac{\pi}{2}$, on a, en projetant le vecteur $\overrightarrow{MN}$ sur la demi-droite d'angle polaire $\theta$,

$$-r = \lambda\cos\left(V + \frac{\pi}{2}\right) = -\lambda\sin V$$

ou

(34) $$r = \lambda\sin V.$$

---

[1] Si l'on cherche la courbe sous la forme $y = f(x)$, en utilisant la formule (13) du n° 313, on arrive à une équation différentielle du second ordre, dont l'intégration est loin d'être évidente, du moins tant que la fonction $f(\lambda)$ est quelconque.

Il s'agit maintenant d'éliminer quatre des six variables R, $\lambda$, $s$, $\theta$, V, $r$ entre les cinq équations (31), (32), (33), (34).

L'élimination de R, $s$, $\theta$ est immédiate. En effet, de (33), on tire

$$(35) \qquad ds = \frac{dr}{\cos V}, \qquad d\theta = \frac{dr}{r}\tang V.$$

Portant dans (32) et remplaçant R par $f(\lambda)$, il vient

$$(36) \qquad f(\lambda)\left(\frac{dr}{r}\tang V + dV\right) = \frac{dr}{\cos V}.$$

Éliminons enfin $r$ entre (34) et (36) :

$$f(\lambda)\left[\frac{d\lambda}{\lambda}\tang V + 2\,dV\right] = d\lambda\tang V + \lambda\,dV$$

ou

$$d\lambda\tang V\left[\frac{f(\lambda)}{\lambda} - 1\right] = dV[\lambda - 2f(\lambda)]$$

ou

$$(37) \qquad \cot V\,dV = \frac{f(\lambda) - \lambda}{\lambda[\lambda - 2f(\lambda)]}d\lambda.$$

Cette équation est à variables séparées et donne

$$\log|\sin V| = \int \frac{f(\lambda) - \lambda}{\lambda[\lambda - 2f(\lambda)]}d\lambda$$

d'où l'on tire une équation de la forme

$$(38) \qquad \sin V = C\varphi(\lambda) \qquad (C = \text{const.}).$$

Portant dans (34), on a

$$(39) \qquad r = C\lambda\varphi(\lambda).$$

La deuxième équation (35) donne ensuite

$$(40) \qquad d\theta = d\lambda\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}\right]\frac{C\varphi(\lambda)}{\sqrt{1 - C^2\varphi^2(\lambda)}}.$$

D'où l'on déduit $\theta$ par une quadrature.

Au lieu de calculer $r$ et $\theta$ en fonction de $\lambda$, on peut, si cela paraît plus commode, les calculer en fonction de V. De toutes façons, on obtient les équations polaires paramétriques de la courbe cherchée. Elles renferment l'unique constante arbitraire C, si l'on néglige celle qui s'introduit dans la quadrature (40) et qui équivaut à une rotation autour du pôle.

358. Problème III. — *Déterminer une courbe, sachant que le rayon de*

*courbure en* M *est une fonction donnée de la distance* OM.

On a

$$R = f(r), \tag{41}$$

équation à laquelle on doit ajouter (32) et (33).

Nous allons éliminer R, $s$, $\theta$, en nous servant des équations (35). Nous avons

$$f(r)\left(\frac{dr}{r}\operatorname{tang}V + dV\right) = \frac{dr}{\cos V}$$

ou

$$\cos V\frac{dV}{dr} + \frac{\sin V}{r} = \frac{1}{f(r)}. \tag{42}$$

Cette équation est linéaire en $\sin V$ et admet pour integrale générale

$$\sin V = \frac{\varphi(r)}{r} + \frac{C}{r}, \tag{43}$$

en désignant par C une constante arbitraire et par $\varphi(r)$ l'intégrale $\int \frac{r\,dr}{f(r)}$.

Ayant $r$ en fonction de V ou V en fonction de $r$, on a $\theta$ par la quadrature

$$\theta = \int \frac{\operatorname{tang}V}{r}\,dr. \tag{44}$$

Problème IV. — *Déterminer une courbe, sachant que le rayon de courbure en* M *est une fonction donnée de la distance du point* O *à la tangente en* M.

Si $(\varphi, p)$ sont les coordonnées normales de cette tangente, l'équation du problème s'écrit immédiatement (n° 320)

$$p'' + p = f(p). \tag{45}$$

Cette équation s'intègre par quadratures (t. I, n° 195, II).

Problème V. — *Déterminer une courbe, sachant que le rayon de courbure en* M *est une fonction donnée de la distance de* M *à une droite fixe.*

On a, par exemple,

$$R = f(x). \tag{46}$$

D'où (n° 311)

$$dx = f(x)\cos\alpha\,d\alpha. \tag{47}$$

Cette équation à variables séparées donne $x$ en fonction de $\alpha$ ou bien $\alpha$ en fonction de $x$. On a ensuite $y$ par la quadrature

$$y = \int \operatorname{tang}\alpha\,dx. \tag{48}$$

359. Problèmes sur les courbes gauches. — On peut aussi se poser des problèmes analogues aux précédents pour la détermination de certaines courbes gauches. Mais, on peut, dans ce cas, imposer à la courbe soit une, soit deux conditions. Une courbe gauche exige, en effet, pour sa détermination, la connaissance de deux fonctions d'une variable. Si l'on se donne une seule condition, il subsiste une fonction arbitraire. Si l'on s'en donne deux, la courbe ne dépend plus que d'un certain nombre de constantes arbitraires.

Des exemples seront indiqués dans les Exercices (*voir* aussi l'exercice résolu n° 4 du Chapitre XIX). Contentons-nous ici de traiter le suivant.

Problème. — *Déterminer une courbe, sachant que la courbure ou la torsion sont nulles en chacun de ses points.*

1° *La courbure est nulle.* — L'arc de la première indicatrice est nul (n° 322). Si donc on laisse de côté certaines solutions imaginaires, cette indicatrice se réduit à un point. Les tangentes à la courbe sont donc parallèles à une droite fixe. Si l'on prend cette droite pour axe des $z$, on a

$$x' = 0, \qquad y' = 0;$$

d'où

$$x = \text{const.}, \qquad y = \text{const.}$$

La courbe cherchée est une droite.

*La droite est donc la seule courbe réelle à courbure nulle.*

2° *La torsion est nulle.* — Cette fois, c'est la seconde indicatrice qui se réduit à un point. La binormale a une direction fixe, par exemple, la direction de $Oz$.

La tangente lui est perpendiculaire; on a donc $z' = 0$; d'où $z = \text{const.}$ La courbe est plane, dans un plan $(\pi)$, parallèle à $xOy$. Quelle qu'elle soit, du reste, dans ce plan, sa torsion est bien nulle, car, son plan osculateur en chaque point coïncidant avec $(\pi)$, la binormale est partout parallèle à $Oz$ et la seconde indicatrice est réduite à un point.

*Les seules courbes de torsion nulles sont donc les courbes planes.*

On voit, sur cet exemple, que, dans les problèmes de Géométrie infinitésimale, il ne faut jamais négliger les considérations géométriques, qui peuvent amener parfois bien des simplifications.

# CHAPITRE XXV.

## SURFACES DE RÉVOLUTION; HÉLICOÏDES.

360. Surfaces de révolution. — On appelle *surface de révolution toute surface engendrée par la rotation d'une courbe quelconque* (C) *autour d'un axe fixe* A.

La courbe (C) est appelée *courbe génératrice*.

Chacun de ses points M décrit un cercle P, dont le centre I se trouve sur A et dont le plan est perpendiculaire à A. Ce cercle est le *parallèle* du point M.

On appelle *plans méridiens* les plans qui passent par l'axe et *courbes méridiennes* ou simplement *méridiennes* les sections de la surface par ces plans.

Une surface de révolution donnée peut évidemment être engendrée d'une infinité de manières par la rotation d'une courbe; on peut, en effet, prendre comme génératrice n'importe quelle courbe tracée sur la surface, pourvu qu'elle rencontre tous les parallèles [1]; en particulier, on peut toujours prendre la méridienne.

Il est quelquefois commode de *considérer la surface comme engendrée par ses parallèles*, c'est-à-dire par un cercle dont le centre décrit la droite fixe A, dont le plan est constamment perpendiculaire à cette droite et qui est assujetti à rencontrer la courbe génératrice (C). En particulier, c'est en se plaçant à ce point de vue qu'il est le plus facile d'écrire l'équation d'une surface de révolution.

Soit une surface de révolution définie par deux points $A_1$ et $A_2$ de son axe et par sa courbe génératrice (C). Tout parallèle peut être considéré comme l'intersection de deux sphères $S_1$ et $S_2$ ayant leurs centres respectifs en $A_1$ et $A_2$. Ses équations sont donc de la forme

$$(1) \qquad S_1 = \alpha, \qquad S_2 = \beta,$$

[1] Si elle ne rencontre pas tous les parallèles, elle engendre seulement une partie de la surface.

où $S_1$ et $S_2$ sont les premiers membres des équations de deux sphères particulières (d'ailleurs quelconques, par exemple de rayon nul) ayant pour centres $A_1$ et $A_2$ et où $\alpha$, $\beta$ désignent deux constantes, dont la variation arbitraire donnerait tous les cercles admettant pour axe $A_1A_2$. Pour que le cercle (1) soit un parallèle de la surface proposée, il faut et il suffit qu'il rencontre (C).

En exprimant cette condition (nº 54), on obtient une relation entre les paramètres $\alpha$ et $\beta$, soit

$$f(\alpha, \beta) = 0. \tag{2}$$

L'équation de la surface s'obtient, dès lors (nº 62), en éliminant $\alpha$ et $\beta$ entre (1) et (2), ce qui donne

$$f(S_1, S_2) = 0. \tag{3}$$

Telle est *la forme générale et caractéristique* [1] *sous laquelle peut se mettre l'équation de n'importe quelle surface de révolution.*

On peut prendre le point $A_2$, par exemple, à l'infini. Ceci revient à remplacer la sphère $S_2$ par un plan P perpendiculaire à l'axe. L'équation de la surface s'écrit alors

$$f(S_1, P) = 0. \tag{4}$$

C'est ainsi que *toute surface de révolution d'axe $Oz$ a une équation de la forme*

$$f(x^2 + y^2 + z^2, z) = 0$$

ou, ce qui revient au même [2],

$$g(x^2 + y^2, z) = 0 \tag{5}$$

Dans ce dernier cas, la méridienne du plan des $zx$ a pour équation, dans ce plan,

$$g(x^2, z) = 0. \tag{6}$$

Réciproquement, si l'on se donne cette méridienne par une équa-

---

[1] Cette forme est caractéristique, car, réciproquement, toute équation telle que (3) peut toujours être obtenue par une élimination analogue à la précédente et, par conséquent, la surface peut être engendrée par un cercle admettant pour axe la droite fixe $A_1A_2$.

[2] La forme (5) revient à considérer chaque parallèle comme l'intersection de son plan et de son cylindre projetant sur $xOy$.

tion telle que (6), on peut écrire immédiatement l'équation de la surface, en remplaçant simplement $x^2$ par $x^2+y^2$.

Plus généralement, supposons que la courbe génératrice soit définie par deux équations en coordonnées semi-polaires $(r, \theta, z)$, dont l'une soit ([1])

$$(7) \qquad g(r^2, z) = 0.$$

En y remplaçant $r^2$ par $x^2+y^2$, on a l'équation de la surface.

On peut d'ailleurs, si l'on veut, regarder l'équation (7) comme l'équation de la surface en coordonnées semi-polaires, la caractéristique des surfaces de révolution, dans ce système de coordonnées, étant que *leur équation est indépendante de* $\theta$ ([2]).

Si, de (7) on tire $z = f(r)$, les équations paramétriques de la surface peuvent s'écrire

$$(8) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = f(r).$$

Ce sont ordinairement les plus avantageuses pour l'étude des propriétés spéciales des surfaces de révolution.

Mais, on peut aussi, plus généralement, exprimer $r$ et $z$ en fonction d'un paramètre $t$ quelconque; on a alors des équations de la forme

$$(9) \qquad x = f(t)\cos\theta, \qquad y = f(t)\sin\theta, \qquad z = g(t).$$

C'est ainsi qu'il est quelquefois commode de prendre, pour variable $t$, l'arc de méridienne.

**361.** Propriété fondamentale. — La propriété fondamentale et caractéristique des surfaces de révolution est qu'*elles glissent sur elles-mêmes quand on les fait tourner autour de leur axe.*

Une telle rotation a, en effet, pour unique résultat une permutation des génératrices ou, si l'on veut, un glissement de chaque parallèle sur lui-même, ce qui ne change évidemment pas la surface.

---

(1) Si les deux équations renferment $\theta$, on l'élimine et l'on obtient une équation de la forme (7).

(2) A ce point de vue, elles sont analogues aux cylindres (n° 47). D'ailleurs, les cylindres peuvent être considérés comme des surfaces de révolution, dont l'axe est à l'infini dans le plan d'une section droite.

Réciproquement, si une surface ne cesse pas de coïncider avec elle-même dans une rotation continue autour d'un axe fixe A, elle coïncide nécessairement avec la surface de révolution engendrée, dans ce mouvement, par une quelconque de ses courbes.

On peut résumer ceci en disant que *les surfaces de révolution sont les seules qui soient invariantes pour une rotation continue autour d'un axe fixe.*

De cette invariance, résulte le principe général suivant :

Quand on a trouvé une propriété pour un élément E quelconque (point, tangente, plan tangent, normale, ligne tracée sur la surface, etc.) d'une surface de révolution (S), *on a la même propriété pour tous les éléments* E′ *qui se déduisent du premier par rotation autour de l'axe.*

En effet, si l'on fait tourner toute la figure (S, E) autour de A, de manière à amener E en E′, la propriété ne cesse pas d'avoir lieu. Or, dans ce mouvement, S demeure invariable. Dès lors, la propriété dans la nouvelle position peut être considérée comme s'appliquant à E′ et à S. C. Q. F. D.

362. Plans tangents; normales. — Le plan tangent en un point M contient la tangente MR au parallèle passant par ce point, tangente qui est manifestement perpendiculaire au plan méridien (A, M). De là résulte la proposition suivante :

Théorème. — *Le plan tangent en un point quelconque d'une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien qui passe par ce point.*

Le plan tangent en M contient aussi la tangente MT à la génératrice (C). C'est donc le plan RMT.

Cette construction du plan tangent est en défaut lorsque MT coïncide avec MR, c'est-à-dire lorsque la génératrice coupe normalement le plan méridien. Nous verrons, au n° 363, par quoi il faut alors la remplacer.

*Si une courbe* (C′) *ou une surface* (S′) *est tangente à* (S), *il en est de même de toutes les courbes ou surfaces qui s'en déduisent par rotation autour de* A. Cela résulte, en effet, du principe du n° 361.

Nous pouvons prendre, en particulier, pour surface (S′) la surface

de révolution engendrée par (C'), car cette surface est tangente à (S), comme ayant avec elle deux tangentes communes, à savoir la tangente au parallèle (P) et la tangente à (C') ([1]). Comme, dans la rotation, cette surface demeure invariable, nous voyons qu'*elle est circonscrite à* (S) *le long du parallèle* (P).

Si nous prenons comme courbe (C') la tangente MT à la courbe méridienne, nous obtenons *le cône de révolution circonscrit* et cela nous montre en passant, conformément d'ailleurs au principe du n° 361, que *les plans tangents en tous les points d'un parallèle rencontrent l'axe au même point* T, sommet du cône ci-dessus.

Si nous prenons comme courbe (C') le cercle tangent en M à la méridienne, et qui a son centre N sur l'axe, nous obtenons *la sphère inscrite* et nous apprenons, toujours d'accord avec le principe du n° 361, que *les normales en tous les points d'un parallèle rencontrent l'axe au même point* N, *centre de la sphère inscrite.*

On peut démontrer, à ce propos, la réciproque suivante : *Toute surface dont les normales rencontrent une droite donnée* A *est de révolution autour de cette droite.*

En effet, coupons-là par un plan H perpendiculaire à A. Soit M un point de l'intersection. La tangente MT à cette courbe est perpendiculaire à la normale MN et à A ; elle est donc perpendiculaire au plan de ces deux droites. Mais alors, la normale M$n$ à la courbe dans son plan est située, à son tour, dans le plan (M, A) et, par suite, passe par le pied $n$ de A sur H. La section plane considérée est une courbe dont toutes les normales passent par le point fixe $n$; c'est donc un cercle de centre $n$ (n° 317). Toutes les sections par des plans perpendiculaires à A étant des cercles ayant leur centre sur A, la surface est de révolution autour de A (n° 360).

363. Centres de courbure. — *Chaque plan méridien est* un plan de symétrie de tous les parallèles, donc *un plan de symétrie de la surface.* Il s'ensuit que c'est aussi un plan de symétrie de l'indicatrice d'Euler (n° 336) relative à chaque point M de la méridienne $\mu$ correspondante. Par conséquent, *la tangente* $MT_1$ *à celle-ci est une tangente principale et le centre de courbure* $C_1$ *de* $\mu$ *en* M *est un centre de courbure principale.*

*L'autre tangente principale* $MT_2$ est perpendiculaire à $MT_1$ : *c'est donc la tangente au parallèle* (P). L'axe de courbure de ce paral-

([1]) On fait abstraction du cas où (C') serait normale au plan méridien du point de contact.

lèle étant A, *le deuxième centre de courbure principale* $C_2$ *se trouve sur cette droite*, en vertu du théorème de Meusnier (n° 334); *c'est le centre de la sphère inscrite.*

Si nous considérons une courbe (G) tracée sur la surface et tangente en M à $MT_2$, son axe de courbure doit passer par $C_2$. Ceci nous permet de trouver le plan tangent, dans le cas exceptionnel laissé de côté au n° 362. Il suffit, en effet, de prendre l'intersection $C_2$ de A avec l'axe de courbure de (G) en M, puis de mener, par M, le plan perpendiculaire à $C_2M$.

364. Lignes de courbure; lignes asymptotiques. — Les lignes de courbure (n° 346) sont évidemment les méridiennes et les parallèles, puisque les tangentes à ces courbes sont les tangentes principales.

Pour les lignes asymptotiques (n° 345), la solution est moins évidente. On peut toutefois remarquer, *a priori*, que, lorsqu'on en a une, on en a toute une famille en faisant tourner la première autour de A, ainsi qu'il résulte du principe du n° 361. Dès lors, l'équation polaire des projections des lignes de cette famille sur $xOy$ (on prend les axes du n° 360) est de la forme

$$\theta = F(r) + \text{const.}; \tag{10}$$

leur équation différentielle est de la forme

$$d\theta = G(r)\,dr; \tag{11}$$

elle est à variables séparées. On peut donc prévoir que *les lignes asymptotiques d'une surface de révolution peuvent se calculer par une quadrature* (¹).

C'est ce qu'il est aisé de vérifier.

Partons des équations (8). Nous avons

$$\left\{\begin{aligned} dx &= dr\cos\theta - r\sin\theta\,d\theta,\\ dy &= dr\sin\theta + r\cos\theta\,d\theta,\\ dz &= f'(r)\,dr.\end{aligned}\right. \tag{12}$$

En écrivant la condition

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$

on trouve ensuite que l'on peut prendre comme paramètres directeurs de la normale

$$a = \cos\theta, \qquad b = \sin\theta, \qquad c = -\frac{1}{f'(r)}. \tag{13}$$

---

(¹) Quand on a une famille, on a l'autre par symétrie par rapport à un plan méridien quelconque.

On comparera le raisonnement ci-dessus à celui du n° 353 (II).

En appliquant ensuite l'équation (32) du n° 345, on obtient l'équation des lignes asymptotiques

$$d\theta^2 = -dr^2 \frac{f''(r)}{rf'(r)}$$

ou

(14) $$d\theta = \pm dr \sqrt{-\frac{f''(r)}{rf'(r)}},$$

Elle est bien de la forme (11) prévue.

365. Élément linéaire; angle d'une courbe avec la méridienne. — Élevant au carré les expressions (12) et ajoutant, nous obtenons le carré de l'*élément linéaire* ou distance $ds$ de deux points de la surface infiniment voisins

(15) $$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2 = r^2\,d\theta^2 + d\sigma^2,$$

en appelant $d\sigma$ l'élément linéaire de la méridienne [*cf.* t. I, n° 173, formule (7)].

Cette formule a été établie géométriquement au Tome I (*loc. cit.*). Rappelons brièvement la démonstration.

Considérons les points infiniment voisins M et M'. Projetons orthogonalement M' en $M_1$ sur la méridienne et en $M_2$ sur le parallèle. Le triangle rectangle infinitésimal $MM_1M'$ nous donne

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MM_1}^2 + \overline{M_1M'}^2.$$

Or, $MM_1 = d\sigma$ et $M_1M' = MM_2 = r\,d\theta$; d'où la formule (15).

Appelons V l'angle de $MM_1$ avec MM'; nous avons

(16) $$d\sigma = ds\cos V, \qquad r\,d\theta = ds\sin V,$$

(17) $$\tang V = \frac{r\,d\theta}{d\sigma} = \frac{r\,d\theta}{\sqrt{dr^2 + dz^2}}.$$

Étant donnée une courbe quelconque tracée sur la surface et définie, par exemple, par l'équation polaire de sa projection sur $xOy$, les formules (15), (16) et (17) permettent de calculer *sa longueur, ainsi que l'angle qu'elle fait en chaque point avec la méridienne.*

Si l'on assujettit cet angle à rester constant, on obtient l'équation différentielle des *loxodromies*

(18) $$d\theta = \tang V \frac{\sqrt{1 + f'^2(r)}}{r} dr.$$

Elle est à variables séparées, ce qui aurait pu se prévoir en raisonnant comme au n° 364.

366. Hélicoïdes. — On appelle *surface hélicoïde* ou *simplement hélicoïde*

*toute surface engendrée par le déplacement hélicoïdal* (t. III) *d'une courbe donnée* (G). L'axe $\Lambda$ et le pas $k$ de ce déplacement sont aussi appelés *l'axe et le pas de la surface*.

Les hélicoïdes jouissent d'une propriété fondamentale analogue à celle des surfaces de révolution (nº 361) : *ils glissent sur eux-mêmes quand on leur imprime un mouvement hélicoïdal continu d'axe $\Lambda$ et de pas $k$.*

Il est d'ailleurs à remarquer que les surfaces de révolution peuvent être regardées comme des hélicoïdes de pas nul, de même que les cylindres peuvent être regardés comme des hélicoïdes de pas infini [1]. Les hélices décrites par les différents points de la génératrice deviennent les parallèles de la surface de révolution et les génératrices rectilignes du cylindre.

De l'invariance ci-dessus résulte un principe général analogue à celui du nº 361.

Si l'on prend $\Lambda$ pour axe des $z$, les équations paramétriques d'un hélicoïde de pas $k$ peuvent s'écrire

$$(19) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = k\theta + f(r).$$

La dernière peut d'ailleurs être regardée comme l'équation de la surface en coordonnées semi-polaires.

Il ne faudrait pas croire, par analogie avec les parallèles d'une surface de révolution, que les hélices $(h)$ sont des lignes de courbure. La détermination de celles-ci, de même que celle des lignes asymptotiques, est subordonnée à une quadrature, ainsi que le montre un raisonnement analogue à celui du nº 364.

---

[1] On peut démontrer que ces trois catégories de surfaces sont les seules qui puissent rester superposées à elles-mêmes dans un déplacement continu.

# CHAPITRE XXVI.

## SURFACES RÉGLÉES, DÉVELOPPABLES; CONES ET CYLINDRES.

367. Surfaces réglées. — On appelle *surface réglée* toute surface S engendrée par le déplacement d'une ligne droite G.

Cette ligne droite, qui porte le nom de *génératrice rectiligne* ou simplement de *génératrice*, dépend d'un paramètre variable $v$: elle a des équations paramétriques de la forme (nº 95)

$$x = \alpha + ua, \quad y = \beta + ub, \quad z = \gamma + uc, \tag{1}$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $a$, $b$, $c$ sont six fonctions données de $v$ et où $u$ désigne un paramètre indépendant de $v$.

Les trois quantités $a$, $b$, $c$ sont *les paramètres directeurs de* G. Si on les suppose liées par la relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \tag{2}$$

ce sont ses *cosinus directeurs*. Dans ce dernier cas, le point $g(a, b, c)$ est le *point directeur de* G [1]. Quand $v$ varie, il décrit, sur la sphère $\Sigma$ de centre O et de rayon 1, une courbe $(i)$ qui est appelée *l'indicatrice sphérique* de la surface réglée. Le cône qui a pour sommet O et pour base $(i)$ est appelé *cône directeur*.

Il peut arriver, comme cas particulier, que le point $g$ soit fixe ou, si l'on veut, que l'indicatrice se réduise à un point. Dans ce cas, toutes les génératrices G sont parallèles et la surface S est dite *cylindrique*. Nous y reviendrons ultérieurement (nº 381). Pour le moment, supposons le point $g$ variable avec $v$.

Le plan tangent à S au point $M(u, v)$ a pour équation (nº 203) :

$$\| \; X - x \quad a \quad \alpha' + ua' \; \| = 0,$$

[1] Chaque génératrice est, par cela même, *orientée*. Le paramètre $u$ a une signification géométrique très simple : si $M_0$ est le point où $u = 0$, on a $u = \overline{M_0 M}$ (nº 95).

où les lettres accentuées désignent des dérivées par rapport à $v$. En remplaçant $x, y, z$ par les expressions (1) et ajoutant à la première colonne la deuxième multipliée par $u$, cette équation devient

$$\| X - \alpha \quad a \quad \alpha' + ua' \| = 0. \tag{3}$$

368. Étude des plans tangents. — Pour poursuivre commodément l'étude des propriétés spéciales dont jouit une surface réglée le long d'une génératrice particulière $G_0$, *nous allons prendre des axes particuliers.*

Commençons par choisir $G_0$ comme axe des $z$, l'origine O correspondant à $u = 0$. Prenons ensuite $Oy$ parallèle à la tangente à l'indicatrice [1] au point $g_0$ homologue de $G_0$, et $Ox$ perpendiculaire au plan $zOy$. Nous supposerons enfin que le paramètre $v$, dont la signification a été laissée, jusqu'à présent, complètement arbitraire, représente l'arc de l'indicatrice, celle-ci étant supposée orientée dans un sens tel que la demi-tangente positive en $g_0$ ait, non seulement la direction, mais aussi le sens de $Oy$. Nous prendrons, en outre, $g_0$ pour origine des arcs, de sorte que $v$ est nul pour $G_0$.

Ces diverses hypothèses se traduisent analytiquement par les conditions suivantes :

$$\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = a_0 = b_0 = 0, \qquad c_0 = 1; \tag{4}$$

$$a'_0 = c'_0 = 0, \qquad b'_0 = 1. \tag{5}$$

L'équation (3) se réduit alors à

$$X(\beta'_0 + u) - \alpha'_0 Y = 0. \tag{6}$$

En choisissant convenablement l'origine des $u$ qui, jusqu'à présent, est arbitraire sur chaque génératrice, nous pouvons encore supposer

$$\beta'_0 = 0, \tag{7}$$

et notre équation devient

$$uX - \alpha'_0 Y = 0. \tag{8}$$

Commençons par nous débarrasser d'un *cas particulier*, celui de $\alpha'_0 = 0$. Dans cette hypothèse, l'équation (8) se réduit à $X = 0$;

---

[1] Cette tangente est perpendiculaire à $Og_0$, donc à $G_0$, puisque l'indicatrice est tracée sur une sphère de centre O.

donc *le plan tangent est le même tout le long de la génératrice;* c'est le plan des $yz$. A l'origine, on a $u = 0$, l'équation (8) se réduit à une identité: donc, *le plan tangent en* O *est indéterminé.* Lorsque la condition actuellement envisagée est remplie par toutes les génératrices de la surface, on dit que celle-ci est *développable* (*cf.* n° 372).

Ce cas exceptionnel étant mis de côté, l'équation (8) nous montre que *le plan tangent en* M *est un plan passant par* O$z$, *et réciproquement tout plan* $\Pi$ *contenant* O$z$ *est tangent en un point de cette droite.*

Il y a correspondance homographique entre M et $\Pi$ (n° 146), car l'équation (8) est linéaire en $u$ [1]. On peut donc dire que les plans tangents d'une surface réglée le long d'une génératrice *définissent une corrélation* (n° 146) et l'on peut appliquer au cas actuel toutes les définitions et propriétés données au n° 146.

En particulier, *le plan asymptote* est le plan tangent au point à l'infini; il conserve donc sa signification habituelle (n° 240). Avec les axes ci-dessus, c'est le plan des $yz$ [2].

*Le plan central* est $z$O$x$ et *le point central* est O. Si l'on introduit l'angle $\varphi$ de $z$O$x$ avec le plan tangent en M, l'équation (8) s'écrit

$$\overline{\mathrm{OM}} = k \tang \varphi, \tag{9}$$

en posant

$$\alpha'_0 = k. \tag{10}$$

On retrouve la *formule de Chasles* et le *paramètre de distribution*. Celui-ci indique la rapidité et le sens de la rotation du plan tangent, quand M décrit O$z$.

Le théorème démontré à la fin du n° 146 nous donne le suivant :

Théorème. — *Deux surfaces réglées ayant une génératrice commune se raccordent généralement en deux points de cette*

---

(1) Cela se voit tout aussi bien sur l'équation (3).

(2) On pouvait le prévoir géométriquement. Le plan asymptote est parallèle au plan tangent au cône directeur, car les deux plans ont en commun la tangente à la trace commune des deux surfaces sur le plan de l'infini. D'autre part, O$y$ étant parallèle à la tangente à l'indicatrice, $z$O$y$ est tangent au cône directeur; c'est donc le plan asymptote.

*génératrice. Si elles se raccordent en plus de deux points, elles se raccordent tout du long de la génératrice.*

369. Nous venons de voir que les plans tangents d'une surface réglée S non développable sont les plans qui passent par ses génératrices. Cette propriété apporte généralement de grandes simplifications dans la résolution des problèmes qu'on peut se poser sur ces plans, particulièrement en Géométrie descriptive.

Par exemple, si l'on cherche les plans tangents issus d'un point P, il suffit de considérer tous les plans (P, G); chacun d'eux est tangent en un point M de G, qui, lorsque G varie, décrit la courbe de contact de S avec le cône circonscrit de sommet P, ou encore la *courbe d'ombre propre* de la surface S éclairée par P (t. III), ou enfin la *courbe de contour apparent* de la surface S vue de P. Si l'on coupe le cône ci-dessus par un plan Q quelconque, on voit aussi que le contour apparent sur ce plan est l'enveloppe des projections des génératrices à partir de P. Ceci s'applique, en particulier, dans le cas d'une projection orthogonale.

370. Génératrices infiniment voisines. — Le point central, le plan central et le paramètre de distribution ont une autre signification, qui se présente dans la considération de deux génératrices infiniment voisines.

Considérons la génératrice G, dont le paramètre $v$ est infiniment petit. Si l'on développe $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $a$, $b$, $c$ par la formule de Taylor, en tenant compte de (4), (5), (7), (10), et se bornant aux termes du premier degré en $v$, on a

$$\alpha = kv, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = \gamma'_0 v;$$
$$a = 0, \qquad b = v, \qquad c = 1.$$

Les équations de G sont donc, en négligeant les puissances de $v$ supérieures à la première,

(11) $$x = kv, \qquad y = uv, \qquad z = \gamma'_0 v + u.$$

Cherchons la perpendiculaire commune à $G_0$ et G. Elle est parallèle à $Ox$ [1] et a pour équations

(12) $$y = 0, \qquad z = \gamma'_0 v.$$

---

[1] Car G, comme $G_0$, est perpendiculaire à $Ox$, ainsi que le montre la première équation (11), qui ne contient pas $u$. Géométriquement, cela tient à ce que $Gx$ est perpendiculaire au plan tangent au cône directeur, lequel plan est parallèle aux deux génératrices infiniment voisines.

La plus courte distance $P_0P$ a pour mesure algébrique, suivant $Ox$,

$$\overline{P_0P} = kv. \tag{13}$$

Lorsque $v$ tend vers zéro, la seconde formule (12) montre que $P_0$ tend vers O. D'autre part, le rapport $\frac{\overline{P_0P}}{v}$ tend vers $k$, d'après (13). Si l'on se souvient que $v$ désigne l'arc d'indicatrice et, par suite, l'angle infiniment petit de $G_0$ et de G, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on considère la perpendiculaire commune* $P_0P$ *aux deux génératrices infiniment voisines* $G_0$ *et* G, *et si l'on suppose que* G *tende vers* $G_0$ :

1° *Le pied* $P_0$ *tend vers le point central;*

2° *Le plan* $G_0P_0P$ *tend vers le plan central;*

3° *Le rapport de* $P_0P$ *à l'angle des deux génératrices tend vers le paramètre de distribution.*

371. Ligne de striction. — Les propriétés que nous venons de trouver ont lieu pour chaque génératrice. En particulier, sur chaque génératrice, il y a un point central. Le lieu de ce point central se nomme *ligne de striction.*

Pour en trouver les équations paramétriques, à partir des équations (1), on peut procéder comme il suit. On forme l'équation (3) du plan tangent. En annulant le coefficient de $u$, on obtient l'équation du plan asymptote. En exprimant ensuite que ce plan asymptote est perpendiculaire au plan (3), on obtient une équation du premier degré en $u$, qui donne la valeur de $u$ correspondant au point central. En portant cette valeur dans (1), on obtient, en fonction de $v$, les équations paramétriques de la ligne de striction.

372. Surfaces développables. — Nous avons vu, au n° 368, que, dans certains cas, *le plan tangent est le même tout le long de la génératrice* et nous avons dit que, lorsque ceci a lieu pour toutes les génératrices, *la surface est développable.*

Il est facile, au moyen de l'équation (3), de trouver la condition analytique correspondante. Il suffit d'exprimer que les deux plans qui correspondent à $u = 0$ et à $u = \infty$ coïncident. Comme ils ont déjà en commun la génératrice G, il suffit d'exprimer qu'ils ont en commun un point quelconque en dehors de G, par exemple le point à l'infini dans la direction $\delta(a', b', c')$, qui appartient au plan asymptote [1].

[1] Ce raisonnement est en défaut si $a'$, $b'$, $c'$ sont proportionnels à $a$, $b$, $c$, car $\delta$ et G se confondent. Mais, le coefficient de $u$ dans (3) est nul, comme ayant deux colonnes proportionnelles. La condition (14) est donc toujours valable.

Cela donne la condition

$$(14) \qquad \| \alpha' \quad a \quad \alpha' \| = 0.$$

*Cette condition doit être satisfaite identiquement*, quel que soit $v$.

Lorsqu'une surface est développable, son *plan tangent ne dépend que d'un paramètre. Réciproquement*, toute enveloppe d'une famille de plans à un paramètre est une surface développable, car chaque plan de la famille touche l'enveloppe le long d'une droite (n° 281).

On a vu, au n° 289, que *les génératrices d'une surface développable ont une enveloppe* appelée *arête de rebroussement. Réciproquement*, les tangentes à une courbe quelconque engendrent une surface développable.

En effet, si, dans les équations (1), le point $(\alpha, \beta, \gamma)$ est pris au point de contact, $a$, $b$, $c$ sont proportionnels à $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ et le déterminant (14) est nul, comme ayant ses deux dernières colonnes proportionnelles.

D'ailleurs, on peut chercher directement la condition nécessaire et suffisante pour que la droite (1) admette une enveloppe (*cf.* n° 290). Il faut et il suffit que l'on puisse déterminer $u$ fonction de $v$, de telle manière que l'on ait

$$\frac{x'}{a} = \frac{y'}{b} = \frac{z'}{c},$$

les accents indiquant une dérivation par rapport à $v$. Or, ceci s'écrit

$$\frac{\alpha' + ua' + au'}{a} = \frac{\beta' + ub' + bu'}{b} = \frac{\gamma' + uc' + cu'}{c}$$

ou, en retranchant $u'$ de chaque membre,

$$\frac{\alpha' + ua'}{a} = \frac{\beta' + ub'}{b} = \frac{\gamma' + uc'}{c} = \rho.$$

Afin de ne pas détruire la symétrie, introduisons, comme inconnue auxiliaire, la valeur $\rho$ des trois rapports; nous avons alors les trois équations

$$(15) \qquad \begin{cases} \alpha' + ua' - \rho a = 0, \\ \beta' + ub' - \rho b = 0, \\ \gamma' + uc' - \rho c = 0. \end{cases}$$

La condition de compatibilité n'est autre que (14).

Si elle est satisfaite, pour avoir $u$ dans l'hypothèse où $a$, $b$, $c$ sont des cosinus directeurs, c'est-à-dire sont liés par (2), il suffit de multiplier la première équation par $a'$, la seconde par $b'$, la troisième par $c'$ et d'ajouter; il vient

$$(16) \qquad u = -\frac{\alpha' a' + \beta' b' + \gamma' c'}{a'^2 + b'^2 + c'^2}.$$

En portant dans (1), on obtient les coordonnées du point de contact ou, si l'on veut, *les équations paramétriques de l'enveloppe.*

373. On peut se demander ce que devient la ligne de striction dans le cas particulier actuel. Il est facile de voir que ce n'est autre que l'arête de rebroussement. En effet [1], supposant que le point ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) est le point de contact, on a identiquement

$$(17) \qquad a = \lambda\alpha', \qquad b = \lambda\beta', \qquad c = \lambda\gamma',$$

$\lambda$ étant un certain facteur de proportionnalité. Les hypothèses (4) entraînent alors $\alpha'_0 = \beta'_0 = 0$, donc, en particulier, (7), ce qui est la condition pour que O soit le point central. De plus, d'après (10), nous voyons que *le paramètre de distribution est nul.*

374. Lignes asymptotiques d'une surface réglée. — Les génératrices d'une surface réglée sont des tangentes asymptotiques en chacun de leurs points, puisqu'elles ont un rayon de courbure infini (n° 336). Ce sont donc des lignes asymptotiques (n° 345).

Si la surface est développable, il n'y en a pas d'autres, car les tangentes asymptotiques en chaque point d'une telle surface sont confondues, comme on le voit en coupant par le plan tangent et appliquant le théorème du n° 342.

Si la surface n'est pas développable, il y a une seconde famille de lignes asymptotiques. On démontre qu'elle est déterminée par une équation de Riccati (t. I, Note III; *cf.* Exercice proposé n° 8 du présent Chapitre).

375. Surfaces coniques. — *On appelle surface conique ou cône toute surface engendrée par une droite passant par un point fixe, lequel est appelé sommet.*

Les équations (1) représentent un cône si le point ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) est fixe, c'est-à-dire si $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont des constantes.

Dans ce cas, l'équation (14) est évidemment vérifiée, puisque

---

[1] Géométriquement, on peut remarquer que le point de contact est le point de rencontre de deux tangentes infiniment voisines. D'une façon plus précise, ceci veut dire que c'est le pied de la perpendiculaire commune, laquelle a une longueur infiniment petite du troisième ordre (n° 331).

$\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$. Donc, *toute surface conique est une surface développable.*

*L'arête de rebroussement*, enveloppe des génératrices, *se réduit à un point, sommet du cône.*

Pour avoir l'équation ponctuelle du cône défini par les équations (1), où l'on suppose $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ constants, il faut éliminer $u$, $v$ entre ces équations ou bien $v$ entre

$$(18) \qquad \frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c}.$$

Comme celles-ci ne changent pas quand on multiplie $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ par un facteur arbitraire $\lambda$, il en est de même du résultat de l'élimination. Autrement dit, *tout cône de sommet* $(\alpha, \beta, \gamma)$ *a une équation ponctuelle homogène en* $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$.

*Réciproquement*, soit l'équation homogène

$$(19) \qquad f(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma) = 0.$$

En divisant par une puissance convenable de $z-\gamma$, on obtient (t. I, n° 133) une équation en $\frac{x-\alpha}{z-\gamma}$, $\frac{y-\beta}{z-\gamma}$. On peut donc exprimer ces deux rapports en fonction d'un paramètre $v$, ce qui conduit à des équations de la forme (18). Donc, l'équation (19) représente un cône de sommet $(\alpha, \beta, \gamma)$.

Dans le cas particulier où $\alpha = \beta = \gamma = 0$, *l'équation* (19) *est homogène en* $x$, $y$, $z$; *elle représente un cône de sommet à l'origine* (*cf.* n° 77).

On généralise quelquefois l'équation (19) de la manière suivante. Le sommet S du cône peut être défini par l'intersection de trois plans

$$(20) \qquad P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0.$$

Toute droite G passant par ce point a des équations de la forme

$$(21) \qquad P = \lambda R, \qquad Q = \mu R,$$

$\lambda$ et $\mu$ désignant deux paramètres constants. Pour que cette droite engendre une surface, il faut et il suffit que $\lambda$ et $\mu$ soient liés par une relation

$$(22) \qquad f(\lambda, \mu) = 0.$$

L'équation de cette surface s'obtient en éliminant $\lambda$, $\mu$ entre (21)

et (22), ce qui donne

$$f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0, \tag{23}$$

c'est-à-dire une équation homogène en P, Q, R.

Réciproquement, toute équation de cette forme peut être obtenue par une élimination analogue à la précédente. Donc, *pour qu'une surface soit un cône ayant pour sommet le point commun aux trois plans* (20), *il faut et il suffit que son équation puisse se mettre sous la forme d'une équation homogène en* P, Q, R.

*En coordonnées tangentielles*, un cône, comme toute surface développable (nº 303), possède *deux équations : l'une d'elles est l'équation tangentielle du sommet* (*cf.* nº 303).

376. On définit quelquefois un cône par son sommet S et une courbe (C), appelée *directrice*, sur laquelle doivent s'appuyer toutes les génératrices.

Pour former l'équation d'un tel cône, on peut procéder de la manière suivante.

On part des coordonnées $(x, y, z)$ d'un point quelconque M de l'espace et l'on exprime que la droite MS rencontre la courbe (C), problème qu'on sait résoudre (nº 54).

Dans le cas où S est à l'origine, il suffit d'*éliminer la variable d'homogénéité entre les deux équations de* (C) (*cf.* nº 78) ([1]).

On peut aussi définir un cône par la condition que ses génératrices soient tangentes à une surface donnée (Σ); on dit alors que *le cône est circonscrit à cette surface*. L'équation d'un tel cône peut se former comme ci-dessus, mais en exprimant, cette fois, que la droite MS est tangente à (Σ).

En coordonnées tangentielles, le cône est représenté par l'équation de son sommet et par l'équation tangentielle de la directrice (C) ou de la surface (Σ) (*cf.* nº 303).

377. Si un cône C de sommet à l'origine a pour équation ponctuelle

$$f(x, y, z) = 0, \tag{24}$$

([1]) Cette règle s'applique plus généralement, en coordonnées tétraédriques, quand S est le sommet du tétraèdre de référence opposé à la face $t = 0$.

le plan tangent P au point $M(x, y, z)$ a pour équation

$$(25)\qquad X f'_x + Y f'_y + Z f'_z = 0.$$

La fonction $f$ étant homogène, on vérifie que ce plan demeure fixe quand M décrit une génératrice OG, car $x$, $y$, $z$ varient proportionnellement et, par suite, aussi les fonctions homogènes $f'_x$, $f'_y$, $f'_z$.

Si l'on considère $x$, $y$, $z$ comme les coordonnées homogènes d'un point $m$ dans un plan, l'équation (24) définit une courbe $c$ de ce plan et l'équation (25) la tangente $mt$ en $m$ à cette courbe. Si l'on considère l'équation tangentielle

$$(26)\qquad \varphi(u, v, w) = 0$$

de $c$, on peut l'interpréter comme étant la condition pour que le plan $(u, v, w, 0)$ qui passe à l'origine soit tangent au cône C. C'est donc la seconde équation tangentielle de ce dernier, la première étant $r = 0$.

Réciproquement, si l'on connaît cette seconde équation tangentielle, on peut la considérer comme l'équation tangentielle de la courbe $c$ et, par conséquent, remonter à l'équation ponctuelle (24) par la règle habituelle du n° 293. En particulier, les coordonnées d'un point quelconque de la génératrice de contact du plan $(u, v, w, 0)$ sont proportionnelles à $\varphi'_u$, $\varphi'_v$, $\varphi'_w$ (n° 294); ces quantités peuvent donc être prises comme paramètres directeurs de ladite génératrice.

D'une manière générale, *la Géométrie analytique des cônes de sommet* O, *est identique à la Géométrie analytique des courbes planes* ([1]).

378. Cônes supplémentaires. — On appelle *cône supplémentaire* du cône C le cône C' *lieu des perpendiculaires menées par* O *aux plans tangents* P.

Les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point quelconque de la perpendiculaire OG' au plan $P(u, v, w, 0)$ étant proportionnelles à $u$, $v$, $w$.

---

([1]) On peut d'ailleurs, si l'on veut, considérer la courbe $c$ comme étant la trace du cône C sur le plan de l'infini, $m$ étant la trace de OG et $mt$ la trace du plan tangent P.

l'équation ponctuelle du cône C′ est

$$\varphi(x, y, z) = 0. \tag{27}$$

Par suite, son équation tangentielle est

$$f(u, v, w) = 0, \tag{28}$$

en vertu du principe de dualité en Géométrie plane (n° 297). Donc, C est aussi supplémentaire de C′ et l'on peut dire que la relation entre les deux cônes est réciproque; *chacun d'eux est supplémentaire de l'autre*, le plan tangent le long de G′ étant perpendiculaire à G, si G′ est perpendiculaire au plan tangent le long de G [1].

379. Cônes algébriques. — Lorsque la directrice (C) ou la surface inscrite (Σ) du n° 376 sont algébriques, le cône l'est aussi, car son équation ponctuelle est obtenue par des calculs uniquement algébriques.

Cette condition suffisante n'est évidemment pas nécessaire, car l'on peut tracer des courbes transcendantes sur tout cône algébrique, de même qu'on peut lui inscrire des surfaces transcendantes.

Théorème. — *Étant donnée une courbe algébrique* (C), *de degré m et de classe p, les cônes qui l'admettent pour directrice sont, en général, de degré m et de classe p.*

1° *Degré.* — Coupons le cône par une droite D quelconque. A cet effet, S désignant le sommet, considérons le plan (S, D). Il coupe (C) en $m$ points. A chacun d'eux, P, correspond une génératrice G, qui rencontre D en un point M.

Réciproquement, à tout point M d'intersection de D et du cône, correspond une génératrice G qui rencontre (C) en un point P.

Le nombre des points M est donc égal au nombre des points P, c'est-à-dire au degré $m$ de (C).

Si l'on serre davantage le raisonnement, on aperçoit tout de suite des cas où il est en défaut.

---

(1) Ceci est évident si l'on remarque que les traces des deux cônes sur le plan de l'infini sont *polaires réciproques par rapport au cercle de l'infini* (n° 428). On peut aussi le déduire, comme cas limite, de la théorie élémentaire des angles polyèdres supplémentaires.

D'abord, pour qu'à un point P corresponde une génératrice G située dans le plan (S, D), il faut (et il suffit) que ce point soit différent de S. Si donc S est sur (C), il ne doit pas être compté parmi les points P. Or, si $q$ est son ordre de multiplicité, il compte pour $q$ points dans l'intersection de (S, D) et de (C); de sorte qu'il ne reste que $m - q$ points P véritables. Donc, *si le sommet* S *se trouve sur* (C), *avec un ordre de multiplicité* $q$, *le degré du cône est seulement* $m - q$.

La seconde partie de la démonstration peut également se trouver inexacte. Nous avons, en effet, supposé implicitement que la génératrice SM rencontrait la courbe (C) en un *seul* point P. Or, il peut très bien arriver qu'il y ait plusieurs points de rencontre. D'une façon générale, *si chaque génératrice du cône rencontre la directrice* (C) *en* $n$ *points*, à chaque point M correspondent $n$ points P. Par conséquent, *le degré du cône*, tel qu'il a été précédemment évalué, *doit être divisé par* $n$.

Cette circonstance ne se présente évidemment que pour des positions particulières de S. Si S′ désigne l'une d'elles, on peut trouver des positions infiniment voisines pour lesquelles il n'y a pas réduction du degré, chaque génératrice G ne rencontrant (C) qu'en un seul point. Mais, lorsque S tend vers S′, il y a $n$ génératrices G qui tendent vers la même position limite G′. On est ainsi conduit à considérer chaque génératrice G′ comme comptant pour $n$ génératrices confondues. *Le cône de sommet* S′ *est multiple d'ordre* $n$.

Observons encore que cette multiplicité d'ordre $n$ n'est possible que si $m - q$ est divisible par $n$. Si $m - q$ est premier, il n'y a jamais réduction du degré du cône.

On peut se demander aussi par quel mécanisme se fait la réduction du degré quand le point S tend vers un point S′ de (C). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette réduction provient d'une décomposition limite du cône, suivant le cône véritable de sommet S′ et suivant les $q$ plans tangents à (C) en S′, qui passent par la direction limite de la droite S′S.

2° *Classe.* — Cherchons les plans tangents au cône issus d'une droite quelconque Sλ menée par le sommet. En raisonnant comme précédemment, on voit que ces plans ne sont autres que les plans tangents à (C) menés par Sλ. Leur nombre est donc égal à la classe $p$ de cette courbe.

Mais, de même que pour le degré, *il peut y avoir réduction* de la classe véritable du cône.

En effet, d'abord un plan tangent P à (C) n'est tangent au cône que si la

tangente MT au point de contact M est différente de la génératrice SM [1]. Donc, *il y a réduction de la classe si* S *se trouve sur la développable engendrée par les tangentes à* (C). La réduction est égale au nombre de tangentes qu'on peut mener par le point S. Elle est, en général, d'une unité; mais, si S est un point simple de (C), elle est de deux unités. Si S est un point multiple d'ordre $q$ de (C), la réduction est de $2q$ unités (il y a deux tangentes pour chaque branche).

En second lieu, il peut arriver que chaque plan tangent au cône compte pour $n$ plans tangents à (C); ceci a lieu lorsque chaque génératrice rencontre la directrice en $n$ points. Dans ce cas, la classe du cône, évaluée comme il vient d'être expliqué, doit être divisée par $n$. Comme tout à l'heure, le cône est multiple d'ordre $n$.

Dans le cas particulier où la courbe (C) est plane et le point S en dehors de son plan, il est facile de voir que tous les cas de réduction du degré ou de la classe sont impossibles. Donc, *le degré et la classe d'un cône sont toujours égaux au degré et à la classe d'une section plane quelconque ne passant pas par le sommet.*

380. Théorème. — *Étant donnée une surface* (Σ), *le degré des cônes qui lui sont circonscrits est, en général, égal à la classe de ses sections planes; la classe de ces cônes est égal à la classe de* (Σ).

1° *Degré.* — Coupons le cône de sommet S par une droite quelconque D. Pour cela, nous menons, par S, les tangentes à la section de (Σ) par le plan (S, D). Chacune de ces tangentes est une génératrice du cône et rencontre D en un des points d'intersection cherchés. Le degré du cône est donc égal à la classe de la section plane ci-dessus.

2° *Classe.* — Les plans tangents au cône menés par une droite Sλ quelconque ne sont autres que les plans tangents à (Σ) menés par cette droite. Le cône et la surface ont donc même classe (*cf.* n° 305).

Comme au numéro précédent, la démonstration peut être en défaut, pour certaines positions particulières du sommet, le degré ou la classe étant alors réduits. Nous laissons au lecteur le soin d'examiner ces cas d'exception.

381. Surfaces cylindriques. — *On appelle surface cylindrique ou cylindre toute surface engendrée par une droite qui se déplace parallèlement à elle-même.*

On peut observer tout de suite qu'un cylindre est un *cône dont le*

---

[1] Si S est sur MT, *le plan tangent le long de* MT *est le plan osculateur en* M *à* (C), car c'est la limite du plan SMM' de deux génératrices infiniment voisines.

*sommet est à l'infini;* de sorte que les propriétés établies aux nos 375 et suivants s'appliquent *a priori* aux cylindres. On peut d'ailleurs les démontrer directement, en reprenant, mot pour mot, les raisonnements faits pour les cônes. Voyons seulement ce que deviennent les résultats du no 375.

Pour que les équations (1) représentent un cylindre, il faut et il suffit que $a$, $b$, $c$ soient proportionnels à des constantes. Si ce sont des cosinus directeurs, ils sont constants. L'équation (14) est alors vérifiée identiquement, parce que $a'$, $b'$, $c'$ sont nuls. Donc, *toute surface cylindrique est une surface développable.*

Si la direction des génératrices est définie par l'intersection de deux plans

$$(29) \qquad P = 0, \qquad Q = 0,$$

toute droite parallèle à cette direction a des équations de la forme

$$(30) \qquad P = \lambda, \qquad Q = \mu.$$

En raisonnant comme au no 375, on démontre que, *pour qu'une équation ponctuelle représente un cylindre de génératrices parallèles à* (29), *il faut et il suffit qu'elle puisse se mettre sous la forme*

$$(31) \qquad f(P, Q) = 0.$$

Si l'on prend $P = x$, $Q = y$, on retrouve une propriété connue (no 47).

**382.** Surfaces réglées a plan directeur; conoïdes. — On dit qu'*une surface réglée admet un plan* (Π) *pour plan directeur, si toutes ces génératrices sont parallèles à ce plan.*

D'après les définitions du no 367, le cône directeur est alors le plan parallèle à (Π) mené par O; *l'indicatrice est un grand cercle*, section de la sphère Σ par ce plan.

Pour faciliter le langage, convenons que (Π) est horizontal. *Le plan asymptote relatif à chaque génératrice* (G) *est alors le plan horizontal* qui la contient. *Le plan central est*, par conséquent, *vertical.*

Il s'en suit que *la ligne de striction est* la courbe de contact du cylindre

circonscrit à génératrices verticales; autrement dit, c'est *la ligne de contour apparent* (n° 369) *pour la direction perpendiculaire au plan directeur.*

On le voit tout aussi facilement au moyen de la perpendiculaire commune à deux génératrices G et G', qui est la verticale menée par l'intersection $M_1$ des projections horizontales $G_1$ et $G'_1$. Lorsque G' tend vers G, $M_1$ tend vers le point de contact $P_1$ de $G_1$ avec son enveloppe ($E_1$). *Cette enveloppe est donc la projection horizontale de la ligne de striction.* Mais, nous savons (n° 369) que c'est aussi le contour apparent horizontal.

Si $\varphi$ désigne l'angle de $Ox$ avec la génératrice G de cote $z$, le paramètre de distribution est $k = \frac{dz}{d\varphi}$, ainsi qu'il résulte du théorème du n° 370.

383. *On appelle conoïde une surface réglée à plan directeur, dont les génératrices s'appuient sur une droite fixe Δ, appelée axe du conoïde.*

Si l'on prend cette droite pour axe des $z$ et le plan directeur pour plan des $xy$, l'équation du conoïde est de la forme

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{32}$$

On dit que *le conoïde est droit quand son axe est perpendiculaire à son plan directeur. Cet axe* est alors la perpendiculaire commune à deux génératrices quelconques; *c'est donc la ligne de striction.*

# CHAPITRE XXVII.

## NOTIONS SUR LES SYSTÈMES DE DROITES.

384. Divers systèmes de droites. — Une droite quelconque de l'espace dépend de *quatre* paramètres indépendants (n° 94). Si l'on établit entre eux *trois*, *deux* ou *une* relations, on obtient des systèmes de droites dépendant de *un*, *deux* ou *trois* paramètres indépendants.

Un système de droites dépendant d'*un seul paramètre* est constitué par les *génératrices d'une surface réglée* (¹), dont les propriétés ont été étudiées au Chapitre précédent.

Un système à *deux paramètres* porte le nom de *congruence* (²).

Un système à *trois paramètres* porte le nom de *complexe* (²).

Ce sont ces deux derniers systèmes que nous allons brièvement étudier dans ce Chapitre.

385. Congruences. — Soit une droite D, dépendant de deux paramètres arbitraires $u$ et $v$, qui seront appelés les *coordonnées de la droite dans la congruence*.

On peut écrire ses équations paramétriques sous la forme

$$(1) \qquad X = x + \rho a, \qquad Y = y + \rho b, \qquad Z = z + \rho c,$$

$x$, $y$, $z$, $a$, $b$, $c$ désignant six fonctions quelconques de $u$, $v$. Ces équations s'interprètent géométriquement de la manière suivante : Par chaque point $P(x, y, z)$ d'une surface S (³), on mène une droite D, dont les paramètres directeurs $(a, b, c)$ sont des fonctions connues de la position de M sur S.

(¹) Il faut aussi comprendre les *tangentes à une courbe plane* et, plus particulièrement encore, les *droites issues d'un point dans un plan*, qui constituent un système particulier appelé quelquefois *faisceau plan*.

(²) Ces dénominations sont quelquefois étendues à des systèmes à deux ou trois paramètres, dont les éléments constitutifs sont des lignes quelconques de l'espace. On peut parler, par exemple, d'une *congruence de cercles* ou d'un *complexe de cercles*.

(³) Il peut arriver que cette surface S *se réduise à une courbe*. Par chaque point P passent alors une simple infinité de droites D. Plus particulièrement encore, S peut *se réduire à un point;* la congruence comprend alors toutes les droites issues de ce point et porte le nom de *gerbe*. Il peut arriver aussi que la congruence comprenne *toutes les droites d'un plan;* elle se nomme alors *hyperfaisceau*.

On peut évidemment, sans changer la congruence, remplacer chaque point P par un point quelconque de la droite D correspondante; par exemple, par un point de rencontre de cette droite avec une surface quelconque. Ceci nous prouve que la surface S peut, au fond, être *arbitrairement choisie* [1]. On peut souvent profiter de cette indétermination pour simplifier certains calculs relatifs à la congruence.

Si l'on établit entre $u$ et $v$ une relation quelconque ou, ce qui revient au même, si l'on remplace $u$ et $v$ par des fonctions d'un même paramètre $t$, la droite D engendre une surface réglée (R). On dit que *cette surface appartient à la congruence.*

386. Développables de la congruence. — Cherchons si, parmi les surfaces (R) précédentes, *il y a des surfaces développables.* Il revient au même de chercher si l'on peut faire varier $u$ et $v$ de telle manière que *la droite* D *enveloppe une courbe* C (n° 372).

Supposons donc $u$ et $v$ fonctions d'un même paramètre $t$, que nous n'aurons d'ailleurs pas besoin de spécifier, grâce à la théorie des différentielles (t. I, n° 139), et exprimons que la droite (1) admet une enveloppe. Nous devons pouvoir déterminer $\rho$ en fonction de $t$, de manière que le point F de coordonnées X, Y, Z décrive une courbe C tangente à D. En répétant un calcul déjà fait (n° 371), on a les conditions

$$(2)\qquad \frac{dx+\rho\, da}{a}=\frac{dy+\rho\, db}{b}=\frac{dz+\rho\, dc}{c}.$$

Introduisons l'inconnue auxiliaire $\lambda$, valeur commune de ces trois rapports, et explicitons les différentielles en fonction de $du$ et de $dv$; il vient

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}du+\dfrac{\partial x}{\partial v}dv+\rho\left(\dfrac{\partial a}{\partial u}du+\dfrac{\partial a}{\partial v}dv\right)-\lambda a=0,\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u}du+\dfrac{\partial y}{\partial v}dv+\rho\left(\dfrac{\partial b}{\partial u}du+\dfrac{\partial b}{\partial v}dv\right)-\lambda b=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv+\rho\left(\dfrac{\partial c}{\partial u}du+\dfrac{\partial c}{\partial v}dv\right)-\lambda c=0. \end{cases}$$

Éliminons $\rho$ et $\lambda$ entre ces trois équations du premier degré :

$$(4)\qquad \left\|\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv \quad \frac{\partial a}{\partial u}du+\frac{\partial a}{\partial v}dv \quad a\right\|=0.$$

Cette équation, homogène et du second degré en $du, dv$, exprime la condition à laquelle doivent nécessairement obéir les fonctions $u$, $v$ de $t$. Si on la résout par rapport à $\dfrac{du}{dv}$, on obtient deux équations de la forme

$$(5)\qquad P_1\,du+Q_1\,dv=0,\qquad P_2\,du+Q_2\,dv=0,$$

---

[1] Pourvu, toutefois, qu'elle rencontre chaque droite de la congruence.

les P, Q étant des fonctions connues de $u$, $v$. Chacune de ces équations est une équation différentielle du premier ordre entre $u$ et $v$ et admet, par conséquent, une infinité de solutions dépendant d'une constante arbitraire. A chacune de ces solutions correspond une développable de la congruence. Car, si $u$, $v$ satisfont à la condition (4), les équations (3) sont compatibles en $\rho$ et $\lambda$ et le point F existe bien, qui décrit une courbe tangente à D. Donc :

Théorème. — *Il existe une infinité de développables appartenant à une congruence donnée. Elles se rangent en deux familles* [1], *dont chacune est déterminée par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre entre u et v.*

387. Points focaux ; plans focaux ; surfaces focales. — On sait (t. I, n° 186) qu'il existe, pour chaque équation (5), une solution et une seule, telle que $u$ et $v$ prennent simultanément des valeurs arbitraires données $u_0$, $v_0$. On conclut de là que, *par chaque droite* D *de la congruence, passent deux développables* $\Delta$, une de chaque famille.

Pour chacune d'elles il y a un point F, point de contact de D avec l'arête de rebroussement C. Ces deux points, $F_1$ et $F_2$, portent le nom de *points focaux de la droite* D. Il est très facile de les déterminer, sans être obligé pour cela d'intégrer les équations (5). En effet, la valeur de $\rho$ qui correspond à chacun d'eux doit satisfaire aux équations (3), pour des valeurs convenables de $du$, $dv$, $\lambda$. Par suite, elle doit aussi satisfaire à l'équation obtenue en éliminant ces trois inconnues homogènes, à savoir

$$(6)\qquad \left\| \frac{\partial x}{\partial u} + \rho\frac{\partial a}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} + \rho\frac{\partial a}{\partial v} \quad a \right\| = 0.$$

*Cette équation, du second degré en* $\rho$, *donne les* $\rho$ *des deux points focaux.*

388. Les points focaux peuvent être définis autrement.

Considérons toutes les surfaces (R) de la congruence qui passent par une droite D donnée. En un point quelconque F de cette droite, chacune d'elles admet un plan tangent (P) déterminé, qui n'est pas le même, en général, pour toutes les surfaces. Cherchons s'il est possible de *choisir* F *de manière que toutes les surfaces* (R) *soient tangentes en ce point.*

Si $u$ et $v$ sont des fonctions quelconques d'un paramètre $t$, le plan tangent P au point F de paramètre $\rho$ à la surface (R) définie par ces fonctions, a pour

---

[1] Il peut se faire que ces deux familles ne soient pas analytiquement séparables, s'il en est ainsi des équations (5), c'est-à-dire si l'équation du second degré (4) en $\frac{du}{dv}$ n'est pas résoluble rationnellement.

équation (n° 367)

$$(7)\qquad \left\| X-x \quad \left(\frac{\partial x}{\partial u}+\rho\frac{\partial a}{\partial u}\right)du+\left(\frac{\partial x}{\partial v}+\rho\frac{\partial a}{\partial v}\right)dv \quad a\right\|=0.$$

Nous voulons que ce plan soit indépendant de la surface (R) et, par conséquent, indépendant du rapport $\frac{du}{dv}$. Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait précisément la condition (6) [1]. Par conséquent, *il y a deux points* F *qui répondent à la question : ce sont les points focaux.*

En chacun d'eux, les surfaces admettent le même plan tangent. Les deux plans $\Phi_1$ et $\Phi_2$ ainsi définis portent le nom de *plans focaux de la droite* D. Leur équation s'écrit, par exemple,

$$(8)\qquad \left\| X-x \quad \frac{\partial x}{\partial u}+\rho\frac{\partial a}{\partial u} \quad a\right\|=0,$$

$\rho$ devant être remplacé successivement par les deux racines de l'équation (6).

389. Les points focaux $F_1$ et $F_2$ dépendent des deux paramètres $u$, $v$; ils engendrent donc, quand D décrit la congruence, deux surfaces $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$, qui portent le nom de *surfaces focales de la congruence* [2].

Si D décrit une développable $\Delta_1$, l'un de ses points focaux, $F_1$ par exemple, décrit l'arête de rebroussement $C_1$ de cette développable. Si D décrit ensuite la deuxième développable $\Delta_2$ qui la contient, le deuxième point focal $F_2$ décrit l'arête de rebroussement $C_2$ de $\Delta_2$. Ceci nous prouve que *les deux surfaces focales* $\Sigma_1$ *et* $\Sigma_2$ *sont respectivement les lieux des arêtes de rebroussement* $C_1$ *et* $C_2$ *des deux familles de développables* $\Delta_1$ *et* $\Delta_2$.

*La droite* D *est tangente* aux deux courbes $C_1$ et $C_2$, donc *aux deux surfaces* $\Sigma_1$ *et* $\Sigma_2$, qui contiennent ces courbes. Les points de contact sont $F_1$ et $F_2$.

Considérons une surface réglée (R) appartenant à la congruence. Chacune de ses génératrices D touche $\Sigma_1$ en $F_1$. Quand D décrit (R), $F_1$ décrit, sur $\Sigma_1$, une certaine courbe $\gamma_1$. Si cette courbe n'est pas tangente à D, c'est-à-dire si (R) n'est pas une développable d'arête $\gamma_1$, le plan tangent en $F_1$ à (R) est

---

[1] La condition est évidemment suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire, il suffit d'écrire que la direction $\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\rho\frac{\partial a}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}+\rho\frac{\partial b}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}+\rho\frac{\partial c}{\partial u}\right)$, qui appartient au plan tangent à la surface $v=$ const., appartient aussi au plan tangent à la surface $u=$ const.

[2] Si les deux familles de développables ne sont pas analytiquement séparables (*cf.* note 1 de la page 403), il en est de même des deux points focaux et des deux surfaces focales. On dit alors qu'il n'y a qu'une seule surface focale, dont $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ sont appelées *les deux nappes*.

déterminé par D et la tangente $F_1\theta_1$ à $\gamma_1$. Mais c'est aussi le plan tangent à $\Sigma_1$, car D et $F_1\theta_1$ sont tangentes à cette surface. *Toutes les surfaces* (R) *sont donc tangentes en* $F_1$ *à* $\Sigma_1$. On retrouve ainsi la propriété établie au n° 388 et l'on voit que *les plans focaux* $\Phi_1$ *et* $\Phi_2$ *ne sont autres que les plans tangents en* $F_1$ *et* $F_2$ *à* $\Sigma_1$ *et* $\Sigma_2$.

Si (R) est la développable $\Delta_1$, d'arête de rebroussement $C_1$, le raisonnement ci-dessus est en défaut au point $F_1$; mais, il ne l'est pas au point $F_2$. *Le plan tangent à* $\Delta_1$ *le long de* D *est donc le plan focal* $\Phi_2$.

Le plan $\Phi_2$ admet D pour caractéristique, quand $F_2$ décrit $\Gamma_2$, courbe de contact de $\Delta_1$ avec $\Sigma_2$. La tangente $M_2T_2$ à cette courbe est donc conjuguée de D (n° 344). Les courbes $C_2$ et $\Gamma_2$ forment, sur $\Sigma_2$, un *système de lignes conjuguées*.

Résumons toutes les propriétés qui viennent d'être établies :

THÉORÈME. — *Les droites d'une congruence sont tangentes communes à deux surfaces* $\Sigma_1$ *et* $\Sigma_2$, *appelées focales. Les points de contact* $F_1$ *et* $F_2$ *sont appelés points focaux. Toute surface réglée non développable* (R) *appartenant à la congruence est circonscrite à la fois à* $\Sigma_1$ *et* $\Sigma_2$, *les points de contact, pour chaque génératrice* D, *étant les deux points focaux, qui sont dès lors les deux points de raccordement* (n° 368) *pour deux surfaces* (R) *quelconques. Les plans de raccordement, qui sont les plans tangents* $\Phi_1$ *et* $\Phi_2$, *en* $F_1$ *et* $F_2$, *à* $\Sigma_1$ *et* $\Sigma_2$, *sont appelés plans focaux.*

*Il y a deux familles de développables appartenant à la congruence. Les développables* $\Delta_1$ *de la première famille, par exemple, ont leurs arêtes de rebroussement* $C_1$ *sur* $\Sigma_1$ *et sont circonscrites à* $\Sigma_2$ *suivant des courbes* $\Gamma_2$. *Sur chaque focale, les courbes* C *et* Γ *forment un système de lignes conjuguées.*

390. FOCALES RÉDUITES A DES COURBES. — Il peut arriver que *l'une des focales*, $\Sigma_1$ *par exemple, se réduise à une courbe*. Tout ce qui vient d'être dit continue à s'appliquer, mais avec certaines particularités.

La congruence est formée de *droites s'appuyant sur la courbe* $\Sigma_1$ *et tangentes à la surface* $\Sigma_2$. Les développables $\Delta_1$ sont des *cônes circonscrits à* $\Sigma_2$ *à partir des points* $F_1$ *de* $\Sigma_1$. Les développables $\Delta_2$ contiennent toutes la courbe $\Sigma_1$. Le plan focal $\Phi_1$ est donc déterminé par D et la tangente $F_1T_1$ à $\Sigma_1$. Pour $\Phi_2$, il n'y a rien de changé.

Il peut arriver, plus particulièrement encore, que *les deux focales soient réduites à des courbes*, sur lesquelles s'appuient toutes les droites de la congruence. Les développables $\Delta_1$ sont alors *les cônes admettant* $\Sigma_2$ *pour directrice commune et ayant leurs sommets sur* $\Sigma_1$. De même, les développables $\Delta_2$ sont les cônes ayant leurs sommets sur $\Sigma_2$ et admettant $\Sigma_1$ pour directrice.

Dans le cas particulier où les focales sont deux droites, on dit qu'on a une *congruence linéaire*.

391. Congruences de normales. — Un exemple intéressant de congruence est fourni par *les normales* MN *à une surface quelconque* S.

Les deux familles de développables sont engendrées par les *normales le long des lignes de courbure* (n° 346).

Les points focaux sont les *deux centres de courbure principaux* (n° 347). Les plans focaux sont les *deux plans normaux principaux* à la surface S; *ils sont donc rectangulaires.* Les surfaces focales sont *les deux nappes de la surface des centres de courbure.*

Quand M décrit une ligne de courbure $\lambda_1$ de la première famille, MN engendre une développable $\Delta_1$, dont l'arête de rebroussement $C_1$ est décrite par le premier centre de courbure principal $F_1$. Le plan tangent le long de MN à cette développable est le plan $t_1$MN, M$t_1$ étant la tangente en M à $\lambda_1$. Nous savons (n° 389) que c'est le plan focal $\Phi_2$, tangent en $F_2$ à la seconde nappe $\Sigma_2$ de la surface des centres. C'est aussi le plan osculateur en $F_1$ à $C_1$ (n° 289). D'autre part, ce plan est perpendiculaire au premier plan focal $\Phi_1$, tangent en $F_1$ à $\Sigma_1$. Il s'ensuit que les lignes $C_1$ ont leurs plans osculateurs normaux à $\Sigma_1$; *ce sont donc des lignes géodésiques de cette surface* [1] (note 1 de la page 360).

392. Il est intéressant de savoir reconnaître *a priori qu'une congruence donnée est une congruence de normales.*

On peut d'abord trouver un caractère analytique simple, à partir des équations (1), en supposant que $a$, $b$, $c$ sont des *cosinus directeurs*, c'est-à-dire sont liés par

$$a^2+b^2+c^2=1. \tag{9}$$

Pour que la congruence définie par les équations (1) soit une congruence de normales, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer $\rho$ fonction de $u$, $v$, de telle manière que le point M(X, Y, Z) décrive une surface S normale à D. Pour cela, il faut et il suffit qu'on ait, quels que soient $du$ et $dv$,

$$a\,dX+b\,dY+c\,dZ=0.$$

En remplaçant $dX$ par $dx+\rho\,da+a\,d\rho$, ..., et tenant compte de (9) ainsi que de la relation

$$a\,da+b\,db+c\,dc=0, \tag{10}$$

qui s'en déduit, il vient

$$a\,dx+b\,dy+c\,dz+d\rho=0. \tag{11}$$

---

[1] On démontre que, *réciproquement*, les tangentes à une famille de géodésiques d'une surface quelconque forment une congruence de normales (s'appuyer sur le n° 393).

Ceci nous montre que l'expression

$$(12)\qquad a\,dx + b\,dy + c\,dz = P\,du + Q\,dv.$$

où l'on a posé

$$(13)\qquad P = a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial y}{\partial u} + c\frac{\partial z}{\partial u}, \qquad Q = a\frac{\partial x}{\partial v} + b\frac{\partial y}{\partial v} + c\frac{\partial z}{\partial v},$$

doit être une différentielle totale exacte, à savoir la différentielle de la fonction $-\rho$.

Réciproquement, si cette condition est remplie, on pourra déterminer $\rho$ au moyen de la formule (11), à une constante arbitraire près (t. I, n° 141). Donc :

Théorème. — *Pour que la congruence définie par les équations* (1) *soit une congruence de normales, il faut et il suffit que l'expression* (12) *soit une différentielle totale exacte, c'est-à-dire que l'on ait*

$$(14)\qquad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial u}.$$

Mais, il ne faut pas oublier que $a$, $b$, $c$ doivent être des cosinus directeurs.

393. Voici maintenant un caractère géométrique :

Théorème. — *Pour qu'une congruence soit une congruence de normales, il faut et il suffit que les plans focaux de chaque droite de la congruence soient rectangulaires.*

Nous avons vu, au n° 391, que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante.

Pour simplifier les calculs, profitons de l'indétermination du point P sur la droite D (n° 385) et prenons-le au point focal $F_1$. Supposons, de plus, que les développables soient les surfaces $u =$ const. et $v =$ const., les secondes étant, par exemple, les développables $\Delta_1$.

Lorsque $v$ demeure constant, le point $F_1$ doit décrire une courbe $C_1$ tangente à D. On a donc identiquement

$$(15)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda a, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \lambda b, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \lambda c,$$

$\lambda$ étant un certain facteur, fonction de $u$, $v$. Portant dans (13), on trouve

$$P = \lambda.$$

Dès lors, (14) s'écrit

$$(16)\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = S\left(a\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Mais, si l'on différentie (15) par rapport à $v$, on obtient

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \lambda}{\partial v} a + \lambda \frac{\partial a}{\partial v}, \quad \ldots .$$

Portant dans (16), il reste

$$\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial c}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0. \tag{17}$$

Telle est, avec les hypothèses actuelles, la condition pour qu'on ait une congruence de normales.

Or, la direction $\delta$, dont $\frac{\partial a}{\partial u}$, $\frac{\partial b}{\partial u}$, $\frac{\partial c}{\partial u}$ sont les paramètres directeurs, est perpendiculaire à D, en vertu de (10). Elle est, d'autre part, parallèle au plan tangent le long de D à la développable $\Delta_1$, c'est-à-dire au plan focal $\Phi_2$. C'est donc la perpendiculaire à D menée dans ce plan. Elle est, par suite, normale à $\Phi_1$, puisque les deux plans focaux sont supposés rectangulaires. Mais, $\Phi_1$ est le plan tangent en $F_1$ à $\Sigma_1$. Dès lors, la condition (17) exprime que la direction $\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ est dans ce plan tangent ; elle est évidemment remplie et notre réciproque est démontrée.

394. Complexes. — On pourrait étudier les complexes en partant d'équations analogues aux équations (1) et supposant, cette fois, $x$, $y$, $z$, $a$, $b$, $c$ fonction de trois paramètres $u$, $v$, $w$.

Il est généralement plus commode de se donner la relation qui existe entre les quatre paramètres dont dépend la droite D dans l'espace ou mieux la relation homogène

$$F(\alpha, \beta, \gamma, l, m, n) = 0 \tag{18}$$

à laquelle doivent satisfaire ses six coordonnées plückériennes, en outre de la relation fondamentale (n° 111)

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0. \tag{19}$$

Cette relation (18) s'appelle l'*équation du complexe*.

Lorsqu'elle est algébrique et de degré $p$, on dit que *le complexe est algébrique et d'ordre p*.

Nous avons déjà étudié, au n° 125, les complexes du premier ordre ou *complexes linéaires*, qui sont en relation étroite avec les systèmes de vecteurs. Nous n'y reviendrons pas.

395. On appelle *cône du complexe relativement à un point* P *le lieu des droites du complexe qui passent par ce point.*

Ces droites engendrent bien un cône, car en les astreignant à passer par P.

on les assujettit à deux conditions nouvelles, de sorte qu'elles ne dépendent plus que d'un seul paramètre ([1]).

Quand on connaît l'équation (18), il est facile de former l'équation du cône du complexe, qui a pour sommet $M_0(x_0, y_0, z_0)$. En effet, soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de ce cône. Prenons pour coordonnées de la droite $M_0M$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M_0M}$, soit

$$(20)\quad \begin{cases} \alpha = x - x_0, & \beta = y - y_0, & \gamma = z - z_0, \\ l = y_0 z - z_0 y, & m = z_0 x - x_0 z, & n = x_0 y - y_0 x. \end{cases}$$

Écrivons que ces coordonnées satisfont à (18) :

$$(21)\quad F(x - x_0, y - y_0, z - z_0, y_0 z - z_0 y, z_0 x - x_0 z, x_0 y - y_0 x) = 0.$$

Si, dans cette équation, on regarde $x, y, z$ comme les coordonnées courantes, elle représente *l'équation du cône de sommet* $M_0$.

Si l'on veut pouvoir considérer des points à l'infini, il suffit d'introduire des coordonnées ponctuelles homogènes, en remplaçant $x, y, z, x_0, y_0, z_0$ par $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}, \frac{x_0}{t_0}, \frac{y_0}{t_0}, \frac{z_0}{t_0}$. Si l'on multiplie les six coordonnées plückériennes par $tt_0$, pour les rendre entières en $x, y, \ldots, t_0$, les formules (20) prennent la forme ([2])

$$(22)\quad \begin{cases} \alpha = xt_0 - x_0 t, & \beta = yt_0 - y_0 t, & \gamma = zt_0 - z_0 t, \\ l = y_0 z - z_0 y, & m = z_0 x - x_0 z, & n = x_0 y - y_0 x. \end{cases}$$

En portant dans (18), on obtient l'équation homogène du cône de sommet $M_0$, qui peut être un cylindre si l'on suppose $t_0 = 0$.

Lorsque F est algébrique et d'ordre $p$, il en est de même de l'équation (21). Donc, *si un complexe est algébrique, il en est de même de tous ses cônes, dont le degré est égal à l'ordre du complexe*.

396. On appelle *courbe du complexe relativement à un plan* $\Pi$ *l'enveloppe des droites du complexe situées dans ce plan* ([3]). C'est, en somme, l'élément corrélatif du cône précédent.

Cherchons l'équation tangentielle de la courbe du complexe située dans le plan $\Pi_0(u_0, v_0, w_0, r_0)$. Les coordonnées plückériennes de la droite D située à l'intersection de ce plan et d'un plan quelconque $\Pi(u, v, w, r)$ sont (*cf.*

---

([1]) On peut, plus généralement, considérer des surfaces réglées quelconques appartenant au complexe, c'est-à-dire dont les génératrices font partie du complexe.

([2]) Cette forme convient aussi bien à des coordonnées tétraédriques; mais alors, les coordonnées plückériennes n'ont plus la même signification vectorielle (*cf.* Chapitre VIII, Exercice proposé n° 31).

([3]) On peut, plus généralement, considérer des courbes gauches quelconques appartenant au complexe, c'est-à-dire dont les tangentes font partie du complexe.

Chap. VIII, Exercice résolu n° 3) :

$$\alpha = v_0 w - w_0 v, \qquad \beta = w_0 u - u_0 w, \qquad \gamma = u_0 v - v_0 u,$$
$$l = r_0 u - u_0 r, \qquad m = r_0 v - v_0 r, \qquad n = r_0 w - w_0 r.$$

Portant dans (18) et regardant $u$, $v$, $w$, $r$ comme les coordonnées courantes, on a l'équation cherchée. On en déduit que, *si le complexe est algébrique et d'ordre p, toute courbe plane lui appartenant est algébrique et de classe p.*

Cette propriété et celle du numéro précédent, qui est sa corrélative, ont déjà été vérifiées dans le cas des complexes linéaires (n° 125).

# CHAPITRE XXVIII.

## TRANSFORMATIONS.

397. Généralités sur les transformations. — Transformer une figure $f$, c'est trouver une autre figure F telle qu'*aux éléments de $f$ correspondent des éléments bien déterminés de* F *et réciproquement.*

L'utilité d'une telle transformation résulte de ce que si l'on connaît une relation entre certains éléments de l'une des figures, on peut en déduire une relation entre les éléments homologues de l'autre figure. Autrement dit, *de toute propriété connue de $f$, on peut déduire une propriété nouvelle de* F. Inversement, si l'on veut reconnaître l'exactitude d'une propriété soupçonnée pour $f$, on peut quelquefois, par une transformation judicieuse de $f$, rendre la propriété évidemment exacte ou évidemment fausse pour F, d'où l'on conclut à la validité ou à la non-validité de l'hypothèse faite.

*Les transformations apparaissent ainsi comme un moyen d'investigation très commode* (1) et d'ailleurs des plus puissants.

Les éléments entre lesquels est établie la correspondance qui sert de définition à la transformation peuvent être de nature quelconque. On peut faire correspondre un point à un point, ou à une droite (dans le plan), ou à un plan (dans l'espace), ou bien une droite à une droite, un plan à un plan, une

(1) On peut objecter que les propriétés déduites de propriétés déjà connues, par une transformation, *ne sont pas, en vérité, des propriétés nouvelles.* Mais, cette objection peut s'appliquer à toutes les Mathématiques. Quand un mathématicien découvre une propriété qu'il qualifie de nouvelle, il ne fait, en réalité, que transformer, suivant les règles de la logique, les propriétés connues qui lui ont servi de point de départ. Il ne retrouve jamais, au bout de ses raisonnements, que ce qu'il y a mis au début. *Le mathématicien n'invente rien, il transforme.* Cela ne veut pas dire que sa besogne soit inutile, car ses transformations lui permettent de *prévoir* certains événements d'ordre mathématique, qui fussent, sans cela, demeurés ignorés, *de même que le physicien* peut prévoir, par ses déductions, un événement naturel.

droite de l'espace à une sphère, un point de l'espace à un cercle d'un plan (*cf.* Chap. XII, Exercice proposé n° 19, et Chap. XXXVI, Exercice proposé n° 34), etc.

En général, *la transformation est continue*, c'est-à-dire qu'à deux éléments voisins de $f$ correspondent deux éléments voisins de F. Ces éléments homologues doivent toujours, dans ce cas, dépendre du *même nombre de paramètres*, ainsi que cela est vérifié dans tous les exemples énumérés ci-dessus.

Une transformation étant définie par la correspondance entre des éléments $e$ de la figure $f$ et des éléments E de la figure F, on peut, en considérant des assemblages convenables d'éléments $e$ et les assemblages homologues d'éléments E, obtenir une correspondance entre des éléments nouveaux $e'$ et E', définis précisément au moyen des assemblages précédents.

En particulier, on peut être amené à considérer des *courbes* ou des *surfaces homologues*.

On dit qu'une transformation est une *transformation de contact* si à deux courbes ou surfaces tangentes de la figure $f$, correspondent toujours deux courbes ou surfaces tangentes de la figure F.

398. Transformations ponctuelles. — Une transformation est dite *ponctuelle*, *lorsqu'elle fait correspondre des points à des points*.

On peut, dans ce cas, prendre comme figures $f$ et F, soit deux lignes (en particulier des lignes droites), soit deux surfaces (en particulier des plans), soit deux espaces (représentés, par exemple, par deux trièdres de coordonnées). Ces deux figures peuvent être distinctes ou confondues. Dans le deuxième cas, la transformation est dite *involutive* ou *réciproque*, si la relation entre les points homologues $m$ et M est symétrique, c'est-à-dire si, lorsque $m$ vient en M, M vient réciproquement en $m$. En outre, on appelle *point double*, tout point qui se confond avec son homologue.

Analytiquement, dans le cas d'une correspondance entre deux espaces, représentés respectivement par les axes $oxyz$ et OXYZ, la transformation ponctuelle continue la plus générale est définie par les formules

$$(1) \qquad X = f(x, y, z), \qquad Y = g(x, y, z), \qquad Z = h(x, y, z),$$

où $f$, $g$, $h$ désignent trois fonctions continues quelconques de $x$, $y$, $z$. Au point $m$ $(x, y, z)$ de l'espace $f$, on fait correspondre le point M(X, Y, Z) de l'espace F. Inversement, si l'on se donne M, on

détermine $m$ en résolvant les équations (1) par rapport à $x, y, z$ [1].

Si les figures $f$ et F sont deux surfaces, on a des formules analogues; mais, il n'y a plus que deux coordonnées $x$, $y$ et deux coordonnées X, Y. Ces coordonnées qui seront, en général, des coordonnées curvilignes (n° 49), peuvent être des coordonnées cartésiennes quand $f$ et F sont des plans.

Si $f$ et F sont deux lignes, il n'y a plus qu'une seule coordonnée $x$ et une seule coordonnée X.

En somme, au point de vue analytique, une transformation ponctuelle n'est autre qu'*un changement de variables*.

Lorsque le point $m$ décrit une ligne $c$ ou une surface $s$, le point M décrit la ligne homologue C ou la surface homologue S.

Théorème. — *Toute transformation ponctuelle continue est une transformation de contact.*

Soient deux courbes $c$ et $c_1$ tangentes en $m$ et les deux courbes homologues C et $C_1$. Je dis que celles-ci sont tangentes au point M, homologue de $m$.

En effet, soient $dx$, $dy$, $dz$ les différentielles de $x, y, z$, quand on se déplace sur $c$, à partir de $m$. Soient $\delta x, \delta y, \delta z$ les différentielles analogues pour $c_1$. D'après l'hypothèse, il y a proportionnalité entre les deux groupes et l'on a des égalités de la forme

$$\delta x = \lambda\, dx, \qquad \delta y = \lambda\, dy, \qquad \delta z = \lambda\, dz. \tag{2}$$

Si maintenant on se déplace sur C, à partir de M, les différentielles de X, Y, Z sont obtenues, en fonctions de $dx$, $dy$, $dz$, par différentiation totale des formules (1) :

$$dX = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz, \qquad dY = \ldots, \qquad dZ = \ldots.$$

---

[1] Il peut évidemment y avoir plusieurs solutions et la correspondance peut ne pas être univoque. Pour lever toute ambiguïté, on peut, soit restreindre le domaine des espaces $f$ et F, soit choisir deux points homologues particuliers $m_0$ et $M_0$ et suivre la correspondance par continuité à partir de ces deux points.

Quand les fonctions $f$, $g$, $h$ sont rationnelles et que les équations (1) peuvent, en outre, être résolues rationnellement, on dit que la transformation est *birationnelle*. Elle est évidemment biunivoque.

De même, les différentielles sur $C_1$ sont

$$\delta X = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z, \qquad \delta Y = \ldots, \qquad \delta Z = \ldots$$

Si l'on tient compte de (2), on a évidemment

$$\delta X = \lambda\, dX, \qquad \delta Y = \lambda\, dY, \qquad \delta Z = \lambda\, dZ;$$

donc, C et $C_1$ sont tangentes (¹). C.Q.F.D.

399. La transformation est dite *conforme si elle conserve les angles*, c'est-à-dire si l'angle sous lequel se coupent deux courbes $c$ et $c_1$ en un point commun $m$ est égal à l'angle sous lequel se coupent les courbes homologues C et $C_1$ au point homologue M.

THÉORÈME. — *Pour qu'une transformation soit conforme, il faut et il suffit que les éléments linéaires homologues soient proportionnels.*

Nous entendons par élément linéaire de $f$ la distance $ds$ de deux points $m$ et $m'$ infiniment voisins et, par élément linéaire homologue, la distance $dS$ des points homologues M et M' (*cf.* t. I, n° 172).

1° *La condition est nécessaire.* — Soient, en effet, $m$, $p$, $q$ trois points infiniment voisins de $f$ et M, P, Q les points homologues de F. Les côtés du triangle $mpq$ peuvent être considérés comme des éléments de trois courbes et les côtés du triangle MPQ comme les éléments homologues des trois courbes homologues. Par hypothèse, les angles du second triangle sont égaux à ceux du premier; les deux triangles sont donc semblables et ont, par suite, leurs côtés proportionnels.

2° *La condition est suffisante.* — Car, si elle est remplie, les deux triangles précédents sont encore semblables comme ayant leurs côtés proportionnels. Ils ont, par suite, leurs angles homologues égaux.

La démonstration précédente nous fait voir, en somme, que, dans une transformation conforme, *deux figures homologues infiniment petites sont semblables.* Dans le voisinage du point $m$ et du point homologue M, la transformation est une similitude. Mais, *le rapport de similitude varie, en général, avec m.* Il dépend de la position des petites régions envisagées.

---

(¹) Si le lecteur est gêné par l'emploi des différentielles, il pourra introduire les équations paramétriques des courbes $c$ et $c_1$, soit

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \qquad \text{et} \qquad x_1 = f_1(t), \quad y_1 = g_1(t), \quad z_1 = h_1(t).$$

En portant dans (1), il obtiendra celles de C et $C_1$ et leur appliquera le théorème des fonctions composées (t. I, n° 130).

Ce théorème est un critérium très commode pour reconnaître les transformations conformes. Il suffit, en effet, de calculer $ds^2$ et $dS^2$ en fonction quadratique des différentielles $dx$, $dy$, $dz$ [1]. Le rapport $\lambda = \frac{dS^2}{ds^2}$ doit être indépendant de ces différentielles, tout en pouvant dépendre de $x$, $y$, $z$. La racine carrée n'est autre que le rapport de similitude dont il est question plus haut.

400. Dans le cas particulier où $f$ est un plan et F une surface quelconque, on dit que la transformation conforme réalise une *carte de la surface* F *sur le plan f*.

Si $x$, $y$ sont des coordonnées cartésiennes rectangulaires du plan $f$, l'élément linéaire de la surface F doit alors se mettre sous la forme

$$dS^2 = \lambda\,(dx^2 + dy^2),$$

$\lambda$ étant une certaine fonction de $x$, $y$.

Dans le cas particulier où F est une sphère, les considérations ci-dessus trouvent leur application à la construction des *cartes géographiques*.

Lorsque $f$ et F sont deux surfaces et que le rapport $\lambda$ est égal à 1, les éléments linéaires homologues sont égaux et, en les intégrant le long de deux courbes homologues, on voit que deux arcs homologues finis quelconques ont la même longueur. On dit, dans ce cas, que *les deux surfaces sont applicables* l'une sur l'autre. Chacune peut résulter de l'autre par déformation.

401. Transformations homographiques. — *On appelle transformation homographique, toute transformation définie par une substitution linéaire entre les coordonnées cartésiennes homogènes* [2] *des points homologues*, soit

$$(3)\qquad \begin{cases} X = ax + by + cz + et, \\ Y = a'x + b'y + c'z + e't, \\ Z = a''x + b''y + c''z + e''t, \\ T = a'''x + b'''y + c'''z + e'''t, \end{cases}$$

le déterminant des coefficients étant différent de zéro (t. I, nº 297). On peut dire aussi que les fonctions $f$, $g$, $h$ des formules (1) doivent être *trois fonctions homographiques, de même dénominateur*.

---

[1] Par exemple, si $x, y, z$ sont des coordonnées cartésiennes rectangulaires, on a : $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

[2] Ou tétraédriques.

La correspondance entre $m$ et M est *biunivoque*, c'est-à-dire qu'à un point $m$ correspond un seul point M et inversement.

Mais, cette propriété n'est pas caractéristique, car il existe des transformations birationnelles non homographiques, comme, par exemple, l'inversion (n° 421).

Théorème. — *Toute courbe ou surface algébrique a pour homologue une courbe ou surface algébrique de même degré.*

Cela résulte de ce que les formules (3) transforment toute équation algébrique en $x$, $y$, $z$, $t$ en une équation algébrique de même degré en X, Y, Z, T.

En particulier, *une droite ou un plan se transforment en une droite ou en un plan.*

La tangente à une courbe ou le plan tangent à une surface se transforment suivant la tangente à la courbe transformée ou suivant le plan tangent à la surface transformée.

Théorème. — *Les transformations homographiques conservent le rapport anharmonique.*

En effet, soient quatre points en ligne droite $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$. Leurs coordonnées sont de la forme $x+\lambda x'$, $y+\lambda y'$, $z+\lambda z'$, $t+\lambda t'$, où $\lambda$ doit prendre successivement quatre valeurs $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$, dont le rapport anharmonique est égal au rapport anharmonique des quatre points. En portant dans (3), on obtient des expressions de la forme $X+\lambda X'$, $Y+\lambda Y'$, $Z+\lambda Z'$, $T+\lambda T'$. Ceci prouve d'abord que les quatre points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ sont, en ligne droite, ce que nous savions déjà; et ensuite que leur rapport anharmonique est, lui aussi, égal au rapport anharmonique des $\lambda$, donc égal au rapport anharmonique des quatre points $m$ [1]. C.Q.F.D.

Cette propriété fondamentale est *caractéristique* des transformations homographiques. Elle peut servir à leur définition et a été employée par certains géomètres (par exemple Chasles) pour édifier une théorie purement géométrique desdites transformations.

On en conclut, en s'appuyant sur les propriétés des faisceaux de

[1] Les points $m$ et M décrivent donc des divisions homographiques (n° 137).

droites ou de plans que les rapports anharmoniques de ces faisceaux sont aussi conservés dans toute transformation homographique ([1]). Il en est de même du rapport anharmonique de quatre points d'une conique, qui se ramène à un rapport de faisceau et de quatre tangentes à une conique, qui se ramène à un rapport de points en ligne droite (n° 368).

402. La transformation homographique la plus générale dans l'espace *dépend de* 15 *paramètres*, à savoir les rapports des 16 coefficients des formules (3) à l'un d'entre eux ([2]).

On peut en profiter pour *se donner arbitrairement des couples de points homologues.*

Si l'on se donne à l'avance les deux points *m* et M, il en résulte trois relations du premier degré entre les 15 paramètres ci-dessus, obtenues en écrivant que les coordonnées homogènes du point M sont proportionnelles aux valeurs données par les formules (3) ([3]). *La transformation est donc complètement déterminée quand on se donne* 5 *couples de points homologues.* Il faut toutefois que le système linéaire à 15 inconnues auquel on est conduit ait son déterminant différent de zéro, afin que la solution soit unique. Pour cela, il faut que les points donnés ne se trouvent pas dans certaines positions particulières, qui rendent le système incompatible ou indéterminé. Par exemple, *il ne faut pas que trois des points m soient en ligne droite.* Si les points homologues n'y sont pas, le système est sûrement incompatible, d'après ce que nous avons vu au n° 401; s'ils y sont, il est indéterminé.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces conditions de compatibilité et nous nous bornerons à énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Il existe toujours au moins une transformation homographique de l'espace qui permet de faire correspondre n points donnés de la seconde figure à n points donnés de la pre-*

([1]) On en conclut que ces faisceaux homologues de droites ou de plans sont des faisceaux homographiques.

([2]) On peut multiplier ces 16 coefficients par un même facteur, sans changer le point M, donc sans changer la transformation.

([3]) On peut, si l'on veut, introduire un facteur de proportionnalité comme inconnue auxiliaire. On a alors quatre équations au lieu de trois; mais, on a une inconnue de plus.

*mière figure, pourvu que n ne dépasse pas 5 et qu'en outre, si les points donnés ont certaines configurations particulières, les propriétés fondamentales* (¹) *de la conservation des droites, des plans et du rapport anharmonique, soient toujours respectées.*

Ce théorème est très important au point de vue des applications que l'on fait habituellement, en géométrie, des transformations homographiques. Il permet souvent de simplifier les figures, en les transformant homographiquement de manière que certains de leurs points occupent, après la transformation, des positions convenablement choisies. C'est ainsi qu'on peut *envoyer un, deux ou trois points à l'infini* et, en particulier, *transformer un plan donné en plan de l'infini*. On peut aussi *envoyer un certain nombre de points sur le cercle imaginaire de l'infini*. Les coniques qui passaient par deux de ces points *deviennent alors des cercles*. On peut même choisir la transformation de manière qu'*une conique donnée $\gamma$ devienne le cercle imaginaire de l'infini* $\Gamma$ (ou, plus généralement, une autre conique donnée). Il suffit, en effet, de prendre 5 points sur $\gamma$ et de les transformer en 5 points de $\Gamma$; cela est possible, d'après le théorème général énoncé ci-dessus, pourvu que le rapport anharmonique de quatre quelconques des 5 points soit conservé (²). *Les quadriques qui passaient par $\gamma$ deviennent alors des sphères.*

Si l'on transforme deux points $m$ et $m'$ en deux points M et M' conjugués par rapport à $\Gamma$, deux droites $d$ et $d'$, qui passaient respectivement par $m$ et $m'$, deviennent *deux droites rectangulaires*.

Si l'on transforme en droites isotropes (³) les tangentes à une conique donnée issues d'un point $\varphi$, le point $\Phi$ est un *foyer de la nouvelle conique*.

Quand on a choisi sa transformation, on étudie les propriétés de la nouvelle figure; puis, on les interprète au point de vue projectif et on les transporte à la figure primitive. Ou bien, on suit la marche inverse : on transforme une propriété projective soupçonnée de $f$ en

---

(¹) Ces propriétés constituent *les propriétés projectives*.

(²) Le faisceau $m_1(m_2 m_3 m_4 m_5)$, par exemple, doit avoir même rapport anharmonique que le faisceau $M_1(M_2 M_3 M_4 M_5)$.

(³) En envoyant un point de chacune d'elles sur le cercle imaginaire de l'infini.

une propriété métrique simple de F. Autrement dit, on applique les principes généraux exposés au n° 397.

Bien entendu, quand on utilise, comme il vient d'être expliqué, une transformation homographique, il est complètement inutile de connaître les formules (3) qui la définiraient. On a uniquement besoin de connaître les couples de points homologues et la conservation des propriétés projectives.

403. En *géométrie plane*, toutes les considérations du numéro précédent sont valables, avec cette seule différence que la transformation homographique générale dépend seulement de 8 *paramètres*. Par contre, la connaissance de deux points homologues équivaut seulement à deux équations linéaires entre ces 8 paramètres. Il s'ensuit que la transformation est généralement déterminée par *quatre couples de points homologues*. Le théorème général énoncé pour l'espace s'applique avec la condition $n \leq 4$.

Quant à la transformation homographique entre deux droites, elle a été étudiée en détail au Chapitre IX; nous avons vu qu'elle est déterminée par *trois* couples de points homologues (n° 137).

404. Points doubles. — Si les systèmes de coordonnées auxquels sont rapportés les points $m$ et M sont les mêmes, on obtient les points doubles en écrivant que X, Y, Z, T sont proportionnels à $x, y, z, t$, ce qui donne, en appelant S le facteur de proportionnalité :

$$(4)\qquad \begin{cases} (a - S)x + by + cz + et = 0, \\ a'x + (b' - S)y + c'z + e't = 0, \\ a''x + b''y + (c'' - S)z + e''t = 0, \\ a'''x + b'''y + c'''z + (e''' - S)t = 0. \end{cases}$$

Comme les coordonnées homogènes $x, y, z, t$ ne peuvent être toutes nulles, on doit avoir (t. I, n° 292) :

$$(5)\qquad \Delta(S) \equiv \begin{vmatrix} a - S & b & c & e \\ a' & b' - S & c' & e' \\ a'' & b'' & c'' - S & e'' \\ a''' & b''' & c''' & e''' - S \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est appelée *équation en* S *de la transformation*. Elle est du quatrième degré. A chacune de ses racines, correspond, en général, une seule solution homogène du système (4), c'est-à-dire un seul point double.

Donc, *une transformation homographique de l'espace possède, en général, quatre points doubles.*

En *Géométrie plane*, il y a une variable de moins et *le nombre des points doubles est égal à trois.*

Sur la droite, il est égal à deux (n° 139).

405. Homothétie. — Pour être complète, la théorie des points doubles devrait donner lieu à une discussion de l'équation (5) et du système (4). Cette discussion très longue et quelque peu fastidieuse ne saurait trouver place ici [1]. Nous nous bornerons à étudier le cas particulier suivant : *Y a-t-il des transformations homographiques de l'espace donnant lieu à un plan de points doubles?*

Prenons ce plan pour plan $t = 0$, c'est-à-dire pour plan de l'infini, si nous supposons des coordonnées cartésiennes [2]. Le système (4) doit être satisfait, quels que soient $x$, $y$, $z$, pour $t = 0$. Ceci nous donne immédiatement les conditions nécessaires et suffisantes

$$a = b' = c'' = S,$$
$$b = c = a' = c' = a'' = b'' = a''' = b''' = c''' = 0.$$

La transformation cherchée est donc définie par les formules

$$X = Sx + et, \qquad Y = Sy + e't, \qquad Z = Sz + e''t, \qquad T = e'''t.$$

Employons des coordonnées cartésiennes non homogènes, c'est-à-dire faisons $t = T = 1$; changeons, en outre, les notations, en remplaçant $e$, $e'$, $e''$, par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$: il vient

$$(6) \qquad X = \alpha + Sx, \qquad Y = \beta + Sy, \qquad Z = \gamma + Sz.$$

Ces équations ont une interprétation géométrique simple. Si P désigne le point de coordonnées ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$), elles équivalent à

$$(7) \qquad \overrightarrow{OM} = S.\overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OP},$$

c'est-à-dire à *une homothétie de centre* O *et de rapport* S, *suivie de la translation* $\overrightarrow{OP}$. En Géométrie élémentaire, on apprend que ces deux opérations équivalent à *une seule homothétie* de rapport S. C'est ce qu'il nous est facile de vérifier par le calcul.

---

[1] On peut la faire en suivant une marche analogue à celle du n° 471 pour les directions principales d'une quadrique, c'est-à-dire en prenant chaque point double, dès qu'il est obtenu, pour l'un des sommets du tétraèdre de référence.

[2] On peut toujours se ramener à ce cas par une transformation homographique convenable (n° 402), qui se superpose dès lors à la transformation particulière cherchée.

Soit $C(x_0, y_0, z_0)$ le centre d'homothétie cherchée. On doit avoir

$$\overrightarrow{CM} = S.\overrightarrow{Cm}; \tag{8}$$

d'où

$$X - x_0 = S(x - x_0), \quad \dots$$

En identifiant avec (6), on trouve

$$x_0 = \frac{\alpha}{1 - S}, \quad y_0 = \frac{\beta}{1 - S}, \quad z_0 = \frac{\gamma}{1 - S}. \tag{9}$$

Telles sont *les coordonnées du centre d'homothétie.*

Nous pouvons finalement énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Toute transformation homographique possédant un plan* Π *de points doubles se ramène à une homothétie, par une transformation homographique supplémentaire envoyant le plan* Π *à l'infini.*

Si l'on ne fait pas cette seconde transformation, la première porte le nom d'*homologie* (¹). Le plan Π s'appelle *plan d'homologie.* Le point homologue de C, qui est le seul point double extérieur à Π, s'appelle *centre d'homologie.*

Si l'on interprète projectivement l'égalité (8), on voit que l'homologie peut être définie directement de la manière suivante :

*L'homologue* M *de m est un point de* CM *tel que, si* C' *désigne le point de rencontre de cette droite avec* Π, *le rapport anharmonique* (CC'M*m*) *doit avoir une valeur constante donnée* S, appelée *coefficient d'homologie.*

406. Toutes les propriétés spéciales de l'homologie, et, comme cas particulier, de l'homothétie, résultent de ce que deux courbes ou surfaces homologues ont toujours en commun leurs points de rencontre avec le plan Π, puisque ces points sont à eux-mêmes leurs propres homologues.

C'est ainsi que deux droites ou plans homologues se coupent dans le plan Π (et, dans le cas de l'homothétie, sont parallèles). En particulier, les tangentes (ou plans tangents) en deux points homologues de deux courbes (ou surfaces) homologues se coupent dans le plan Π (et, dans le cas de l'homothétie, sont parallèles).

407. *Deux courbes ou surfaces homothétiques ont mêmes direc-*

---

(¹) *Une homologie est donc la transformée homographique d'une homothétie.*

*tions asymptotiques*, puisqu'elles coupent le plan de l'infini aux mêmes points.

La réciproque n'est vraie que dans le cas des courbes ou surfaces du second degré. Démontrons d'abord le théorème suivant :

Théorème. — *Si deux quadriques ont mêmes directions asymptotiques, elles sont homothétiques de deux manières différentes.*

Soient les deux quadriques

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f_1(x, y, z) = 0, \tag{10}$$

qui ont mêmes directions asymptotiques. Les deux polynomes $f$ et $f_1$ ont donc mêmes termes du second degré $\varphi(x, y, z)$. Cherchons à déterminer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, S de manière que l'équation

$$f(\alpha + Sx, \beta + Sy, \gamma + Sz) = 0 \tag{11}$$

soit identique à la seconde équation (10). Développons (11) par la formule de Taylor [1] (t. I, n° 132) :

$$f(\alpha, \beta, \gamma) + S(xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma) + S^2\varphi(x, y, z) = 0. \tag{12}$$

Identifions avec

$$f_1 \equiv \varphi(x, y, z) + C_1 x + C'_1 y + C''_1 z + D_1 = 0; \tag{13}$$

nous obtenons, pour déterminer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, S,

$$f'_\alpha = SC_1, \qquad f'_\beta = SC'_1, \qquad f'_\gamma = SC''_1, \tag{14}$$

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = S^2 D_1. \tag{15}$$

Pour résoudre ce système, on peut tirer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ de (14) en fonction de S, puis porter dans (15). On obtient ainsi une équation du second degré en S, qui conduit, par suite, à deux solutions, conformément à l'énoncé.

408. Regardons la question d'un peu plus près.

1° *Cas de deux quadriques à centre unique.* — Prenons pour axes trois diamètres conjugués de la première quadrique; nous

---

[1] On peut aussi utiliser la formule (20) du n° 307 du Tome I, en imaginant que $f$ a été rendu homogène et considérant $F(\alpha + Sx, \beta + Sy, \gamma + Sz, 1 + 0)$.

avons (n° 465)

(16) $$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + D.$$

Introduisons les coordonnées $a$, $b$, $c$ du centre $O_1$ de la seconde quadrique. Nous avons (n° 461)

$$C_1 = -2Aa, \qquad C'_1 = -2A'b, \qquad C''_1 = -2A''c.$$

Les équations (14) nous donnent alors

(17) $$\alpha = -Sa, \qquad \beta = -Sb, \qquad \gamma = -Sc.$$

Portons dans (15), il vient

(18) $$S^2 = -\frac{D}{Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 - D_1}.$$

*Les deux rapports d'homothétie sont donc égaux et de signes contraires.*

Cherchons les centres d'homothétie. Il nous suffit, pour cela, d'appliquer les formules (9) et (17); ce qui donne

(19) $$x_0 = \frac{Sa}{S-1}, \qquad y_0 = \frac{Sb}{S-1}, \qquad z_0 = \frac{Sc}{S-1}.$$

On en déduit que *le centre* C, *qui correspond au rapport* S, *est tel que*

(20) $$\frac{\overrightarrow{CO}}{\overrightarrow{CO_1}} = S.$$

*Les deux centres d'homothétie* C *et* C' *sont conjugués harmoniques par rapport aux centres* O *et* $O_1$ *des deux quadriques*, puisque les deux valeurs de S sont égales et de signes contraires.

Nous venons de retrouver des propriétés qui sont bien connues, en Géométrie élémentaire, dans le cas de deux sphères. (*Cf.* Exercice proposé n° 15.)

*Remarque.* — Si la quadrique $(f)$ est *un cône*, on a $D = 0$, donc $S = 0$; puis, d'après (19), $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. L'homothétie a pour centre O et un rapport nul. C'est une *homothétie singulière*. Tout point à distance finie de $(f_1)$ a son homologue en O; par contre, un point à l'infini de $(f_1)$ a pour homologues tous les points de la

génératrice du cône $(f)$ qui passe par ce point à l'infini. Une telle homothétie n'a évidemment aucun intérêt géométrique.

Si la quadrique $(f_1)$ est aussi un cône, son centre est situé sur elle, ce qui entraîne la nullité du dénominateur de (18) et l'indétermination de S. Mais ce résultat est évident géométriquement, car *deux cônes quelconques ayant leurs génératrices parallèles sont homothétiques par rapport à tout point de leur ligne des sommets.*

2° *Cas de deux paraboloïdes.* — En choisissant convenablement les directions des axes, on peut mettre $f$ et $f_1$ sous la forme (nos 457 et 458)

$$f \equiv Ax^2 + A'y^2 + Cx + C'y + C''z + D,$$
$$f_1 \equiv Ax^2 + A'y^2 + C_1x + C'_1y + C''_1z + D_1.$$

Les équations (14) s'écrivent alors

$$2A\alpha + C = SC_1, \qquad 2A'\beta + C' = SC'_1, \qquad C'' = SC''_1.$$

La troisième donne S; puis, les deux premières donnent $\alpha$ et $\beta$; enfin, en portant dans (15), on obtient $\gamma$. Il n'y a plus qu'une solution. Donc, *deux paraboloïdes qui ont mêmes directions asymptotiques sont homothétiques d'une seule manière.*

Nous ne pousserons pas plus loin la discussion, le cas de deux cylindres se ramenant à celui de deux coniques et le cas de deux couples de plans étant évident et sans intérêt.

409. Tout ce qui vient d'être dit aux nos 405 à 408 s'applique à la *Géométrie plane* par simple suppression d'une coordonnée. On trouve ainsi que toute transformation homographique admettant une droite $\Delta$ de points doubles se ramène à une homothétie, en envoyant $\Delta$ à l'infini. Si $\Delta$ est à distance finie, la transformation s'appelle *homologie*, $\Delta$ étant l'*axe d'homologie.*

Les propriétés de l'homologie et de l'homothétie en Géométrie plane sont tout à fait analogues à celles de l'espace. En particulier, on démontre, comme aux nos 407 et 408, que *deux coniques ayant mêmes directions asymptotiques sont homothétiques de deux manières différentes, si ce sont des ellipses ou des hyperboles, d'une seule manière, si ce sont des paraboles.*

410. *Si deux coniques de l'espace ont mêmes directions*

*asymptotiques, elles sont également homothétiques.* On peut, en effet, par la translation de l'une d'elles, les ramener à être dans le même plan, puisque leurs plans sont parallèles. On se trouve alors dans le cas précédent et l'on sait, d'autre part (n° 405), qu'une homothétie suivie d'une translation équivaut à une homothétie.

Une conséquence immédiate est la suivante :

*Les sections, par deux plans parallèles, d'une même quadrique ou de deux quadriques homothétiques sont deux coniques homothétiques.* Car ces coniques ont mêmes points à l'infini. On peut, en particulier, appliquer ceci à une quadrique et à son cône des directions asymptotiques.

411. Transformations quadratiques. — *On appelle transformation quadratique une transformation telle que les coordonnées homogènes* X, Y, Z, T *du point* M *puissent s'exprimer sous forme de polynomes homogènes et du second degré par rapport aux coordonnées homogènes* $x$, $y$, $z$, $t$ *du point homologue* $m$ *et vice versa.*

La définition est, comme on le voit, analogue à celle des transformations homographiques; la seule différence est que les formes linéaires (3) doivent être remplacées par des formes quadratiques.

Nous ne pouvons pas entreprendre ici une étude complète de ces transformations. Nous nous bornerons à en esquisser la théorie dans le seul cas de la Géométrie plane, sauf en ce qui concerne l'*inversion*, que nous étudierons aussi dans l'espace, à cause de son importance particulière.

La transformation quadratique plane la plus générale est définie par

$$(21) \qquad X = f(x, y, z), \qquad Y = g(x, y, z), \qquad Z = h(x, y, z),$$

$f$, $g$, $h$ désignant trois formes quadratiques en $x$, $y$, $z$, telles qu'en résolvant les équations (21) par rapport à $x$, $y$, $z$, on obtienne, à un facteur commun près, une solution rationnelle ([1]) en X, Y, Z. Il revient au même de dire que les deux coniques, définies par les équations en $x$, $y$, $z$ :

$$(22) \qquad \begin{cases} Xh(x, y, z) - Zf(x, y, z) = 0, \\ Yh(x, y, z) - Zg(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

doivent se couper en un point $m$ dont les coordonnées puissent se calculer rationnellement en fonction de X, Y, Z. Or, deux coniques se coupent en quatre points. *Si les fonctions $f$, $g$, $h$ sont prises au hasard, à chaque*

([1]) Nous supposons, pour le moment, que cette solution est simplement rationnelle. Nous verrons ensuite qu'elle est nécessairement du second degré.

*point* M *correspondent donc quatre points m* et la transformation n'est pas birationnelle. Pour qu'elle le soit, il suffit que, parmi ces quatre points, un seul soit variable avec M, *les trois autres a, b, c étant fixes et, par conséquent, communs aux trois coniques*

$$f = 0, \qquad g = 0, \qquad h = 0. \tag{23}$$

On peut démontrer et nous admettrons que cela est aussi nécessaire.

412. Les points $a$, $b$, $c$, qui portent le nom de *points fondamentaux*, ne sauraient être en ligne droite, sans quoi les coniques (23) auraient une droite commune ; $f$, $g$, $h$ auraient un facteur linéaire commun et, en le supprimant, les formules (21) définiraient une transformation homographique.

Prenons le triangle $abc$, appelé *triangle fondamental*, pour triangle de référence. Les coniques (23) lui étant circonscrites, $f$, $g$, $h$ ne renferment pas de termes carrés et les formules (21) prennent la forme

$$\left\{\begin{aligned} X &= a\,yz + b\,zx + c\,xy, \\ Y &= a'yz + b'zx + c'xy, \\ Z &= a''yz + b''zx + c''xy, \end{aligned}\right. \tag{24}$$

$a, b, \ldots, c''$ étant neuf constantes, dont *le déterminant doit être supposé différent de zéro*, sans quoi X, Y, Z seraient liés par une relation linéaire.

Moyennant cette hypothèse, on peut tirer, de (24), $yz$, $zx$, $xy$ en fonctions linéaires et homogènes de X, Y, Z. Ces trois formes linéaires sont indépendantes (t. I, n° 296) : prenons-les comme nouvelles coordonnées du point M ; nous avons alors

$$yz = X, \qquad zx = Y, \qquad xy = Z; \tag{25}$$

d'où, au facteur $xyz$ près,

$$x = YZ, \qquad y = ZX, \qquad z = XY; \tag{26}$$

ou bien encore, toujours à un facteur près,

$$xX = 1, \qquad yY = 1, \qquad zZ = 1. \tag{27}$$

En définitive, nous voyons que, *si l'on choisit convenablement les triangles de référence t et* T, *auxquels sont rapportés respectivement les points m et* M, *la transformation quadratique la plus générale peut être définie par les formules* (25), (26) *ou* (27).

Si l'on revenait à des triangles de référence quelconques, les formules (25) et (26) nous montreraient que les coordonnées de chaque point s'expriment en fonction homogène et du second degré des coordonnées de l'autre, conformément à la définition générale du n° 411.

413. Énonçons maintenant quelques propriétés des transformations quadratiques.

Les triangles $t$ et T sont appelés, avons-nous dit, les *triangles fondamentaux;* leurs sommets $a$, $b$, $c$ et A, B, C sont les *points fondamentaux.*

Si $y$ et $z$ sont nuls, X, Y, Z le sont aussi, d'après (25). De même, si $Y = Z = 0$, on a $x = y = z = 0$, d'après (26). *L'homologue d'un point fondamental est donc indéterminé.*

Pour lever l'indétermination, on peut imaginer que $m$, par exemple, tende vers $a$, en suivant une droite déterminée $a\lambda$, définie par l'équation

$$vy + wz = 0. \tag{28}$$

On peut prendre pour coordonnées de $m$

$$x = 1, \qquad y = \lambda w, \qquad z = -\lambda v.$$

Portons dans (25) et divisons par $\lambda$; il vient

$$X = -\lambda vw, \qquad Y = -v, \qquad Z = w. \tag{29}$$

Si maintenant $\lambda$ tend vers zéro, de manière que $m$ tende vers $a$, nous voyons que M tend vers le point $A\lambda$ $(X = 0,\ Y = -v,\ Z = w)$. On peut donc, de ce point de vue, considérer que *$a$ a pour homologues tous les points du côté* BC. D'une façon plus précise, si $m$ tend vers $a$ en suivant la droite (28), M tend vers le point de rencontre de BC avec la droite

$$wY + vZ = 0. \tag{30}$$

Remarquons d'ailleurs que si, dans (29), on fait varier $\lambda$, le point M décrit la droite (30). Donc :

Théorème. — *L'homologue d'une droite $d$ passant par $a$ est une droite* D *passant par* A.

L'équation de l'une se déduit de l'équation de l'autre par simple échange des coefficients.

414. Théorème. — *L'homologue d'une droite quelconque $d$ tracée dans le plan du triangle $abc$ et ne passant par aucun de ses sommets est une conique* Γ *circonscrite à* ABC *et réciproquement.*

En effet, si $m$ décrit la droite $d$ d'équation

$$ux + vy + wz = 0, \tag{31}$$

M décrit la conique Γ

$$uYZ + vZX + wXY = 0, \tag{32}$$

qui est bien une conique quelconque circonscrite à ABC. Réciproquement, si M satisfait à (32), $m$ satisfait à (31).

On a évidemment un énoncé analogue, en échangeant les rôles des deux triangles fondamentaux.

Théorème. — *A toute courbe algébrique* $(s)$ *de degré* $m$ *et admettant les points fondamentaux* $a$, $b$, $c$ *pour points multiples d'ordres respectifs* $p_1$, $p_2$, $p_3$, *correspond une courbe algébrique* (S) *de degré*

$$2m-(p_1+p_2+p_3)$$

*et admettant les points fondamentaux* A, B, C *pour points multiples d'ordres respectifs* $m-(p_2+p_3)$, $m-(p_3+p_1)$, $m-(p_1+p_2)$.

On pourrait le démontrer par le calcul. La démonstration suivante nous paraît plus simple.

Coupons (S) par une droite D *quelconque*. Pour cela, il nous suffit de prendre les homologues des points de rencontre de $(s)$ avec la conique $\gamma$ homologue de D. Le nombre total de ces points est $2m$. Mais, il faut en enlever les points fondamentaux ([1]) $a$, $b$, $c$, qui comptent respectivement pour $p_1$, $p_2$, $p_3$ points dans l'intersection. Il ne reste que $2m-(p_1+p_2+p_3)$ points, dont les homologues appartiennent à la fois à D et à (S). Ce nombre est donc bien le degré de (S).

Si D passe par A, son homologue est une droite $d$ passant par $a$. Elle coupe $(s)$ en $m-p_1$ points autres que $a$; donc, D coupe (S) en $m-p_1$ points autres que A. En retranchant ce nombre du degré $2m-(p_1+p_2+p_3)$ précédemment trouvé, on obtient le nombre de points confondus en A, soit $m-(p_2+p_3)$. Le point A est donc bien un point multiple d'ordre $m-(p_2+p_3)$.

On peut le voir autrement en comptant les branches de (S) qui passent par A; cela nous donnera du même coup les tangentes à ces branches.

Si M tend vers A sur l'une d'elles, de tangente AT, $m$ tend vers un point $t$ de $bc$. Comme ce point doit appartenir à $(s)$, nous voyons que le nombre de branches cherché est égal au nombre de points de rencontre de $(s)$ avec $bc$, abstraction faite des points $b$ et $c$. Ce nombre est égal à $m-(p_2+p_3)$, puisque $b$ et $c$ comptent respectivement pour $p_2$ et $p_3$ points.

Ce raisonnement nous prouve que *les tangentes en* A *à* (S) *sont les droites homologues des droites joignant* $a$ *aux points de rencontre de* $(s)$ *avec* $bc$.

415. Transformation du second ordre. — Tout ce qui vient d'être dit dans les nos 411 à 414 s'applique sans qu'il soit nécessaire de supposer confondus les

---

([1]) Au point $a$, ne saurait correspondre un point $M_0$ commun à D et à (S), car suivant que $m$ tend vers $a$ sur $\gamma$ ou sur $(s)$, la position limite de M est différente (n° 413); elle ne peut donc être $M_0$. Ce raisonnement ne serait en défaut que si $\gamma$ et $(s)$ étaient tangentes en $a$; mais, cela n'est pas possible quelle que soit la droite D.

plans $abc$ et ABC. Autrement dit, la correspondance étudiée peut très bien être établie entre les points de deux plans différents.

Supposons maintenant, au contraire, ces deux plans confondus. On dit alors que la transformation quadratique précédente *est une transformation du second ordre lorsque les deux triangles fondamentaux sont confondus.*

Comme un changement de triangle de référence équivaut à une transformation homographique, quand on fait correspondre les points qui ont mêmes coordonnées dans les deux systèmes, on conclut immédiatement que *toute transformation quadratique équivaut à une transformation du second ordre suivie d'une transformation homographique.*

Théorème. — *Toute transformation du second ordre est involutive* (n° 398).

Car les formules (27) sont symétriques par rapport aux deux groupes de variables $x$, $y$, $z$ et X, Y, Z.

Théorème. — *Une transformation du second ordre est déterminée par son triangle fondamental et un couple de points homologues.*

D'après les formules (27), il semble que la transformation soit entièrement déterminée par son triangle fondamental, puisque ces formules ne renferment aucun paramètre. En réalité, il y a tout de même quelque chose d'arbitraire, c'est le point unitaire du système de coordonnées (n° 152). Si on le change, en le prenant n'importe où dans le plan, les coordonnées sont multipliées par des facteurs constants et les formules (27) prennent la forme

$$(33) \qquad x\mathrm{X} = \alpha, \qquad y\mathrm{Y} = \beta, \qquad z\mathrm{Z} = \gamma,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant trois constantes quelconques. Telles sont les formules qui définissent la transformation du second ordre la plus générale, quand on a fixé le point unitaire du système de coordonnées.

Dès lors, on voit bien qu'on peut se donner arbitrairement deux points homologues, car il suffit de prendre pour valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les produits de leurs coordonnées de même nom. Cela détermine évidemment la transformation.

Théorème. — *Une transformation du second ordre possède quatre points doubles.*

En effet, ils sont donnés, en revenant aux formules (27), par

$$(34) \qquad x^2 = 1, \qquad y^2 = 1, \qquad z^2 = 1;$$

d'où les quatre solutions $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, -1, -1)$.

On peut remarquer que les formules (27) sont caractérisées, dans le groupe des formules générales (33), par la condition que *le point unitaire soit un point double.*

Théorème — *La polaire d'un point m par rapport à toute conique* $\Sigma$ *passant par les quatre points doubles passent par le point homologue* M.

L'équation générale des coniques $\Sigma$ peut s'écrire

(35) $$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 = 0,$$

avec la condition

(36) $$\lambda + \mu + \nu = 0.$$

La polaire du point $m(x, y, z)$ a pour équation

(37) $$\lambda X x + \mu Y y + \nu Z z = 0.$$

Elle est bien satisfaite par les coordonnées du point M, en vertu de (27) et de (36).

On conclut de ce théorème une *définition géométrique de la transformation :*

*Le point* M *homologue de m est le point de concours* (n° 305) *des polaires de m par rapport aux coniques du faisceau ponctuel qui admet les points doubles pour points de base.*

Tout faisceau ponctuel permet, de la sorte, de définir une transformation du second ordre [1]. Cela nous montre, en passant, qu'*une transformation du second ordre est déterminée par ses quatre points doubles.*

416. Transformation par points inverses. — On appelle ainsi une transformation du second ordre dont *les points doubles sont les centres des cercles inscrits et exinscrits dans le triangle fondamental.*

Les coordonnées trilinéaires employées dans les formules (27) sont alors des *coordonnées normales* (n° 155) puisque le point unitaire est un des points doubles. Il en résulte la propriété suivante :

Théorème. — *Les distances de deux points homologues à chaque côté du triangle fondamental sont inverses.*

D'où le nom donné à la transformation.

Théorème. — *Les points homologues sont foyers associés des coniques inscrites dans le triangle fondamental.*

En effet, étant donné un point quelconque $m$, il y a une conique et une seule inscrite dans le triangle et admettant $m$ pour foyer, puisqu'on en connait

---

(1) On le voit en prenant le triangle conjugué commun (n° 484) pour triangle de référence et l'un des points de base pour point unitaire.

cinq tangentes (n° 499). Le foyer F associé à $m$ satisfait au théorème précédent (n° 535). C'est donc le point M homologue de $m$.

Théorème. — *Les droites joignant deux points homologues à un sommet quelconque du triangle fondamental sont isogonales par rapport à ce triangle.*

Cela résulte du théorème précédent et du théorème de Poncelet (n° 516).

Théorème. — *La transformation par points inverses peut être définie au moyen d'un faisceau d'hyperboles équilatères.*

En effet, les points doubles forment un groupe orthocentrique. Les coniques $\Sigma$ du n° 415 sont donc des hyperboles équilatères et réciproquement.

Théorème. — *Les points cycliques sont deux points homologues.*

Car ils sont conjugués par rapport aux hyperboles $\Sigma$.

Théorème. — *La droite de l'infini a pour transformé le cercle circonscrit au triangle fondamental.*

Cela résulte du théorème précédent et du théorème du n° 414.

417. Inversion. — Considérons *une transformation du second ordre admettant pour points fondamentaux les points cycliques* et un point O quelconque. Soit, d'autre part, A un des points doubles [1].

On pourrait étudier géométriquement les propriétés speciales de cette transformation, en utilisant, par exemple, les coniques $\Sigma$, qui sont les hyperboles équilatères de centre O et passant par A. Nous préferons suivre une marche analytique.

Prenons deux axes rectangulaires $O\xi$ et $O\eta$, le premier passant par le point A, dont nous désignerons l'abscisse par $a$. Introduisons, en même temps, un système de coordonnées trilinéaires $x, y, z$ admettant le triangle OIJ pour triangle de référence et le point A pour point unitaire. On passe d'un système à l'autre par les formules

$$x = z\frac{\xi - i\eta}{a}, \qquad y = z\frac{\xi - i\eta}{a'}; \tag{38}$$

$$\xi = a\frac{x + y}{2z}, \qquad \eta = a\frac{(x - y)}{2iz}. \tag{39}$$

Cela posé, appliquons les formules (25). Le point M', homologue de $m$, a pour coordonnées trilinéaires

$$X = z^2\frac{\xi - i\eta}{a}, \qquad Y = z^2\frac{\xi + i\eta}{a}, \qquad Z = z^2\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2};$$

---

[1] Cela suffit pour déterminer la transformation, en vertu d'un théorème du n° 415, car un point double est un couple de points homologues.

on en déduit ses coordonnées cartésiennes ($\xi'$, $\eta'$) par les formules (39) :

$$\xi' = a\frac{X+Y}{2Z} = a^2\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \qquad \eta' = a\frac{X-Y}{2iZ} = -a^2\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}.$$

Laissant maintenant de côté les coordonnées trilinéaires, remplaçons les lettres $\xi$, $\eta$ par $x$, $y$; nous voyons que la transformation considérée est définie par les formules suivantes :

$$(40) \qquad x' = a^2\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad y' = -a^2\frac{y}{x^2+y^2},$$

qui entraînent d'ailleurs les formules symétriques, puisque la transformation est involutive (n° 415).

Ces formules ont une interprétation géométrique simple. D'abord, si l'on change $y$ en $-y$, ce qui remplace $m$ par le point M symétrique par rapport à $Ox$, elles deviennent

$$(41) \qquad x' = a^2\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad y' = a^2\frac{y}{x^2+y^2},$$

ou, en introduisant les coordonnées polaires $\omega$, $\rho$ du point M,

$$(42) \qquad x' = \frac{a^2}{\rho}\cos\omega, \qquad y' = \frac{a^2}{\rho}\sin\omega.$$

Les coordonnées polaires de M′ sont donc

$$(43) \qquad \omega' = \omega, \qquad \rho' = \frac{a^2}{\rho}.$$

On en déduit que le point M′ se trouve sur OM et satisfait à la relation

$$(44) \qquad \overline{OM}\,\overline{OM'} = a^2.$$

On reconnaît la transformation étudiée en Géométrie élémentaire sous le nom d'*inversion* ou *transformation par rayons vecteurs réciproques*. Donc :

Théorème. — *Toute transformation du second ordre admettant pour points fondamentaux les points cycliques et un point* O *équivaut à une inversion de centre* O *accompagnée d'une symétrie par rapport à une droite passant par* O.

418. Nous allons maintenant étudier spécialement *les propriétés de l'inversion.*

Rappelons que le point O est appelé *centre* ou *pôle d'inversion* et le produit constant $a^2$ *puissance d'inversion*. Cette puissance peut

d'ailleurs être positive ou négative; suivant le cas, $a$ est réel ou imaginaire pur.

Le cercle Γ de centre O et de rayon $a$ porte le nom de *cercle d'inversion*. C'est le lieu des points doubles de la transformation. On peut caractériser les points homologues M et M′ par la condition d'être *conjugués par rapport à ce cercle* et d'appartenir à un même diamètre.

On peut appliquer le théorème général du n° 414, en remarquant que la symétrie faite au n° 417 n'a fait qu'échanger les points cycliques.

On retrouve ainsi les propriétés suivantes, bien connues en Géométrie élémentaire et sur lesquelles nous n'insistons pas :

*L'inverse d'une droite ne passant pas par le pôle est un cercle passant par le pôle.*

*L'inverse d'un cercle ne passant pas par le pôle est un autre cercle ne passant pas par le pôle.*

On a aussi l'énoncé suivant :

Théorème. — *L'inverse d'une conique ne passant pas par le pôle est une quartique bicirculaire admettant ce pôle pour point double.*

*L'inverse d'une conique passant par le pôle est une cubique circulaire admettant ce pôle pour point double.*

Il serait aisé de démontrer ces propositions directement en refaisant les raisonnements du n° 414, c'est-à-dire en coupant la transformée par une droite d'abord quelconque, puis passant par O ou par un point cyclique. On peut aussi employer le calcul, en portant les formules (41) dans une équation du second degré en $x'$, $y'$ avec ou sans terme constant (*cf.* n° 422). Nous laissons au lecteur le soin de développer toutes ces considérations.

Contentons-nous ici de montrer que le point O est un point double et de trouver les tangentes en ce point.

Pour que M′ vienne en O, il faut et il suffit, d'après (41), que M aille à l'infini. Or, la conique a deux points à l'infini. Donc, M′ vient deux fois en O et *les tangentes en ce point sont parallèles aux directions asymptotiques de la conique.*

419. Étudions les propriétés de l'inversion en ce qui concerne les tangentes.

Le plus simple est d'employer les coordonnées polaires, en utilisant la relation

$$(45) \qquad \rho\rho' = a^2.$$

Si on la dérive logarithmiquement par rapport à $\omega$, on obtient

$$\frac{d\rho}{\rho\, d\omega} + \frac{d\rho'}{\rho'\, d\omega} = 0$$

ou, en introduisant l'angle V du rayon vecteur avec la tangente (nº 252),

$$\cot V + \cot V' = 0.$$

On déduit de là $V' = -V$. Donc :

Théorème. — *Les tangentes à deux courbes inverses en deux points homologues* M *et* M' *sont symétriques par rapport à la perpendiculaire* $\Delta$ *au milieu de* MM'.

Il équivaut de dire que le cercle C qui passe par M, M' et qui est tangent en M à la courbe (S) est aussi tangent en M' à la courbe (S') [1].

Si l'on considère deux courbes S et $S_1$ passant par M et les courbes inverses S' et $S'_1$, qui passent par M', l'angle $\widehat{TMT_1}$ est symétrique de l'angle $\widehat{T'M'T'_1}$ par rapport à $\Delta$. Ces deux angles sont donc égaux; d'où :

Théorème. — *L'inversion conserve les angles; c'est une transformation conforme* (nº 399).

On peut retrouver ce théorème par la comparaison des éléments linéaires. On a, par exemple,

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\omega^2 = \rho^2 \left(\frac{d\rho^2}{\rho^2} + d\omega^2\right),$$
$$ds'^2 = \rho'^2 \left(\frac{d\rho'^2}{\rho'^2} + d\omega^2\right) = \rho'^2 \left(\frac{d\rho^2}{\rho^2} + d\omega^2\right),$$

---

[1] Ceci est un cas limite de la propriété suivante : *Deux points quelconques et leurs homologues sont sur un même cercle.* On démontre cette proposition en Géométrie élémentaire et l'on s'en sert précisément comme point de départ pour établir la propriété des tangentes.

car, d'après (45), on a

$$\frac{d\rho'}{\rho'} = -\frac{d\rho}{\rho}.$$

On a donc

(46) $$\frac{ds'}{\rho'} = \frac{ds}{\rho}.$$

Les éléments linéaires sont bien proportionnels.

On peut aussi obtenir la formule (46), en établissant d'abord une formule bien connue en Géométrie élémentaire et qui donne le rapport de la distance $M'M'_1$ à la distance $MM_1$ des points homologues. D'après les formules (41), on a

$$\begin{aligned}\overline{M'M'_1}^2 &= (x'_1 - x')^2 + (y'_1 - y')^2 \\ &= x'^2_1 + y'^2_1 + x'^2 + y'^2 - 2(x'_1 x' + y'_1 y') \\ &= \rho'^2_1 + \rho'^2 - 2a^4 \frac{(x_1 x + y_1 y)}{\rho_1^2 \rho^2} \\ &= \frac{a^4}{\rho_1^2 \rho^2}[\rho^2 + \rho_1^2 - 2(x_1 x + y_1 y)] \\ &\qquad = \frac{a^4}{\rho_1^2 \rho^2}[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2] = \frac{a^4}{\rho_1^2 \rho^2}\overline{MM_1}^2;\end{aligned}$$

d'où

$$M'M'_1 = \frac{a^2}{\rho\rho_1} MM_1 = \frac{\rho'}{\rho_1} MM_1$$

ou

(47) $$\frac{M'M'_1}{\rho'} = \frac{MM_1}{\rho_1}.$$

En supposant $M_1$ infiniment voisin de $M$, on retrouve (46).

420. Courbes anallagmatiques. — On appelle ainsi *toute courbe* (A) *qui est à elle-même sa propre inverse.*

Un moyen très simple d'obtenir toutes les courbes anallagmatiques consiste à observer qu'à chaque couple de points homologues M, M' on peut faire correspondre un cercle C bitangent à (A), les points de contact étant précisément M et M'. Cela résulte, en effet, de ce qui a été vu au n° 419. Ce cercle est orthogonal au cercle d'inversion Γ (n° 418), puisqu'il est divisé harmoniquement par un de ses diamètres (n° 170).

Nous avons vu la réciproque au n° 277. Donc :

Théorème. — *La courbe anallagmatique la plus générale est obtenue* [1] *en prenant l'enveloppe d'une famille quelconque de*

---

[1] Pour l'équation générale d'une telle courbe, *cf.* Chapitre XX, Exercice proposé n° 10.

*cercles orthogonaux à un cercle fixe; ce dernier est le cercle d'inversion ou cercle d'anallagmatie.*

421. Inversion dans l'espace. — L'inversion dans l'espace a la même définition que dans le plan. Mais, il y a alors une *sphère d'inversion* $\Sigma$, qui est le lieu des points doubles de la transformation et par rapport à laquelle deux points homologues quelconques sont conjugués.

Si l'on prend trois axes rectangulaires quelconques $Oxyz$ ayant pour origine le pôle d'inversion, les coordonnées de deux points homologues sont liées par les relations réciproques, analogues à (41) :

$$(48) \qquad x' = a^2 \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \qquad y' = a^2 \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \qquad z' = a^2 \frac{z}{x^2+y^2+z^2}.$$

En effet, si nous désignons par $\rho$ la distance OM, les cosinus directeurs de la droite OM, orientée de O vers M, sont $\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}$. Si $\rho'$ est la mesure algébrique $\overline{OM'}$ sur cette droite, on a

$$x' = \rho' \frac{x}{\rho}, \qquad y' = \rho' \frac{y}{\rho}, \qquad z' = \rho' \frac{z}{\rho}.$$

Or. $\rho' = \frac{a^2}{\rho}$. En portant dans les formules ci-dessus et se rappelant que $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, on obtient (48).

422. Les théorèmes du n° 418 s'étendent à l'espace de la manière suivante :

Théorème I. — *L'inverse d'un plan* P *ne passant pas par* O *est une sphère passant par* O.

Théorème II. — *L'inverse d'une sphère* S *ne passant pas par* O *est une sphère* S' *ne passant pas par* O.

Théorème III. — L'*inverse d'une quadrique* Q *est une cyclide du troisième ou du quatrième degré, suivant que cette quadrique passe ou ne passe pas par* O.

Démontrons tout ceci par le calcul. Soit d'abord

$$(49) \qquad ux + vy + wz + r = 0,$$

l'équation du plan P. En y remplaçant $x, y, z$ par les expressions (48), on obtient

$$(50)\qquad ux + vy + wz + \frac{r}{a^2}(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

équation d'une sphère passant à l'origine. D'où le théorème I.

Soit maintenant l'équation d'une quadrique Q :

$$(51)\qquad \begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 \\ &\quad + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0. \end{aligned}$$

En opérant comme ci-dessus, on trouve que l'équation de la surface inverse est

$$(52)\qquad \begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ &\quad - \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{a^2}(Cx + C'y + C''z) + \frac{D}{a^4}(x^2+y^2+z^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Dans le cas général, on a bien une cyclide du quatrième degré (n° 582). *L'origine en est un point double, le cône des tangentes étant le cône des directions asymptotiques de* Q.

Si Q passe à l'origine, $D = 0$, la cyclide n'est plus que du troisième degré.

Si Q est une sphère, on a $A = A' = A'' = 1$, $B = B' = B'' = 0$.

L'équation (52) contient $x^2 + y^2 + z^2$ en facteur; en supprimant ce facteur, il reste

$$D(x^2 + y^2 + z^2) + 2a^2(Cx + C'y + C''z) + a^4 = 0,$$

équation d'une sphère, conformément au théorème II.

423. L'*inverse d'une ligne* peut s'obtenir en la considérant comme l'intersection de deux surfaces S et $S_1$, dont on prend ensuite les inverses. Comme surface $S_1$, on peut prendre, par exemple, un *cône de sommet* O.

Théorème. — *L'inverse d'un cercle* C *est un cercle* C'.

Si le plan de C passe par O, on est ramené à la Géométrie plane. Sinon, on peut considérer C comme l'intersection de deux sphères S et $S_1$, dont les inverses sont des sphères S' et $S'_1$, se coupant suivant le cercle C'.

Pour avoir le plan P′ de C′, il suffit de prendre pour S la sphère qui passe par O.

Le cône de sommet O et de base C est un cône du second degré, dont C et C′ sont deux sections circulaires. On dit quelquefois que les plans P et P′ de ces sections sont des plans *antiparallèles*.

On dit aussi que ce sont des *plans cycliques* (n° 480).

424. Les propriétés des tangentes s'étendent à l'espace et donnent lieu au théorème suivant :

Théorème. — *Les tangentes à deux courbes inverses ou les plans tangents à deux surfaces inverses en deux points homologues* M *et* M′ *sont symétriques par rapport au plan* Π *perpendiculaire au milieu de* MM′.

Ce théorème peut se déduire du théorème du n° 419.

Soient, en effet, d'abord les deux courbes inverses C et C′.

Imaginons une courbe quelconque $C_1$ tangente en M à C et située dans un plan passant par O. Son inverse $C'_1$ est tangente en M′ à C′, puisque l'inversion est une transformation ponctuelle, donc une transformation de contact (n° 398). Nous sommes dès lors ramenés au cas de la Géométrie plane.

S'il s'agit maintenant de deux surfaces inverses S et S′, il suffit de considérer leurs sections par les plans passant par OMM′.

Comme au n° 419, on déduit de ce théorème que *l'inversion dans l'espace conserve les angles ; c'est une transformation conforme* (¹). Cela résulte aussi de la formule (46), qui est évidemment vraie dans l'espace, ainsi que (47), puisque les quatre points M, $M_1$, M′, $M'_1$ sont dans un même plan.

425. Courbes gauches et surfaces anallagmatiques. — Elles se définissent comme en Géométrie plane (n° 420) et sont susceptibles d'un mode de génération analogue, déduit de la considération du cercle ou de la sphère tangentes en M et M′ à la courbe ou à la surface. Contentons-nous d'énoncer le résultat, que le lecteur démontrera sans peine, en répétant le raisonnement du n° 420 et se reportant, pour les réciproques, au Chapitre XIX (n° 285 et Exercice proposé n° 21).

---

(¹) On démontre que *toute transformation conforme dans l'espace peut être obtenue par une succession d'inversions*. Ceci n'est pas vrai dans le plan.

THÉORÈME. — 1° *La courbe gauche anallagmatique la plus générale est l'enveloppe d'une famille de cercles orthogonaux à une sphère fixe* $\Sigma$ *et dont les axes engendrent une surface développable.*

2° *La surface anallagmatique la plus générale est l'enveloppe d'une famille de sphères orthogonales à une sphère fixe. Si la déférente est une courbe, l'enveloppe des cercles caractéristiques est la courbe anallagmatique la plus générale.*

426. TRANSFORMATIONS CORRÉLATIVES. — Au point $m(x, y, z, t)$ de l'espace $f$, faisons correspondre le plan P de l'espace F, dont les coordonnées homogènes ([1]) $u, v, w, r$ se déduisent de $x, y, z, t$ par une substitution linéaire :

$$(53)\qquad \begin{cases} u = a\,x + b\,y + c\,z + e\,t, \\ v = a'x + b'y + c'z + e't, \\ w = a''x + b''y + c''z + e''t, \\ r = a'''x + b'''y + c'''z + e'''t. \end{cases}$$

Cette correspondance définit, entre les deux figures, ce qu'on appelle une *transformation corrélative*.

Ce n'est pas une transformation ponctuelle.

Au n° 306, nous en avons rencontré un cas particulier, à savoir la transformation définie par les formules

$$(54)\qquad u = x, \qquad v = y, \qquad w = z, \qquad r = t.$$

C'est celle qui nous a conduit au principe de dualité. Nous l'appellerons *la transformation canonique*.

*La transformation corrélative générale* (53) *équivaut à la transformation canonique* (54), *accompagnée de la transformation homographique générale* (3).

On peut donc, si l'on veut, se borner à étudier les propriétés de la transformation canonique. Comme cette étude a été faite (nos 306 à 308), nous nous bornerons à en rappeler rapidement les résultats, en les appliquant à la transformation corrélative générale (53).

THÉORÈME I. — *Si* $m$ *décrit un plan* $p$, P *passe par un point fixe* M *et réciproquement.*

A tout point M de F, on peut, de la sorte, faire correspondre un plan $p$ de $f$. Cette correspondance définit une autre transformation corrélative entre F et $f$, que nous appellerons *la transformation associée* T' de la transformation proposée T.

---

([1]) Ces coordonnées peuvent ne pas se rapporter au même tétraèdre de référence que les coordonnées $x, y, z, t$.

Théorème II. — *Si $m$ décrit une droite $d$, $P$ passe par une droite fixe $D$. Si le plan $p$ tourne autour de $d$, le point $M$ décrit $D$.*

*Le rapport anharmonique de quatre points $m$ (ou $M$) est égal au rapport anharmonique des quatre plans $P$ (ou $p$) homologues.*

*La droite $D$ est la transformée de $d$.*

Théorème III. — *A deux droites $d$ qui se rencontrent, correspondent deux droites $D$ situées dans un même plan.*

Théorème IV. — *Si $m$ décrit une courbe $c$, $P$ enveloppe une développable $\Delta$. A la tangente $mt$ à $c$ correspond la génératrice de contact $G$ de $P$ avec $\Delta$.*

*Si $M$ décrit l'arête de rebroussement $C$ de $\Delta$, $p$ enveloppe la développable $\delta$ dont $c$ est l'arête de rebroussement.*

*Aux plans tangents à $c$ correspondent les points de $\Delta$ et aux points de $\delta$ correspondent les plans tangents à $C$.*

On dit que $\Delta$ *est la transformée de $c$ et $C$ est la transformée de $\delta$.* Lorsqu'elles sont algébriques, *la classe de chaque développable égale le degré de la courbe homologue.*

*Si deux courbes $c$ et $c'$ se rencontrent en $m$, leurs transformées $\Delta$ et $\Delta'$ ont un plan tangent commun $P$. Elles sont tangentes au point $M$ homologue du plan $tmt'$.*

*Si deux courbes $c$ et $c'$ sont tangentes en $m$, leurs transformées $\Delta$ et $\Delta'$ sont tangentes tout le long de la droite $G$ homologue de $mt$.*

Théorème V. — *Si $m$ décrit une surface non développable $s$, $P$ enveloppe une surface $S$, qui n'est ni développable, ni réduite à une courbe. Si $M$ décrit $S$, $p$ enveloppe $s$.*

On dit que $S$ *est la transformée de $s$.* Lorsqu'elles sont algébriques, *le degré de chacune d'elles égale la classe de l'autre.*

*Si deux surfaces $s$ et $s'$ sont tangentes, leurs transformées $S$ et $S'$ le sont aussi. Au point de contact $m$ et au plan tangent commun $p$, correspondent respectivement le plan tangent commun $P$ et le point de contact $M$.*

Ce théorème et le précédent nous prouvent que *les transformations corrélatives sont des transformations de contact.*

427. Les transformations corrélatives, *en Géométrie plane*, se définissent comme dans l'espace, mais avec une variable de moins. *Au point $m$, correspond alors une droite $D$.*

Elles se ramènent, par transformation homographique, à la *transformation canonique* étudiée au n° 297.

Le théorème I s'applique encore et sert à définir *la transformation associée.* On a aussi la propriété relative au rapport anharmonique.

Le théorème V s'applique également, en remplaçant les surfaces par des courbes.

428. Transformation par polaires réciproques. — Soit une quadrique Q, définie par l'équation homogène

(55) $$f(x, y, z, t) = 0.$$

*Au point $m(x, y, z, t)$, faisons correspondre son plan polaire* P *par rapport à* Q (n° 432). Les coordonnées de ce plan ([1]) sont données, comme on sait, par les formules

(56) $$u = \frac{1}{2}f'_x, \qquad v = \frac{1}{2}f'_y, \qquad w = \frac{1}{2}f'_z, \qquad r = \frac{1}{2}f'_t.$$

Elles sont linéaires. Donc, elles définissent une transformation corrélative. Cette transformation porte le nom de *transformation par plans polaires réciproques par rapport à la quadrique* Q, qui est appelée *quadrique directrice.*

En particulier, la transformation canonique (54) est une transformation par plans polaires réciproques par rapport à la quadrique

(57) $$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0.$$

Toute transformation corrélative se ramène à une transformation par plans polaires réciproques par l'intermédiaire d'une transformation homographique convenable.

Les théorèmes I à V du n° 426 s'appliquent évidemment aux transformations par plans polaires réciproques. Faisons seulement les remarques suivantes :

Si $m$ décrit le plan $p$, nous savons que P pivote autour du pôle M de $p$ (n° 435). Donc, *les transformations* T *et* T' *sont identiques.*

Deux droites homologues sont *deux droites conjuguées* par rapport à la quadrique directrice (n° 436).

*La quadrique directrice se transforme en elle-même*, car l'homologue d'un de ses points est le plan tangent en ce point.

On définit, de même, en Géométrie plane, la *transformation par polaires réciproques par rapport à une conique donnée.* On peut faire, à son sujet, des remarques analogues à celles émises ci-dessus.

---

([1]) Nous rapportons, cette fois, les coordonnées $u$, $v$, $w$, $r$ au même tétraèdre de référence que $x$, $y$, $z$, $t$.

# LIVRE II.

Dans le Livre I, nous avons exposé les propriétés générales des lignes et des surfaces. Nous avons dû, en outre, étudier, dès le début, à cause du rôle important qu'ils jouent en Géométrie, la droite, le plan, le cercle et la sphère. Mais, il y a encore beaucoup d'autres courbes et surfaces particulières qui se présentent fréquemment dans les applications. Ce sont ces courbes et surfaces que nous allons maintenant étudier, en utilisant tous les moyens d'investigation que nous ont fournis les théories du Livre I.

Nous considérerons d'abord les courbes et surfaces du second degré, puis quelques courbes et surfaces particulières du troisième et du quatrième degré et enfin plusieurs autres courbes et surfaces classiques algébriques ou transcendantes.

# CHAPITRE XXIX.

## PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DES COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

429. Les courbes du second degré sont connues depuis la plus haute antiquité. Elles ont été étudiées par de nombreux géomètres, dont quelques-uns des plus célèbres, sous le nom de *sections coniques* (par abréviation *coniques*), parce qu'ils les considéraient comme sections planes d'un cône à base circulaire.

Les surfaces du second degré doivent principalement leur développement à la Géométrie analytique, à laquelle elles ont fourni, en même temps que les coniques, un vaste champ d'applications, qui, pendant longtemps, a éclipsé tous les autres, mais doit être maintenant réduit à de plus justes proportions.

Nous mènerons de front l'étude des courbes et des surfaces, en commençant par les propriétés projectives, c'est-à-dire celles qui se conservent dans toute transformation homographique (n° 401).

Ces propriétés sont indépendantes du choix des axes ou, plus généralement, du triangle ou tétraèdre de référence. Elles sont communes à toutes les courbes ou surfaces du second degré et s'établissent très simplement à partir de leur équation générale.

Dans tout ce Chapitre, nous emploierons des coordonnées homogènes, qui pourront être indifféremment regardées comme cartésiennes ou tétraédriques. Nous ne ferons aucune distinction entre le réel et l'imaginaire.

430. Dégénérescences. — La surface du second degré la plus générale est définie par

$$f(x, y, z, t) = 0, \tag{1}$$

si $f$ désigne une forme quadratique quelconque (t. I, n° 300). En

supprimant la variable $t$, on a, de même, l'équation générale d'une courbe du second degré (¹).

Nous savons (t. I, n° 301) que la forme $f$ peut être décomposée en une somme de 4, 3, 2 ou 1 carrés indépendants. Voyons quelle est l'interprétation géométrique de cette proposition analytique.

*Premier cas : Quatre carrés.* — C'est le cas général. Nous verrons, au Chapitre XXX, quelles sont les différentes formes que peut alors affecter la surface. Pour l'instant, nous conviendrons seulement de dire qu'elle est une *quadrique véritable* ou *non dégénérée.*

*Deuxième cas : Trois carrés.* — L'équation prend la forme

$$P^2 + Q^2 + R^2 = 0. \tag{2}$$

D'après le n° 375, elle représente un *cône*, dont le sommet est à l'intersection des plans $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$.

En Géométrie plane, on a une *conique véritable* ou *non dégénérée* (²).

*Troisième cas : Deux carrés.* — L'équation prend la forme

$$P^2 + Q^2 = 0. \tag{3}$$

Elle se décompose en deux équations du premier degré

$$P \pm iQ = 0 \tag{4}$$

et représente un *système de deux plans*, dans l'espace, *de deux droites*, dans le plan.

*Quatrième cas : Un carré.* — L'équation prend la forme

$$P^2 = 0. \tag{5}$$

---

(¹) Si l'on fait abstraction du système de deux droites ne se rencontrant pas, *il n'y a pas de courbes gauches du second degré.* Car, en prenant trois points sur une telle courbe, le plan qui les contient coupe la courbe en plus de deux points, donc en une infinité. Par suite, il contient la courbe en entier, à moins que celle-ci ne se décompose en deux droites.

(²) Si la variable $t$ manque dans $f$, on a un cône dont le sommet est le sommet D(0, 0, 0, 1) du tétraèdre de référence. On peut aussi regarder l'équation (1) comme définissant une conique dans la face ABC; cette conique n'est autre que la base du cône.

Elle représente *un plan double*, dans l'espace, *une droite double*, dans le plan.

Les trois derniers cas, dans l'espace, les deux derniers, dans le plan, constituent ce que nous appellerons des *dégénérescences*. Ils offrent un intérêt géométrique médiocre, mais se présentent néanmoins fréquemment dans les applications; il est donc important de savoir les reconnaître.

Un premier procédé est tout indiqué; c'est celui de la *décomposition en carrés*. Il est surtout applicable avec des équations à coefficients numériques. Nous y reviendrons au Chapitre suivant.

Un autre procédé, souvent plus commode, résulte de la considération des *points doubles*.

431. Points doubles. — Nous savons (t. I, n° 305) que les quatre cas envisagés tout à l'heure peuvent être caractérisés par l'ordre du déterminant principal déduit du discriminant $\Delta$ de $f$ ou, ce qui revient au même, par le nombre des variables arbitraires dont on peut disposer dans la résolution du système linéaire (t. I, n° 290)

$$(6)\qquad f'_x = 0, \qquad f'_y = 0, \qquad f'_z = 0, \qquad f'_t = 0.$$

Or, ce système caractérise les points doubles (n° 206).

Nous pouvons donc affirmer que, dans le premier cas, il n'y a pas de point double; dans le second cas, il y en a un, dans l'espace (sommet du cône), zéro dans le plan; dans le troisième cas, il y en a une infinité en ligne droite, dans l'espace (intersection des deux plans), un seul, dans le plan (intersection des deux droites); dans le quatrième cas, tous les points du plan ou de la droite double sont des points doubles.

Tous ces résultats sont d'ailleurs bien évidents géométriquement et, comme tels, faciles à retenir. Comme ils sont différents dans tous les cas, ils peuvent servir à caractériser les diverses dégénérescences.

432. Points conjugués; polaire, plan polaire. — On dit que deux points $M_1$ et $M_2$ sont *conjugués par rapport à une quadrique (ou conique)* S, *s'ils sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points de rencontre* P', P'' *de* S *avec la droite* $M_1M_2$.

Supposons que S soit représenté par l'équation (1) et cherchons la condition qui doit lier les coordonnées $(x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $(x_2, y_2, z_2, t_2)$

de nos deux points. Un point P quelconque de $M_1M_2$ a des coordonnées de la forme $x_1+\lambda x_2$, $y_1+\lambda y_2$, $z_1+\lambda z_2$, $t_1+\lambda t_2$. L'équation aux $\lambda$ des points P' et P'' est

$$(7)\qquad f(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2, t_1+\lambda t_2)=0.$$

Si $\lambda'$ et $\lambda''$ sont ses deux racines, on doit avoir (n° 130)

$$\lambda'+\lambda''=0.$$

Autrement dit, il nous faut annuler le coefficient de $\lambda$ dans (7). Or, ce coefficient est $2f(x_1|x_2)$ (t. I, n° 307). La condition cherchée s'écrit donc

$$(8)\qquad x_1f'_{x_2}+y_1f'_{y_2}+z_1f'_{z_2}+t_1f'_{t_2}\equiv x_2f'_{x_1}+y_2f'_{y_1}+z_2f'_{z_1}+t_2f'_{t_1}=0.$$

*On exprime que deux points sont conjugués en annulant la forme polaire de f par rapport à leurs coordonnées.*

Cherchons le lieu de $M_2$ pour une position donnée de $M_1$. Il suffit de regarder, dans (8), $x_2, y_2, z_2, t_2$ comme les coordonnées courantes. L'équation étant du premier degré, le lieu est un plan, appelé *plan polaire de* $M_1$ *par rapport à la quadrique*. Son équation peut s'écrire sous les deux formes

$$(9)\qquad x f'_{x_1}+y f'_{y_1}+z f'_{z_1}+t f'_{t_1}=0,$$

$$(10)\qquad x_1f'_x+y_1f'_y+z_1f'_z+t_1f'_t=0.$$

La première est ordonnée par rapport aux coordonnées courantes.

La seconde est avantageuse quand quelques-unes des coordonnées $x_1, y_1, z_1, t_1$ sont nulles. Enfin, quand il s'agit d'écrire l'équation d'un plan polaire, il ne faut pas oublier les règles générales données au tome I (n° 308), qui sont souvent les plus commodes.

En Géométrie plane, le lieu est une droite, appelée *polaire de* $M_1$ *par rapport à la conique*. Les équations (9) et (10) s'appliquent, en supprimant $t$ et $t_1$.

433. Dans le cas particulier où $M_1$ est *sur la quadrique*, l'équation (9) représente, comme on sait (n° 204), le plan tangent en ce point. C'est *le seul cas où un point soit dans son plan polaire*, car, si l'équation (9) est satisfaite pour $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$, $t=t_1$,

il en est de même de l'équation (1), en vertu de l'identité d'Euler (t. I, n° 307).

Il est aisé de se rendre compte pourquoi un plan tangent est plan polaire de son point de contact. Si $M_1$ est sur S, quelle que soit la sécante $M_1\lambda$, l'un de ses points de rencontre avec S, P par exemple, est en $M_1$. Si $M_1\lambda$ n'est pas tangente, P' est distinct de P et $M_2$ est forcément en $M_1$ (n° 129). Si $M_1\lambda$ est tangente, P' est confondu avec P et $M_2$ est indéterminé sur $M_1\lambda$.

Tout ceci s'applique en Géométrie plane : la polaire d'un point d'une conique est la tangente en ce point et c'est le seul cas où le point soit sur sa polaire.

434. Pôle. — Étant donné un plan quelconque Π

$$ux + vy + wz + rt = 0, \tag{11}$$

cherchons un point $M_1$ qui l'admette pour plan polaire. En identifiant les équations (9) et (11), nous avons

$$f'_{x_1} = \lambda u, \quad f'_{y_1} = \lambda v, \quad f'_{z_1} = \lambda w, \quad f'_{t_1} = \lambda r, \tag{12}$$

$\lambda$ étant un facteur de proportionnalité.

*Si la quadrique n'est pas dégénérée*, le déterminant $\Delta$ de ce système n'est pas nul; il y a donc une seule solution et, par suite, un seul point $M_1$ [1], qui est appelé *le pôle du plan* Π. Si l'on introduit la forme adjointe $\varphi(u, v, w, r)$ de $f(x, y, z, t)$, on sait qu'en prenant $\lambda = \frac{1}{2}$, on a

$$x_1 = \frac{1}{2}\varphi'_u, \quad y_1 = \frac{1}{2}\varphi'_v, \quad z_1 = \frac{1}{2}\varphi'_w, \quad t_1 = \frac{1}{2}\varphi'_r. \tag{13}$$

Les coordonnées du pôle de Π sont donc, à un facteur arbitraire près, $\varphi'_u$, $\varphi'_v$, $\varphi'_w$, $\varphi'_r$.

En Géométrie plane, la droite $\Delta(u, v, w)$ a, de même, *un pôle unique par rapport à toute conique non dégénérée;* les coordonnées de ce pôle sont $\varphi'_u$, $\varphi'_v$, $\varphi'_w$.

Envisageons maintenant le cas des dégénérescences. On pourrait

---

[1] Quand on fait varier $\lambda$, $x_1$, $y_1$, $z_1$, $t_1$ varient proportionnellement; le point $M_1$ ne change pas.

discuter le système (12); mais, il est plus simple de voir les choses géométriquement.

Supposons d'abord que la quadrique S soit un *cône*. Coupons-la par un plan quelconque Q ne passant pas par son sommet O; nous obtenons une conique C. Si $M_1$ et $M_2$ sont conjugués par rapport au cône, leurs projections $m_1$ et $m_2$ sur Q à partir de O sont conjuguées par rapport à C et réciproquement, en vertu de l'invariance du rapport anharmonique (nº 131). Il suit de là que le plan polaire de $M_1$ est le plan déterminé par O et la polaire de $m_1$ par rapport à C. Ce plan demeure fixe quand $M_1$ décrit la droite $Om_1$; nous dirons que c'est le *plan polaire de cette droite par rapport au cône.*

Réciproquement, si un plan Π passe par O, il a une infinité de pôles, qui sont les points de la droite joignant le sommet au pôle $m_1$ de l'intersection de Π avec Q par rapport à C. Nous dirons que cette droite $Om_1$ est *la droite polaire du plan* Π *par rapport au cône.*

Si Π ne passe pas par O, il n'a pas de pôle, si l'on excepte le pôle singulier constitué par le sommet, qui, de même que tout point double d'une quadrique, est conjugué de tous les points de l'espace ([1]).

Si maintenant la quadrique est un *système de deux plans*, on se trouve ramené à la théorie du nº 135. Si le plan Π passe par la droite D intersection de ces deux plans, il admet comme pôles tous les points du plan conjugué harmonique. S'il ne passe pas par D, il n'admet aucun pôle autre que les pôles singuliers constitués par les points de D.

Des résultats analogues ont lieu en Géométrie plane, quand *la conique se décompose en deux droites.*

Le cas du plan double ou de la droite double ne présente aucun intérêt.

435. Théorème. — *Si un point* M *décrit un plan* P', *son plan polaire* P *pivote autour du pôle* M' *de* P' *et réciproquement.*

Cela résulte de ce que M et M' sont constamment conjugués, puisque M est toujours dans le plan polaire de M'.

([1]) C'est évident géométriquement et aussi sur (8).

On a un théorème analogue en Géométrie plane, en remplaçant les plans P et P′ par des droites.

Corollaire. — *Les plans tangents à une quadrique en tous les points d'une section plane passent par le pôle du plan de la section*, et réciproquement *les plans tangents issus d'un point fixe ont leurs points de contact dans le plan polaire de ce point*. Ces plans tangents enveloppent un *cône circonscrit à la quadrique* le long de la conique lieu des points de contact.

En Géométrie plane, *les tangentes issues d'un point à une conique ont leurs points de contact sur la polaire de ce point.*

436. Droites conjuguées par rapport a une quadrique. — Théorème. — *Si le point* M *décrit une droite* D, *son plan polaire* P *passe par une droite fixe* D′; *si un plan* P′ *tourne autour de* D, *son pôle* M′ *décrit* D′.

En effet, prenons deux points particuliers $M_1$ et $M_2$ de D : leurs plans polaires $P_1$ et $P_2$ se coupent suivant une certaine droite D′.

Tout point M′ de D′ se trouve à la fois sur $P_1$ et sur $P_2$; son plan polaire P′ passe donc par $M_1$ et par $M_2$ et, par suite, par D. Réciproquement, tout plan P′ passant par D a son pôle sur D′.

Tout point M de D se trouve maintenant sur le plan polaire P′ de tout point M′ de D′; son plan polaire P passe donc par M′ et, par suite, par D′. Réciproquement, tout plan P passant par D′ a son pôle sur D.

Les droites D et D′ sont dites *conjuguées par rapport à la quadrique*. Un point quelconque pris sur l'une et un point quelconque pris sur l'autre sont toujours conjugués. On en conclut la propriété suivante : Tout plan P passant par D′ coupe D suivant un point M et la quadrique suivant une conique C: M *est pôle de* D′ *par rapport à* C.

Parmi les plans qui passent par D, on peut considérer les plans tangents; *leurs points de contact sont les deux points d'intersection de la quadrique avec la droite conjuguée* D′. Ceci nous prouve en passant que les quadriques sont des surfaces de seconde classe (n° 213), ce que nous retrouverons bientôt (n° 441).

437. Si la droite D est tangente en M à S, la droite D′ se trouve

dans le plan polaire de M, c'est-à-dire dans le plan tangent T en ce point; de plus, comme D est dans T, D' passe par le pôle de ce plan, c'est-à-dire par M. Elle est donc, elle aussi, tangente en M à S.

La section de S par le plan tangent DMD' se compose de deux droites G et G' (n° 417). Deux points quelconques, pris respectivement sur D et D', doivent être conjugués par rapport à cette section; donc, D et D' sont conjuguées harmoniques par rapport à G, G'. Si l'on remarque, par ailleurs, que G et G' sont les tangentes asymptotiques du point M (n° 374), on en conclut que D et D' sont *deux tangentes conjuguées*, au sens du n° 344.

Le lecteur démontrera aisément que ce cas particulier est le seul où les droites conjuguées se rencontrent. Nous lui laissons aussi le soin d'examiner ce qu'il advient de la théorie des droites conjuguées quand la quadrique S dégénère.

438. Triangles, trièdres, tétraèdres conjugués. — Un *triangle* ABC est *conjugué par rapport à une conique* C si ses sommets sont deux à deux conjugués par rapport à cette conique. Chaque sommet a pour polaire le côté opposé. On obtient le triangle conjugué le plus général en choisissant A arbitrairement dans le plan, puis B arbitrairement sur la polaire de A, et enfin C conjugué de B sur cette polaire ou, ce qui revient au même, pôle de AB.

Un *triangle* ABC *est conjugué par rapport à une quadrique* S, s'il est conjugué par rapport à la section de S par son plan. On peut aussi donner la même définition que pour une conique. Le plan polaire de chaque sommet passe par le côté opposé. La droite conjuguée de chaque côté passe par le sommet opposé.

Si la quadrique S est un cône de sommet O, le trièdre OABC est tel que chaque arête a pour plan polaire la face opposée (n° 434); on en conclut qu'il est coupé par un plan quelconque P suivant un triangle A'B'C', qui est aussi conjugué. On dit que *ce trièdre est conjugué par rapport au cône*.

Revenons à une quadrique S quelconque. Un *trièdre* OABC est dit *conjugué par rapport à cette quadrique*, si le pôle de chaque face se trouve sur l'arête opposée. Il revient au même de dire que la droite conjuguée de chaque arête doit se trouver dans la face opposée.

*Un tétraèdre* ABCD est conjugué par rapport à S si ses sommets sont deux à deux conjugués. Chaque sommet a pour plan polaire le plan de la face opposée. Chaque arête a pour conjuguée l'arête opposée. Chaque face est un triangle conjugué et chaque angle trièdre est un trièdre conjugué.

On obtient le tétraèdre conjugué le plus général en choisissant A arbitrairement dans l'espace, puis B arbitrairement dans le plan polaire de A, puis C arbitrairement sur la droite conjuguée de AB, et enfin D au pôle de ABC.

439. Si la quadrique (1) est rapportée à un tétraèdre conjugué, le plan polaire du point (1, 0, 0, 0) doit se réduire à $x = 0$. Or, ce plan polaire a pour équation (nº 432)

$$f'_x = 0.$$

On doit donc avoir une identité de la forme

$$f'_x \equiv 2Ax.$$

De même,

$$f'_y \equiv 2By, \qquad f'_z \equiv 2Cz, \qquad f'_t \equiv 2Dt.$$

En appliquant l'identité d'Euler, on en déduit

$$f \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2.$$

*L'équation de toute quadrique rapportée à un tétraèdre conjugué est donc de la forme*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0. \tag{14}$$

La réciproque est évidente.

En faisant $t = 0$, on obtient de même l'*équation générale des coniques rapportées à un triangle conjugué*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0. \tag{15}$$

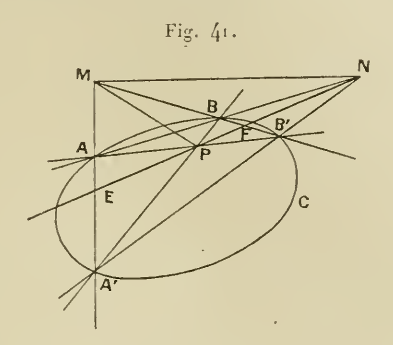
C'est aussi l'*équation générale des cônes* ayant pour sommet le point (0, 0, 0, 1) et conjugués par rapport à l'angle trièdre correspondant du tétraèdre de référence. En particulier, en coordonnées cartésiennes ordinaires, c'est l'équation des *cônes ayant pour sommet l'origine et conjugués par rapport au trièdre de coordonnées.*

Si, dans la décomposition en carrés (nº 430), on prend les plans $P = 0$, $Q = 0$, ... pour faces du tétraèdre de référence, on obtient une équation de la forme (14). On en conclut que ces plans constituent toujours un tétraèdre conjugué. S'il n'y a que trois carrés, on obtient trois plans formant un trièdre conjugué par rapport au cône qu'est alors la quadrique. En Géométrie plane, on obtient trois droites formant un triangle conjugué par rapport à la conique.

440. Constructions diverses. — Soit à *construire la polaire d'un point* M *par rapport à une conique* C (*fig.* 41). — Menons par M deux sécantes coupant C aux points A, A′ et B, B′. La polaire

cherchée passe par les points E et F conjugués harmoniques de M par rapport à AA′ et à BB′. On peut donc aussi la considérer comme polaire de M par rapport aux deux faisceaux de droites AB, A′B′ et AB′, A′B. Il en résulte qu'elle passe par les sommets N et P de ces faisceaux. Cela suffit pour la construire.

Fig. 41.




Remarquons que l'on peut échanger les rôles des trois points M, N, P; ils forment donc *un triangle conjugué.*

Si l'on sait mener les tangentes issues de M, on a la polaire cherchée en joignant leurs points de contact.

Pour *construire le pôle d'une droite*, on prend l'intersection des polaires de deux de ses points. En particulier, on peut prendre l'intersection des tangentes aux points où elle coupe la conique.

On peut imaginer des constructions analogues dans l'espace; mais elles ont moins d'intérêt et ne sauraient être réalisées qu'en Géométrie descriptive.

441. Équation tangentielle. — L'équation tangentielle de la quadrique (1) s'obtient en éliminant $x, y, z, t$ et $\lambda$ entre les équations (n° 208)

$$(16)\qquad f'_x = \lambda u, \qquad f'_y = \lambda v, \qquad f'_z = \lambda w, \qquad f'_t = \lambda r$$

et l'équation (1) ou bien la suivante :

$$(17)\qquad ux + vy + wz + rt = 0.$$

Supposons d'abord *que la quadrique ne soit pas dégénérée.* En prenant $\lambda = \frac{1}{2}$, tirant $x, y, z, t$ de (16) et portant dans (1), on

obtient

$$(18) \qquad \varphi(u, v, w, r) = 0,$$

$\varphi$ désignant, comme au n° 434, *la forme adjointe de f*. On peut aussi éliminer $x, y, z, t, \lambda$ entre (16) et (17) soit par des calculs élémentaires, soit au moyen d'un déterminant :

$$\begin{vmatrix} & & & & u \\ & \Delta & & & v \\ & & & & w \\ & & & & r \\ u & v & w & r & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière équation résulte, d'ailleurs, aussi de la formule (41) du n° 311 du Tome I.

Rappelons encore que les coefficients de la forme adjointe sont proportionnels aux mineurs du discriminant (t. I, n° 311); on peut donc *prendre ces mineurs comme coefficients de l'équation tangentielle.*

En Géométrie plane, on a des procédés analogues pour former l'*équation tangentielle d'une conique non dégénérée.* Il suffit de supprimer une coordonnée dans tout ce qui précède.

La seule dégénérescence qui présente de l'intérêt au point de vue tangentiel est le *cône*. Nous savons (n° 303) qu'il possède *deux équations tangentielles.* L'une, du premier degré, représente le sommet; l'autre, du second degré, représente une quadrique quelconque inscrite dans le cône ou bien une section plane ne passant pas par le sommet.

Pour trouver ces équations, on peut poursuivre l'élimination de $x, y, z, t, \lambda$ entre (16) et (17). On peut aussi, dès que l'on s'est aperçu que la quadrique est un cône, chercher son sommet et une section plane et en calculer ensuite séparément les équations tangentielles.

442. Surfaces et courbes de seconde classe; dégénérescences tangentielles. — L'équation (18) est du second degré; donc, *une surface* (ou une courbe) *du second degré est aussi de la seconde classe.* Examinons *la réciproque* et cherchons ce que représente

l'équation (18) quand on suppose que $\varphi$ est une forme quadratique quelconque en $u$, $v$, $w$, $r$.

Nous savons qu'on passe de l'équation tangentielle à l'équation ponctuelle au moyen des mêmes calculs qui servent à passer de l'équation ponctuelle à l'équation tangentielle ; il suffit simplement d'échanger les variables $x$, $y$, $z$, $t$ et $u$, $v$, $w$, $r$ (nº 306). Donc, si $\varphi$ est une somme de quatre carrés, l'équation ponctuelle correspondant à (18) s'obtient encore en *annulant la forme adjointe*. Nous dirons, dans ce cas, que la surface représentée par (18) n'est pas dégénérée et nous arrivons à cette conclusion qu'*il y a identité complète entre les surfaces* (ou courbes) NON DÉGÉNÉRÉES *du second degré et de la seconde classe.*

Examinons maintenant les *dégénérescences tangentielles* comme nous avons examiné, au nº 430, les dégénérescences ponctuelles. Nous appliquons, à cet effet, le principe de dualité.

*Premier cas : Quatre carrés.* — La quadrique n'est *pas dégénérée;* elle n'a pas de plans tangents doubles.

*Deuxième cas : Trois carrés.* — L'équation (18) représente une *conique;* il y a *un plan double*, qui est le plan de la conique.

*Troisième cas : Deux carrés.* — L'équation (18) se décompose en deux équations du premier degré ; elle représente *deux points;* il y a une *infinité de plans doubles*, qui sont les plans passant par ces deux points.

*Quatrième cas : Un carré.* — L'équation (18) représente *un point double;* tous les plans qui passent par ce point sont des plans tangents doubles.

Il n'y a pas lieu de faire une discussion particulière pour la Géométrie plane ; il suffit de remarquer que le deuxième cas est alors le cas général, le troisième et le quatrième cas constituant des dégénérescences.

La recherche pratique des dégénérescences tangentielles peut se faire soit par la décomposition en carrés, soit par la recherche des plans tangents doubles.

443. ÉLÉMENTS CONJUGUÉS EN TANGENTIELLES. — On peut reprendre, du point

de vue corrélatif, toute la théorie des éléments conjugués exposée dans les n^os 432 à 439.

*Deux plans* $P_1$ *et* $P_2$ *sont dits conjugués par rapport à la quadrique* $\Sigma$ définie par l'équation tangentielle (18) *s'ils sont conjugués harmoniques par rapport aux plans tangents issus de leur intersection.*

Si $(u_1, v_1, w_1, r_1)$ et $(u_2, v_2, w_2, r_2)$ désignent leurs coordonnées respectives, les coordonnées des plans tangents sont

$$u_1+\lambda u_2,\quad v_1+\lambda v_2,\quad w_1+\lambda w_2,\quad r_1+\lambda r_2,$$

$\lambda$ étant donné par l'équation du second degré

$$\varphi(u_1+\lambda u_2,\ v_1+\lambda v_2,\ w_1+\lambda w_2,\ r_1+\lambda r_2)=0. \tag{20}$$

La condition d'harmonie est que la somme des racines soit nulle, c'est-à-dire

$$u_1\varphi'_{u_2}+v_1\varphi'_{v_2}+w_1\varphi'_{w_2}+r_1\varphi'_{r_2}\equiv u_2\varphi'_{u_1}+v_2\varphi'_{v_1}+w_2\varphi'_{w_1}+r_2\varphi'_{r_1}=0. \tag{21}$$

Autrement dit, *la condition pour que deux plans soient conjugués s'obtient en annulant la forme polaire de* $\varphi$ *par rapport à leurs coordonnées.*

Si $P_1$ reste fixe, $P_2$ passe par un point fixe M, appelé *pôle de* $P_1$, et dont l'équation tangentielle s'écrit sous l'une ou l'autre des deux formes équivalentes :

$$u\varphi'_{u_1}+v\varphi'_{v_1}+w\varphi'_{w_1}+r\varphi'_{r_1}=0, \tag{22}$$

$$u_1\varphi'_{u}+v_1\varphi'_{v}+w_1\varphi'_{w}+r_1\varphi'_{r}=0. \tag{23}$$

La première montre que les coordonnées de ce point sont proportionnelles à

$$x_1=\frac{1}{2}\varphi'_{u_1},\qquad y_1=\frac{1}{2}\varphi'_{v_1},\qquad z_1=\frac{1}{2}\varphi'_{w_1},\qquad t_1=\frac{1}{2}\varphi'_{r_1}. \tag{24}$$

Tout ceci s'applique, que la quadrique $\Sigma$ soit dégénérée ou non. Supposons maintenant qu'elle n'est *pas dégénérée*. Si l'on rapproche les formules (24) des formules (13), on voit qu'il y a identité entre les deux définitions du pôle d'un plan, résultant des deux points de vue ponctuel et tangentiel.

Tout ceci s'applique évidemment en Géométrie plane, en remplaçant les plans conjugués par des *droites conjuguées.*

*444. Lorsque la quadrique* $\Sigma$ *dégénère en une conique*, deux plans conjugués $P_1$, $P_2$, leur intersection C et les plans tangents $P'$, $P''$ issus de cette intersection sont coupés par le plan $\Pi$ de la conique suivant deux droites $D_1$, $D_2$, un point Q et deux tangentes $T'$, $T''$. Les quatre droites forment un faisceau harmonique de sommet Q; donc $D_1$ et $D_2$ sont conjuguées par rapport à la conique. Il s'ensuit que, si, $P_1$ restant fixe, $P_2$ varie en restant conjugué

de $P_1$, $D_2$ varie en restant conjuguée de $D_1$ et, par suite, pivote autour du pôle M de $D_1$. D'où la règle suivante :

*Le pôle d'un plan* P *par rapport à une conique de plan* $\Pi$ *s'obtient en prenant le pôle de la trace de* P *sur* $\Pi$ *par rapport à cette conique.*

On verrait de même que, *si* $\Sigma$ *dégénère en deux points* A et B, le pôle du plan P est le conjugué harmonique du point où ce plan rencontre la droite AB par rapport au segment AB. On a une règle analogue en Géométrie plane.

445. Le lecteur examinera ce que deviennent, par dualité, les définitions données au n° 438. Contentons-nous de faire observer que, dans l'espace, le triangle et le trièdre conjugués sont deux éléments corrélatifs. De même qu'un triangle est conjugué par rapport à la quadrique S s'il est conjugué par rapport à la section de S par son plan, de même un trièdre est conjugué par rapport à la quadrique $\Sigma$ s'il est conjugué par rapport au cône circonscrit [1] à $\Sigma$ à partir de son sommet.

Les équations corrélatives de (14) et (15), soit

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Dr^2 = 0, \tag{25}$$

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 = 0, \tag{26}$$

sont respectivement les équations tangentielles d'une quadrique rapportée à un tétraèdre conjugué et d'une conique rapportée à un triangle conjugué.

446. Génératrices rectilignes des quadriques. — Les quadriques dégénérées contiennent toutes des droites, dont la distribution est évidente et n'offre aucun intérêt particulier. *A priori*, il existe aussi des droites sur une quadrique non dégénérée, car, en la coupant par un plan tangent quelconque, on obtient une conique à point double (n° 342), c'est-à-dire deux droites (n° 431).

Nous allons étudier leur distribution et leurs propriétés.

L'équation d'une quadrique non dégénérée peut toujours se mettre

---

(1) A vrai dire, nous n'avons pas défini, du point de vue tangentiel, les éléments conjugués par rapport à un cône, qui n'est pas une dégénérescence tangentielle. On y arrive en transformant, par dualité, la définition des éléments conjugués par rapport à une conique de l'espace, qui n'est pas une dégénérescence ponctuelle. Deux plans *passant par le sommet d'un cône* sont conjugués par rapport à ce cône s'ils sont conjugués harmoniques par rapport aux plans tangents issus de leur intersection. Un trièdre est conjugué par rapport à un cône *de même sommet*, si les plans de ses faces sont deux à deux conjugués par rapport à ce cône.

sous la forme

$$PQ = RS, \tag{27}$$

P, Q, R, S désignant quatre formes linéaires indépendantes. En effet, la décomposition en carrés nous donne une équation qui peut s'écrire, si l'on ne s'occupe pas de la réalité,

$$P'^2 - Q'^2 = R'^2 - S'^2, \tag{28}$$

les formes P', Q', R', S' étant indépendantes. Il suffit, dès lors, de poser

$$P = P' - Q', \qquad Q = P' + Q', \qquad R = R' - S', \qquad S = R' + S'$$

pour obtenir l'équation (27).

Cela posé, on aperçoit tout de suite les deux familles de droites

$$P = uR, \qquad Q = \frac{1}{u} S; \tag{29}$$

$$P = vS, \qquad Q = \frac{1}{v} R. \tag{30}$$

Quand le paramètre $u$ varie, la droite (29) engendre la surface (27), comme on le voit en éliminant ce paramètre (n° 62). De même, quand $v$ varie, la droite (30) engendre aussi la quadrique.

Nous obtenons ainsi *deux systèmes de génératrices rectilignes*.

Je dis qu'*il n'y a pas d'autres droites sur la surface*. En effet, supposons qu'il y en ait une : G. Coupons-la par le plan $P = 0$. Le point d'intersection M annule le premier membre de (27), donc le second, donc R ou S. Supposons qu'il annule R. Le point M appartient à la droite $P = 0$, $R = 0$; donc, G rencontre cette droite et se trouve dans un plan de la forme

$$P + \lambda R = 0.$$

Mais, ce plan coupe la quadrique suivant les deux droites

$$P = 0, \quad R = 0 \qquad \text{et} \qquad P + \lambda R = 0, \quad \lambda Q + S = 0.$$

La première est la droite $v = 0$; la seconde est la droite $u = -\lambda$. La droite G, qui coïncide nécessairement avec l'une d'elles, appartient donc à l'un des systèmes ci-dessus. On aboutirait à une conclusion analogue en supposant que M annule S.

447. Théorème I. — *Par tout point de la surface passe une génératrice et une seule de chaque système.*

En effet, cherchons à faire passer la droite (29) par le point $M_0$. On a, pour déterminer la valeur de $u$, deux équations du premier degré

$$(31)\qquad P_0 - uR_0 = 0, \qquad Q_0 u - S_0 = 0.$$

Ces équations sont compatibles, parce que $M_0$ satisfait à (27), par hypothèse. Elles ne peuvent être vérifiées toutes deux identiquement, car cela exigerait que les quatre quantités $P_0$, $Q_0$, $R_0$, $S_0$ fussent toutes nulles, ce qui est impossible, à cause de l'indépendance des quatre formes linéaires P, Q, R, S. Elles admettent donc une solution et une seule [1].

On raisonnerait de même pour l'autre système.

Théorème II. — *Tout plan tangent contient une génératrice et une seule de chaque système.*

Ce sont les deux génératrices issues de son point de contact.

Théorème III. — *Deux génératrices de même système ne se rencontrent pas.*

Car, si elles se rencontraient, il passerait deux génératrices de même système par leur point de rencontre, ce qui est contraire au théorème I.

Théorème IV. — *Deux génératrices de systèmes différents se rencontrent.*

En effet, les génératrices ($u$) et ($v$) se rencontrent au point d'intersection des trois plans

$$(32)\qquad P = uR, \qquad P = vS, \qquad P = uvQ.$$

On peut aussi chercher un plan contenant à la fois les deux

---

[1] Cette solution peut être $u = \infty$, si $Q_0 = R_0 = 0$.

droites. Il a une équation qui doit être à la fois des deux formes

$$P - uR + \lambda\left(Q - \frac{1}{u}S\right) = 0,$$
$$P - vS + \mu\left(Q - \frac{1}{v}R\right) = 0.$$

Ces équations sont identiques si l'on prend $\lambda = \mu = uv$; de sorte que les deux génératrices sont dans le plan

$$(33) \qquad P + uvQ - uR - vS = 0.$$

Corollaire. — *Deux génératrices de systèmes différents ne peuvent coïncider.*

Car, si une droite appartenait à la fois aux deux systèmes, elle rencontrerait toutes les génératrices $(u)$ comme appartenant au système $(v)$ et toutes les génératrices $(v)$ comme appartenant au système $(u)$. Mais, d'autre part, elle ne saurait rencontrer aucune génératrice $(u)$ parce qu'elle appartient au système $(u)$, ni aucune génératrice $(v)$ parce qu'elle appartient au système $(v)$. On arrive à une contradiction; l'hypothèse est donc absurde.

Théorème V. — *Les génératrices d'un système décrivent deux divisions homographiques sur deux génératrices quelconques de l'autre système.*

Cela résulte visiblement des théorèmes IV et I.

La réciproque de ce théorème a été démontrée au n° 447.

Théorème VI. — *Une quadrique est entièrement déterminée quand on connaît trois génératrices* $G_1$, $G_2$, $G_3$ *de même système.*

Car, si l'on prend un point quelconque M sur $G_1$, la génératrice $G'$ du second système qui passe par M est entièrement déterminée par la condition de passer par M et de rencontrer $G_2$ et $G_3$. Quand M décrit $G_1$, $G'$ décrit la quadrique.

448. On met quelquefois les équations des deux systèmes de génératrices sous la forme suivante. On écrit l'équation de la quadrique

$$(34) \qquad P^2 + Q^2 = R^2 + S^2.$$

Cette équation est vérifiée identiquement si l'on pose

$$(35)\qquad P = R\cos\varphi - S\sin\varphi,\qquad Q = R\sin\varphi + S\cos\varphi$$

ou bien

$$(36)\qquad P = R\cos\psi + S\sin\psi,\qquad Q = R\sin\psi - S\cos\psi.$$

Ces deux groupes d'équations définissent chacun un système de génératrices.

*Remarques.* — I. Les équations (29), (30) ou (35), (36) s'appliquent aussi bien en coordonnées tangentielles.

II. *Pour que les génératrices soient réelles*, il faut et il suffit que l'équation de la surface puisse se mettre sous l'une ou l'autre des formes (27) ou (34), les formes linéaires P, Q, R, S étant réelles. Il revient au même de dire que *la décomposition en carrés doit donner deux carrés positifs et deux carrés négatifs.*

III. Lorsque la quadrique dégénère en un cône, les deux systèmes de génératrices viennent se confondre.

# CHAPITRE XXX.

## CLASSIFICATION DES COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ ; POINTS A L'INFINI, CENTRES, DIAMÈTRES, PLANS DIAMÉTRAUX.

449. Classification par la décomposition en carrés. — Dans le Chapitre précédent, nous avons classé les courbes et surfaces du second degré suivant le *nombre* de carrés indépendants que donne la décomposition du premier membre de leur équation. Mais, nous ne nous sommes nullement préoccupés des *signes* de ces carrés. En outre, nous n'avons fait intervenir nulle part *le plan de l'infini*. Or, ces deux considérations ont une importance capitale dans la forme des lignes et des surfaces. Si donc nous voulons être renseignés sur les diverses configurations que peuvent présenter une conique ou une quadrique, il nous faut reprendre la classification par la décomposition en carrés, mais en tenant compte à la fois des signes et du plan de l'infini.

Soit l'équation du second degré, que nous supposerons toujours à *coefficients réels* et écrite en coordonnées *cartésiennes* homogènes

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{1}$$

Nous allons décomposer la forme quadratique $f$ par la méthode de Gauss (t. I, n° 301), en nous astreignant à *ne jamais prendre $t$ pour variable directrice*. C'est grâce à cette distinction de la variable $t$ que le plan de l'infini va jouer son rôle particulier. Convenons, en outre, de faire $t = 1$, aussitôt la décomposition terminée.

Il s'agit d'examiner maintenant tous les cas possibles de décomposition.

Chaque extraction d'un ou deux carrés fait disparaître une ou deux variables de la forme quadratique résiduelle. Il est, par suite, commode de discuter d'abord les cas où il manque des coordonnées.

*Premier cas : Il manque deux coordonnées*, soit, par exemple, $y$ et $z$.

Si $x$ figure au carré, on peut la prendre pour variable directrice; on obtient alors une décomposition de la forme

$$\pm P^2 + h, \tag{2}$$

P désignant une fonction linéaire réelle renfermant $x$, et $h$ désignant une constante positive, négative ou nulle.

Si $x$ ne figure qu'au premier degré, on ne peut rien extraire : en faisant $t = 1$, on a la décomposition

$$P. \tag{3}$$

Enfin, si $x$ ne figure pas du tout, on a la décomposition

$$h. \tag{4}$$

*Deuxième cas : Il manque une coordonnée*, soit $z$.

S'il y a un terme en $x^2$, par exemple, il nous donne un carré $\pm P^2$ et il reste une forme quadratique en $y$, $t$, qui donne une décomposition de la forme (2), (3) ou (4). Cela nous donne les décompositions suivantes :

$$\pm P^2 \pm Q^2 + h, \tag{5}$$

$$\pm P^2 + Q, \tag{6}$$

$$\pm P^2 + h, \tag{7}$$

les signes $\pm$ devant être combinés de toutes les manières possibles.

Remarquons que les équations $P = 0$, $Q = 0$ ont toujours une solution unique, car de la seconde on peut tirer $y$, qui y figure seul, et de la première on tire ensuite $x$, qui y figure certainement.

S'il n'y a pas de termes en $x^2$ ou en $y^2$, mais un terme en $xy$, on extrait simultanément deux carrés de signes contraires et l'on a une décomposition qui rentre dans la forme (5). Les équations $P = 0$, $Q = 0$ ont encore une solution unique, car elles donnent l'une $x + y$, l'autre $x - y$.

Si $x$ et $y$ ne figurent qu'au premier degré, on ne peut rien extraire et l'on a une décomposition de la forme (3) ou (4), avec cette seule différence que P peut renfermer deux variables au lieu d'une.

*Troisième cas : Il ne manque aucune coordonnée.* — S'il y a un

terme en $x^2$, il nous donne un carré $\pm P^2$, plus une forme quadratique en $y$, $z$, qui se décomposera suivant (5), (6), (7), (3) ou (4); d'où les décompositions suivantes :

(8) $\pm P^2 \pm Q^2 \pm R^2 + h$,

(9) $\pm P^2 \pm Q^2 - R$,

(10) $\pm P^2 \pm Q^2 + h$,

(11) $\pm P^2 + Q$,

(12) $\pm P^2 + h$,

les signes $\pm$ devant encore être combinés de toutes les manières possibles.

Les équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ ont toujours une solution unique, car les deux dernières donnent $y$ et $z$, d'après le cas précédent, et la première donne ensuite $x$.

Dans les types (10) et (11), les plans $P = 0$, $Q = 0$ ne sont jamais parallèles, car le second est parallèle à $Ox$ et le premier ne l'est pas.

Si $f$ ne renferme pas de carrés, elle renferme au moins un rectangle, soit $xy$, sans quoi l'équation (1) s'abaisserait au premier degré, ce que nous ne supposerons pas. On peut donc extraire deux carrés $P^2 - Q^2$ et il reste une forme quadratique en $z$, $t$, qui donne (2), (3) ou (4). On rentre dans les types (8), (9) ou (10).

Les équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ ont encore une solution unique, car la troisième donne $z$; puis, les deux premières donnent l'une $x + y$, l'autre $x - y$. Dans le cas du type (10), les plans $P = 0$, $Q = 0$ ne sont jamais parallèles, car ils coupent le plan des $xy$ suivant des droites respectivement parallèles aux deux bissectrices.

En résumé, *tous les types possibles de décomposition sont compris dans les formules* (8) *à* (12), et, dans tous les cas, *les plans* $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ *forment un véritable trièdre ou, si* R *manque, un véritable dièdre.*

Les trois derniers types sont ceux de la Géométrie plane, les droites $P = 0$, $Q = 0$ étant toujours concourantes.

450. Équations réduites; formes des coniques et quadriques. — Les plans (ou droites) (P), (Q), (R) peuvent toujours être pris pour plans (ou axes) de coordonnées. Les formes linéaires P, Q, R deviennent alors respectivement proportionnelles à $x$, $y$, $z$, et, en

égalant à zéro chacun des types de décomposition (8) à (12), on obtient des *équations réduites*, qui vont nous permettre d'étudier très simplement les différentes formes que peut affecter une courbe ou une surface du second degré.

Nous pourrions nous borner à l'étude des types (8) et (9), car les autres se ramènent à l'étude des formes d'une conique, lesquelles sont bien connues en Géométrie élémentaire. Il nous paraît utile, néanmoins, de faire ici cette étude, que nous envisagerons en premier lieu, en négligeant toutefois le type (12), qui représente deux plans (ou droites) parallèles : $P = \pm\sqrt{\pm h}$.

451. Ellipse. — Considérons le type (10) dans le cas où les carrés $P^2$ et $Q^2$ ont *le même signe*, que nous pouvons toujours supposer être le signe $+$, quitte à changer le signe de $h$.

Si $h > 0$, la courbe n'a aucun point réel ; nous l'appellerons *ellipse imaginaire*. Dans l'espace, on aurait un *cylindre elliptique imaginaire*.

Si $h = 0$, l'équation se décompose en $P \pm iQ = 0$ ; la conique (ou la quadrique) dégénère en *deux droites* (ou *deux plans*) *sécantes et imaginaires conjuguées*.

Le seul cas intéressant est $h < 0$. Il nous donne une équation réduite de la forme

$$(13) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Le lecteur reconnaît l'équation élémentaire de l'ellipse rapportée à ses axes. Mais ici, les axes de coordonnées peuvent être *obliques*. Construisons donc la courbe.

D'abord, elle admet l'origine pour centre de symétrie (n° 248) et les axes de coordonnées pour axes de symétrie oblique (n° 244). Nous pouvons donc nous borner à considérer les valeurs positives de $x$ et de $y$. Nous tirons, par exemple,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

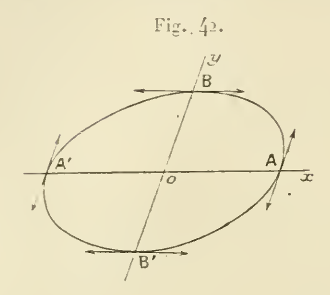
et nous voyons que lorsque $x$ croît de $0$ à $a$, $y$ décroît de $b$ à $0$ et le point courant M décrit l'arc BA (*fig.* 42). L'équation de la tan-

gente en ce point est (n° 197)

$$(14)\qquad \frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}-1=0.$$

Elle nous montre que les tangentes en B et A sont respectivement parallèles à $Ox$ et $Oy$. En complétant l'arc BA par symétrie, on

Fig. 42.




obtient la courbe fermée ABA'B', que nous appellerons *ellipse réelle*, nous réservant de prouver plus tard (n° 469) son identité complète avec la courbe connue sous ce nom en Géométrie élémentaire.

Dans l'espace, l'équation (13) représente un *cylindre elliptique réel*.

452. Hyperbole. — Supposons maintenant que, dans le type (10), $P^2$ et $Q^2$ soient précédés de *signes contraires*.

Si $h=0$, l'équation se décompose en $P\pm Q=0$. La conique (ou la quadrique) dégénère en *deux droites* (ou deux plans) *sécantes réelles*.

Si $h\neq 0$, l'équation réduite est de la forme

$$(15)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

à un échange près des axes ou de tous les signes.

Le lecteur reconnaît l'équation élémentaire de l'hyperbole. Construisons néanmoins la courbe.

Comme tout à l'heure, l'origine et les axes de coordonnées sont des éléments de symétrie.

On a

$$(16)\qquad x=\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}.$$

Si $y$ croît de o à $+\infty$, $x$ croît de $a$ à $+\infty$ et le point courant part du point A de $Ox$, avec une tangente parallèle à $Oy$, et s'éloigne à l'infini, asymptotiquement à la droite [1]

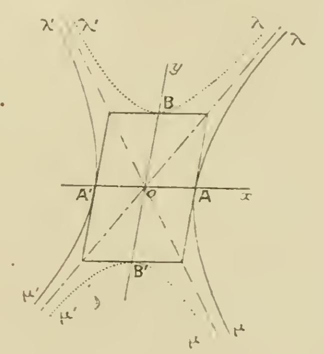
$$\frac{X}{a} - \frac{Y}{b} = 0. \tag{17}$$

En effet, on a

$$V = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{y}{b}\left[\left(1 + \frac{b^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] = \frac{1}{2}\frac{b}{y} + \ldots.$$

Cette expression tend vers zéro par valeurs positives; cela nous prouve bien que la droite (17) est asymptote et, en outre, qu'elle est au-dessus de la courbe, pour l'arc considéré $A\lambda$ (*fig.* 43).

Fig. 43.




En complétant par symétrie, on obtient les deux branches infinies $\lambda A\mu$, $\lambda' A'\mu'$, dont l'ensemble constitue une *hyperbole*.

Si l'on changeait $-1$ en $+1$ dans l'équation (15), on obtiendrait les deux branches $\lambda B\lambda'$, $\mu B'\mu'$, tracées en pointillé et qui constituent l'*hyperbole conjuguée* de la première (*cf.* n° 533).

Dans l'espace, l'équation (15) représente un *cylindre hyperbolique*.

453. Parabole. — Passons maintenant au type (11). Il nous donne

---

[1] Cela peut se voir sur l'équation de la tangente [analogue à (14)], écrite en coordonnées homogènes. On peut remarquer aussi que les asymptotes sont les directions asymptotiques menées par le centre (n° 461).

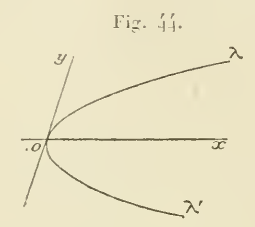
pour équation réduite

$$(18) \qquad y^2 - 2px = 0.$$

Le lecteur reconnaît l'équation élémentaire de la parabole. Construisons néanmoins la courbe.

L'axe des $x$ est un axe de symétrie oblique pour la direction $Oy$. La courbe passe à l'origine, avec la tangente $Oy$. Elle admet pour direction asymptotique $Ox$, l'asymptote étant rejetée à l'infini (nº 237). Enfin, lorsque $y$ croît de 0 à $+\infty$, $x$ croît également de 0 à $+\infty$ et le point M décrit l'arc $O\lambda$ (*fig.* 44). En complétant par

Fig. 44.




symétrie, on a la courbe $\lambda O \lambda'$, que nous appellerons *parabole*. Dans l'espace, l'équation (18) représente un *cylindre parabolique*.

454. Ellipsoïde. — Passons maintenant au type (8), dans le cas où $P^2$, $Q^2$, $R^2$ ont *le même signe*, par exemple le signe $+$.

Si la constante $h$ est $> 0$, aucun point n'est réel ; nous dirons que la surface est une *ellipsoïde imaginaire*.

Si $h = 0$, on a un cône (nº 375), qui n'a que son sommet de réel ; c'est un *cône imaginaire*.

Le seul cas intéressant est celui où $h$ est $< 0$. On a alors l'équation réduite

$$(19) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Étudions la forme de cette surface.

D'abord, l'origine est un centre de symétrie. Ensuite, chaque plan de coordonnées est un plan de symétrie oblique pour la direction de l'axe opposé.

Coupons par le plan $z = h$ ; l'équation de la section par rapport

aux axes $O'xy$ (*fig.* 45) est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \tag{20}$$

ou

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1=0, \tag{21}$$

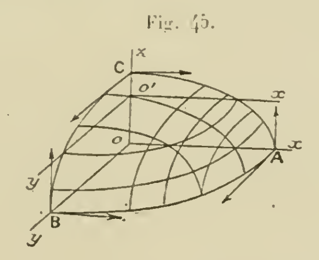
en posant

$$a'=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \qquad b'=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}. \tag{22}$$

La section est donc une ellipse (n° 451), qui n'est réelle que si $-c<h<+c$. Quand $h$ croît de 0 à $c$, elle part de l'ellipse du plan des $xy$, puis diminue constamment, en restant homothétique à elle-même et enfin se réduit au point C de $Oz$ (ou à deux droites imaginaires), pour $h=c$. Le plan de section est alors tangent en ce point [1].

On a des conclusions analogues pour les sections parallèles aux autres plans de coordonnées. La surface est donc une surface fermée, inscrite dans le parallélépipède $x=\pm a$, $y=\pm b$, $z=\pm c$, et dont

Fig. 45.




la figure 45 donne une idée. (On s'est borné à représenter la portion de la surface située dans la région positive des trois plans de coordonnées.)

On l'appelle *ellipsoïde réel*.

455. Hyperboloïde a une nappe. — Supposons maintenant que *deux carrés seulement soient de même signe.*

---

[1] Puisque la section se décompose. On peut aussi le voir sur l'équation général du plan tangent, qui est

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}-1=0.$$

Examinons d'abord le cas de $h = 0$. On a une équation réduite de la forme

$$(23)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Elle représente un *cône réel* de sommet O, qui a pour bases une ellipse dans le plan $z = c$ et des hyperboles dans les plans $y = b$ et $x = a$.

Supposons maintenant $h \neq 0$ et du signe du carré qui est seul de son signe. Nous avons l'équation réduite

$$(24)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Comme tout à l'heure, l'origine et les plans de coordonnées sont des éléments de symétrie.

Le *cône des directions asymptotiques* est le cône (23); il *est réel*. C'est d'ailleurs le *cône asymptote*. On peut le voir en prenant l'équation du plan tangent en coordonnées homogènes, ou bien en se rappelant que l'origine est centre (n° 461), ou bien en calculant la distance $V = \overline{MM'}$ entre le point M de (24) et le point M' de (23) de mêmes $x$ et $y$. En posant

$$u = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}},$$

on a

$$(25)\qquad V = cu - c\sqrt{(u^2 - 1)} = cu\left[1 - \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}\frac{c}{u} + \ldots.$$

Lorsque $u$ tend vers $+\infty$, V tend vers zéro par valeurs positives et $z = cu$ tend vers $+\infty$. Donc, le cône (23) est bien asymptote et se trouve *au-dessus de la surface*, dans la région des $z$ positifs.

Coupons par le plan $z = h$. Nous obtenons une ellipse représentée par l'équation (21), si l'on pose

$$a' = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}},\qquad b' = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}.$$

Quand $h$ croît de 0 à $+\infty$, cette ellipse part de l'ellipse du plan des $xy$ et augmente indéfiniment en restant homothétique à elle-même.

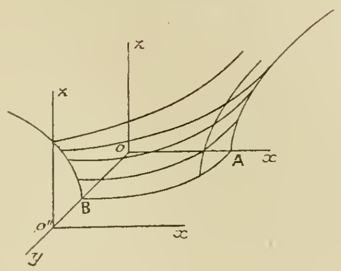
Coupons par le plan $y = h$. La section a pour équation par rapport

aux axes $O''xz$ (*fig.* 46) :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

C'est une hyperbole qui a, par rapport à $Ox$, la disposition en

Fig. 46.




trait plein ou en pointillé de la figure 43, suivant que $h^2$ est $< b^2$ ou $> b^2$. Pour $h = \pm b$, elle se décompose en deux droites réelles, concourantes au point B, où le plan de section est alors tangent.

Les sections par les plans parallèles à $yOz$ sont des hyperboles analogues.

La surface est constituée par une nappe infinie entourant $Oz$ et s'évasant de plus en plus, au fur et à mesure qu'elle s'éloigne de $xOy$, en se confondant à la limite avec le cône asymptote (*fig.* 46).

On l'appelle *hyperboloïde à une nappe*.

456. Hyperboloïde a deux nappes. — Supposons maintenant que $h$ ait le signe des deux carrés qui sont de même signe. Nous avons l'équation réduite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0. \tag{26}$$

L'origine et les plans de coordonnées sont toujours des éléments de symétrie.

Le cône asymptote est toujours le cône (23). Mais, cette fois, si l'on répète le calcul (25), on trouve $V = -\frac{1}{2}\frac{c}{u}$; de sorte que, dans la région des $z$ positifs, le cône est *au-dessous de la surface.*

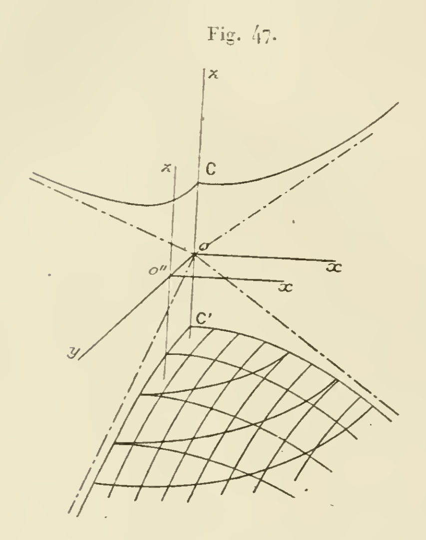
Le plan $z = h$ coupe encore suivant l'ellipse (21), mais avec

$$a' = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \qquad b' = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

Cette ellipse n'est réelle que pour $h^2 > c^2$.

Pour $h = c$, elle se réduit au point C (ou deux droites imaginaires); le plan de section est tangent en ce point.

Fig. 47.




Si $h$ croît de $c$ à $+\infty$, l'ellipse croît indéfiniment en restant homothétique à elle-même.

Le plan $y = h$ coupe suivant l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right),$$

qui a, par rapport à $O''x$, la disposition en trait pointillé de la figure 43.

La surface comprend deux nappes symétriques, situées de part et d'autre des plans $z = \pm c$, entourant $Oz$ et s'évasant de plus en plus, au fur et à mesure qu'elles s'éloignent de $xOy$, en se confondant à la limite avec le cône asymptote (*fig.* 47).

On l'appelle *hyperboloïde à deux nappes*.

L'hyperboloïde (26) est dit *conjugué* de l'hyperboloïde (24) (*cf.* n° 452).

457. Paraboloïde elliptique. — Arrivons enfin au type (9), en supposant d'abord les *deux carrés de même signe*. Nous avons l'équation réduite

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0, \tag{27}$$

$p$ et $q$ désignant deux constantes positives.

Le plan $xOy$ est un plan de symétrie oblique pour la direction $Oz$; il en est de même du plan $xOz$ pour la direction $Oy$. Le plan $yOz$ est tangent en O (nº 206).

L'axe des $x$ est *la seule direction asymptotique réelle*. Le plan asymptote correspondant est le plan de l'infini, comme on le voit en prenant l'équation du plan tangent en coordonnées homogènes.

Coupons par le plan $x = h$. Nous obtenons l'ellipse

$$\frac{y^2}{2ph} + \frac{z^2}{2qh} - 1 = 0. \tag{28}$$

Elle n'est réelle que pour $h > 0$ et lorsque $h$ croît de 0 à $+\infty$, elle croît indéfiniment, en restant homothétique à elle-même, depuis le point O jusqu'à une ellipse infinie.

Le plan $z = h$ coupe suivant la parabole P'

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{h^2}{2q}\right). \tag{29}$$

Si l'on porte l'origine au point $O'\left(\frac{h^2}{2q}, 0, h\right)$, l'équation ci-dessus devient

$$y^2 = 2px. \tag{30}$$

Elle est indépendante de $h$. Donc, lorsque $h$ varie, P' subit une translation. Le point O' décrit d'ailleurs la parabole Q, section de la surface par $zOx$.

En coupant par $y = h$, on verrait de même que la surface peut être engendrée par la translation [1] de la parabole Q, le point O décrivant la parabole P, section par $xOy$.

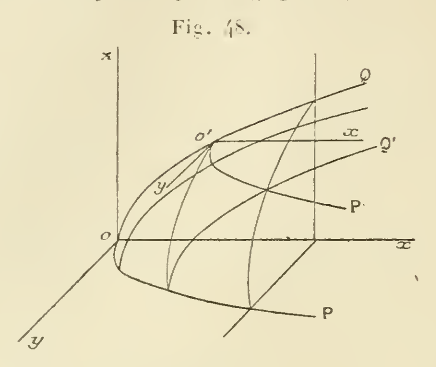
Remarquons que les paraboles P et Q tournent toutes deux leur concavité vers les $x$ positifs.

---

[1] C'est une *surface de translation* (*cf.* Chap. XXIII, Exercice résolu nº 6).

La surface se compose d'une seule nappe, tangente en O à $yOz$, entourant la partie positive de $Ox$ et s'évasant de plus en plus au fur et à mesure qu'elle s'éloigne de $yOz$ (*fig.* 48).

Fig. 48.




On l'appelle *paraboloïde elliptique*.

458. Paraboloïde hyperbolique. — Supposons maintenant que les deux carrés du type (9) soient de signes contraires. Nous avons l'équation réduite

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2x = 0, \tag{31}$$

$p$ et $q$ désignant encore deux constantes positives.

Les plans $yOx$ et $zOx$ sont encore des plans de symétrie oblique et $yOz$ est toujours tangent en O.

L'axe des $x$ est toujours une direction asymptotique, le plan asymptote correspondant étant le plan de l'infini. Mais il y a d'autres *directions asymptotiques réelles*, à savoir celles des deux plans

$$\frac{y}{\sqrt{p}} \pm \frac{z}{\sqrt{q}} = 0, \tag{32}$$

qui sont appelés *plans directeurs* (*cf.* n° 562). Le plan asymptote correspondant à la direction $(\alpha, \sqrt{p}, \sqrt{q})$, par exemple, a pour équation (n° 240)

$$\frac{Y}{\sqrt{p}} - \frac{Z}{\sqrt{q}} - \alpha = 0. \tag{33}$$

Il est parallèle au premier plan directeur.

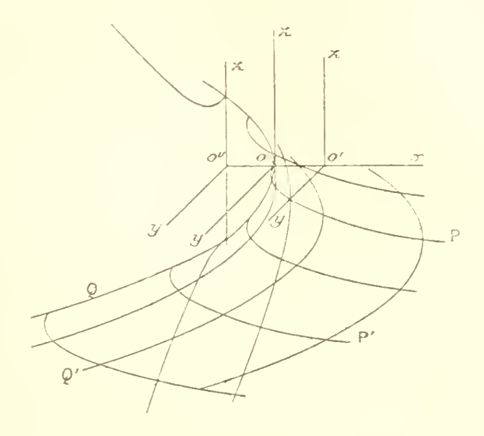
La section par le plan $x = h$ est l'hyperbole

$$\frac{y^2}{2ph} - \frac{z^2}{2qh} - 1 = 0. \tag{34}$$

Elle coupe en deux points réels $xOy$ ou $xOz$ suivant que $h$ est $> 0$ ou $< 0$.

Comme au numéro précédent, on peut voir que les sections par les plans parallèles à $xOy$ ou $xOz$ sont des paraboles déduites par translation des paraboles P et Q des plans $xOy$ et $xOz$. Mais cette fois, la parabole P tourne sa concavité vers les $x$ positifs, tandis que Q tourne sa concavité vers les $x$ négatifs. Cette simple différence

Fig. 49.




suffit pour entraîner une modification profonde dans la forme de la surface, qu'on se représente, cette fois, beaucoup plus difficilement (*fig.* 49). On la compare quelquefois à une selle.

On l'appelle *paraboloïde hyperbolique*.

459. Nous connaissons maintenant toutes les formes de courbes ou de surfaces qu'est susceptible de représenter une équation du second degré et nous possédons en outre un *moyen certain de reconnaître, sur une équation à coefficients numériques donnés, à quel cas nous avons affaire*. Ce moyen consiste à faire la décomposition en carrés comme il a été expliqué au n° 449 et à examiner dans quel type rentre la décomposition. Si l'on n'a pas présent à l'esprit le Tableau de correspondance entre les divers types et les diverses surfaces, il suffit d'écrire l'équation réduite pour se reconnaître aussitôt.

460. Points a l'infini; genre. — On classe quelquefois les coniques et quadriques en *genres*, au moyen de leurs points à l'infini.

En Géométrie plane, trois cas sont à distinguer. Suivant que les points à l'infini sont imaginaires, réels et distincts ou confondus, on dit que la conique est du *genre ellipse*, du *genre hyperbole* ou du *genre parabole*, donnant ainsi à chaque genre le nom de la conique non dégénérée qui en fait partie.

Le genre d'une conique donnée par son équation se reconnaît aisément en écrivant le faisceau des directions asymptotiques (n° 235) et en cherchant la réalité de ses rayons (n° 79).

Dans l'espace, la nature de la section par le plan de l'infini pour les différentes classes de quadriques se reconnaît facilement sur les équations réduites, en formant le cône des directions asymptotiques. On groupe toutes les quadriques de même section en un même genre, auquel on donne le nom de la quadrique non dégénérée ou la moins dégénérée. Chaque genre est caractérisé par la décomposition en carrés de la forme quadratique $\varphi(x, y, z)$ constituée par les termes du second degré. Voici le Tableau des genres :

*Tableau des genres.*

| GENRE. | SECTION par le plan de l'infini. | CÔNE des directions asymptotiques. | $\varphi(x, y, z)$. | QUADRIQUES en faisant partie. |
|---|---|---|---|---|
| Ellipsoïde. | Conique imaginaire. | Cône imaginaire. | Trois carrés de même signe. | Ellipsoïdes réel et imaginaire ; cône imaginaire. |
| Hyperboloïde. | Conique réelle. | Cône réel. | Trois carrés non de même signe. | Hyperboloïdes à une et à deux nappes ; cône réel. |
| Paraboloïde elliptique. | Deux droites imaginaires. | Deux plans imaginaires. | Deux carrés de même signe. | Paraboloïde elliptique ; cylindre elliptique ; système de plans sécants imaginaires. |
| Paraboloïde hyperbolique. | Deux droites réelles. | Deux plans réels. | Deux carrés de signes contraires. | Paraboloïde hyperbolique ; cylindre hyperbolique ; système de plans sécants réels. |
| Cylindre parabolique. | Une droite double. | Un plan double. | Un carré. | Cylindre parabolique ; plans parallèles. |

Le genre d'une conique de l'espace se reconnaît en coupant par le plan de l'infini. En particulier, si la conique est définie, comme c'est presque toujours le cas, comme section d'une quadrique Q par un plan P, ses points à l'infini ne changent pas si l'on remplace Q par une quadrique homothétique (nº 407) et P par un plan parallèle. En particulier, on peut *couper le cône des directions asymptotiques par un plan parallèle à P mené par l'origine*. Suivant que les deux génératrices d'intersection sont imaginaires, réelles et distinctes ou confondues, la conique proposée est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

461. Centres, plans diamétraux, diamètres. — Nous avons vu, au cours de la discussion des équations réduites, que certaines coniques et quadriques admettent des éléments de symétrie. Rien n'est plus facile que de faire la recherche de ces éléments, dans le cas particulier des courbes et surfaces du second degré. Il suffit, en effet, *d'interpréter projectivement* leur définition pour être ramené à la théorie des éléments conjugués, exposée au Chapitre précédent.

Ainsi, *un centre est le pôle du plan de l'infini*. Ses coordonnées sont donc données par le système (nº 434)

$$(35) \qquad f'_x = 0, \qquad f'_y = 0, \qquad f'_z = 0,$$

la dernière équation devant être supprimée en Géométrie plane.

La discussion des centres pour les différentes espèces de quadriques (ou coniques) résulte de la discussion du nº 434. On peut aussi la faire très aisément au moyen des équations (35) appliquées aux équations réduites. On reconnaît ainsi que les ellipsoïdes, hyperboloïdes et cônes ont *un centre unique*. Les paraboloïdes n'ont pas de centre, car ils sont tangents au plan de l'infini, dont le pôle est le point de contact ou point à l'infini de l'intersection des plans directeurs. On dit quelquefois qu'ils ont *un centre unique à l'infini*. Les cylindres elliptique et hyperbolique et les systèmes de plans sécants ont une *ligne de centres*. Le cylindre parabolique, qui est tangent au plan de l'infini le long d'une génératrice, n'a pas de centre ; on dit quelquefois qu'il a une *ligne de centres à l'infini*. Enfin, le système de plans parallèles a un *plan de centres*.

Pour les coniques, l'ellipse, l'hyperbole et les sécantes ont un

*centre unique ;* la parabole a un *centre à l'infini ;* les droites parallèles ont une *ligne de centres.*

Le cône circonscrit à partir du centre a sa courbe de contact dans le plan de l'infini (n° 435); c'est donc l'enveloppe des plans asymptotes; c'est le *cône asymptote.*

En Géométrie plane, les tangentes issues du centre sont les *asymptotes.*

462. Quand on a trouvé un centre $O'(x_0, y_0, z_0)$, on sait qu'en portant l'origine en ce point, *les termes du premier degré disparaissent* (n° 248). D'autre part, si l'on ne change pas l'orientation des axes, les termes du second degré ne changent pas. Que devient le terme constant?

La nouvelle équation s'écrit

$$f(x_0 + x', y_0 + y', z_0 + z') = 0.$$

Pour avoir le nouveau terme constant, il suffit d'annuler $x', y', z'$; il reste $f(x_0, y_0, z_0)$.

On peut simplifier son calcul en tenant compte de (35). L'identité d'Euler nous donne, en effet,

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2}(x_0 f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + z_0 f'_{z_0} + f'_{t_0}) = \frac{1}{2} f'_{t_0}.$$

On a une formule analogue en Géométrie plane.

463. Un plan de symétrie oblique pour la direction $O\lambda(\alpha, \beta, \gamma)$, appelé plus couramment *plan diamétral conjugué* de cette direction, n'est autre que le *plan polaire du point à l'infini* sur $O\lambda$; il a donc pour équation (n° 432)

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0. \tag{36}$$

En Géométrie plane, on supprime le troisième terme et l'on a *le diamètre conjugué de la direction* $O\lambda$.

D'après le théorème du n° 435, *tout plan diamétral passe par le ou les centres.* C'est aussi évident d'après (35) et (36). En particulier, pour les paraboloïdes, tous les plans diamétraux sont parallèles à l'intersection des plans directeurs.

Remarquons aussi que la courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à $Oz$ est la section par le plan diamétral conjugué.

On a des propriétés analogues en Géométrie plane.

464. Cherchons maintenant à interpréter la théorie des droites conjuguées par rapport à une quadrique (n° 436), lorsqu'une de ces droites $D'$ est à l'infini. L'interprétation la plus simple consiste à se rappeler que tout plan P passant par $D'$ coupe D suivant un point M, qui est le pôle de $D'$ par rapport à la conique de section. Comme $D'$ est à l'infini, on voit que D n'est autre que *le lieu des centres des coniques de section par les plans parallèles* P. Cette droite est appelée *diamètre conjugué des plans* P.

Si l'on considère maintenant les plans polaires des points de $D'$, on sait qu'ils passent par D. Donc, *les plans diamétraux conjugués des directions de* P *passent tous par le diamètre conjugué de* P.

On en déduit aisément, d'après (36), les équations de ce diamètre, connaissant l'équation du plan P qui, par exemple, passe à l'origine. Soit

$$ux + vy + wz = 0 \tag{37}$$

cette équation. Prenons le plan diamétral conjugué de la direction $(v, -u, 0)$ de ce plan :

$$vf'_x - uf'_y = 0.$$

Par permutations circulaires, on a deux autres équations analogues et l'on peut écrire les équations du diamètre conjugué du plan (37) sous la forme simple

$$\frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{w}. \tag{38}$$

Comme les plans diamétraux, *tous les diamètres passent par le ou les centres.* En particulier, les diamètres des paraboloïdes sont tous parallèles à l'intersection des plans directeurs.

Les plans tangents parallèles aux plans P ont leurs points de contact à l'intersection de la quadrique avec le diamètre conjugué. Ces points sont quelquefois appelés *extrémités du diamètre.*

465. Systèmes de diamètres ou de plans diamétraux conjugués. —

Interprétons les triangles, trièdres et tétraèdres conjugués (n° 438), dans les cas particuliers où certains de leurs éléments vont à l'infini.

Soit un tétraèdre conjugué dont une face est le plan de l'infini. Les trois autres faces constituent un trièdre $Oxyz$, dont le sommet O est centre de la quadrique. En outre, *le plan diamétral conjugué de chaque arête est le plan de la face opposée;* chaque arête est le diamètre conjugué du plan de la face opposée. Un tel trièdre est appelé *système de diamètres conjugués* ou *de plans diamétraux conjugués.* C'est évidemment un trièdre conjugué (n° 438). Si on le prend pour trièdre de coordonnées, l'équation de la quadrique ne doit pas changer quand on change $x$ en $-x$, ou $y$ en $-y$, ou $z$ en $-z$. Elle est donc de la forme (*cf.* n° 439)

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0. \tag{39}$$

Si l'on se reporte aux équations réduites (19), (24) et (26), on voit que *les plans* (P), (Q), (R) *donnés par les carrés de la décomposition forment toujours un système de plans diamétraux conjugués.*

Il est à remarquer que ceci ne s'applique pas aux paraboloïdes [1] ni au cylindre parabolique, qui n'ont pas de centre à distance finie.

On a des conclusions analogues en Géométrie plane. On doit alors supprimer le troisième terme dans l'équation (39).

466. Considérons un triangle conjugué $xyz$ situé dans le plan de l'infini, c'est-à-dire un triangle conjugué par rapport à la conique de l'infini de la quadrique. Tout trièdre $Oxyz$ qui l'admet comme trace sur le plan de l'infini jouit de la propriété suivante : *le plan diamétral conjugué de chaque arête est parallèle à la face opposée.* Un tel trièdre est appelé *trièdre de directions conjuguées.* Ce n'est un système de diamètres conjugués que si O est centre.

Si on le prend pour trièdre de coordonnées, le cône des directions asymptotiques de sommet O admet toujours O pour centre et, par

[1] Dans le cas des paraboloïdes, le trièdre $Oxyz$, qui donne les équations réduites, est tel que chacun des plans $xOy$ et $xOz$ est plan diamétral conjugué de l'arête opposée. Mais, $yOz$ n'est pas plan diamétral conjugué de $Ox$; il a seulement une direction conjuguée de cette droite (n° 466).

suite, $Oxyz$ pour système de diamètres conjugués ([1]). Il s'ensuit que son équation est de la forme (39), mais sans terme constant. Donc, *si l'on prend pour trièdre de coordonnées un trièdre de directions conjuguées, il n'y a pas de termes rectangles dans l'équation de la quadrique et réciproquement.*

Nous dirons quelquefois que le plan $xOy$, par exemple, a une direction conjuguée de la direction de la droite $Oz$. De même, $Ox$ et $Oy$ ou bien $zOx$ et $zOy$ ont des directions conjuguées. Cela veut dire simplement que les traces de ces directions sur le plan de l'infini sont des éléments conjugués (polaire et pôle, points conjugués, droites conjuguées) par rapport à la conique de l'infini de la quadrique.

Tout cela s'applique en Géométrie plane, avec des modifications qui sont évidentes.

467. Méthodes d'identification d'une conique ou d'une quadrique. — Quand on est en face d'une équation quelconque du second degré, on est quelquefois très embarrassé pour savoir ce qu'elle représente.

Si l'on a affaire à une équation à coefficients numériques, le procédé qui est souvent le plus pratique et qui est toujours le plus sûr est celui de la *décomposition en carrés* (n° 449). Il a, en outre, l'avantage de conduire à une équation réduite.

Malheureusement, avec des coefficients littéraux, cette méthode devient rapidement inextricable et il devient nécessaire de trouver des procédés plus simples. On utilise, à cet effet, une ou plusieurs propriétés se mettant facilement en évidence sur l'équation proposée et dont l'ensemble suffit pour caractériser la nature de la surface (ou de la courbe) ([2]).

Parmi les éléments qu'on peut ainsi invoquer, signalons les points à l'infini (classification par le *genre*), les *centres*, les *diamètres*, les *génératrices rectilignes*, les *sections planes*, etc. Les propriétés spéciales de ces éléments, pour chaque classe de quadriques, se mettent facilement en évidence sur les équations réduites. Nous en

---

([1]) Il faut remarquer que ce cône et la quadrique proposée ont même section par le plan de l'infini.

([2]) Pour les coniques, il suffit généralement de chercher le genre et de voir si la conique est dégénérée.

avons rassemblé quelques-unes dans le Tableau ci-dessous, qui résume toute la classification des quadriques.

| TYPE de la décomposition. | NATURE de la quadrique. | GENRE. | DIRECTIONS asymptotiques. | CENTRES. | DIAMÈTRES conjugués. |
|---|---|---|---|---|---|
| $P^2+Q^2+R^2+k^2$. | E imag. | Ellipsoïde. | Cône imagin. | 1 centre à distance finie : hors (¹) | Tous imag. |
| $P^2+Q^2+R^2-k^2$. | E réel. | | | hors. | Tous réels. |
| $P^2+Q^2+R^2$...... | Cône imag. | | | sur (¹). | Tous nuls. |
| $P^2+Q^2-R^2-k^2$. | $H_1$ | Hyperboloïde. | Cône réel. | hors. | 2 r., 1 i. |
| $P^2+Q^2-R^2+k^2$. | $H_2$ | | | hors. | 1 r., 2 i. |
| $P^2+Q^2-R^2$...... | Cône réel. | | | sur. | Tous nuls. |
| $P^2+Q^2+R$....... | $P_E$ | Paraboloïde. | 2 plans sécants imag. | 1 centre à l'infini. | |
| $P^2-Q^2+R$....... | $P_H$ | | réels. | | |
| $P^2+Q^2+k^2$...... | $C_E$ imag. | | imag. | 1 ligne à distance finie : hors. | |
| $P^2+Q^2-k^2$...... | $C_E$ réel. | | » | hors. | |
| $P^2+Q^2$.......... | 2 plans sécants imag. | | » | sur. | |
| $P^2-Q^2+h$....... | $C_H$ | | réels. | hors. | |
| $P^2-Q^2$.......... | 2 plans sécants réels. | | » | sur. | |
| $P^2+Q$........... | $C_P$ | Cylindre parabolique. | Plan double. | 1 ligne à l'infini. | |
| $P^2+k^2$.......... | 2 plans parallèles imag. | | | 1 plan : hors. | |
| $P^2-k^2$.......... | 2 plans parallèles réels. | | | hors. | |
| $P^2$............... | 2 plans parallèles conf. | | | sur. | |

(¹) Hors de la surface ; sur la surface.

468. — Cas des coordonnées tangentielles. — On pourrait reprendre tout ce qui a été dit dans ce Chapitre, en se plaçant au point de vue tangentiel. En particulier, on peut appliquer à une équation tangentielle la méthode de décomposition en carrés, en prenant comme première variable directrice $r$ (ou $w$ en Géométrie plane) (*cf.* Exercice résolu n° 3).

Nous nous contenterons de faire les observations suivantes.

On *reconnaît les paraboloïdes* (ou la parabole) à ce qu'ils sont *tangents au plan de l'infini* (ou à la droite de l'infini), ce qui est caractérisé par l'absence du terme en $r^2$ (ou en $w^2$).

On a le *centre* en formant l'équation tangentielle du pôle du plan de l'infini, soit

$$\varphi'_r = 0. \tag{40}$$

En combinant cette équation avec la proposée, on a le *cône asymptote* (ou les asymptotes). En particulier, en éliminant $r$, on a l'équation tangentielle de la *conique de l'infini* (ou des points à l'infini), qui permet de reconnaître le *genre*.

Enfin, on peut avoir des renseignements précieux pour l'identification de la quadrique en étudiant la réalité des plans tangents parallèles à certaines directions, en particulier parallèles aux faces d'un trièdre de directions conjuguées.

# CHAPITRE XXXI.

## DIRECTIONS PRINCIPALES ; ÉQUATIONS RÉDUITES EN COORDONNÉES RECTANGULAIRES.

469. But du chapitre. — Dans le Chapitre précédent, nous sommes arrivés, par des changements de coordonnées, à mettre l'équation générale du second degré sous des formes réduites très simples. Mais les nouveaux axes étaient quelconques. Le but du présent Chapitre est de voir s'il est possible d'arriver aux mêmes équations *en coordonnées rectangulaires*. Un tel résultat serait particulièrement intéressant en Géométrie plane, car il nous démontrerait l'identité des coniques de la Géométrie analytique avec les coniques de la Géométrie élémentaire (n° 451). Nous supposerons que les axes de départ sont eux aussi rectangulaires.

Afin de séparer les difficultés, nous diviserons notre problème en deux :

1° *Chercher les directions des nouveaux axes ;*
2° *Chercher leur origine.*

Le premier problème s'énonce de la manière suivante :

*Faire un changement de coordonnées rectangulaires de manière que la nouvelle équation ne renferme pas de termes rectangles.*

Il n'intéresse que les termes du second degré $\varphi(x, y, z)$ ; de sorte que, s'il est résolu pour une quadrique, il l'est aussi pour toutes les quadriques de mêmes directions asymptotiques, c'est-à-dire pour toutes les quadriques homothétiques (n° 407).

En Géométrie plane, on peut employer une méthode élémentaire, qui consiste à faire tourner les axes d'un angle $\varphi$ et à déterminer ensuite cet angle pour que la transformée de la forme quadra-

tique $\varphi(x, y)$ n'ait pas de terme rectangle (*cf.* Chapitre VI, Exercice proposé n° 20). On peut aussi remarquer que les axes cherchés sont les *bissectrices du faisceau des directions asymptotiques* (n° 132). Mais ces méthodes ne s'étendent pas aisément à l'espace.

Nous en connaissons une autre, qui est générale. La question est, en effet, de *trouver une substitution orthogonale qui fasse disparaître les termes rectangles de la forme quadratique* $\varphi(x, y, z)$. Or, ce problème a été résolu au n° 310 du Tome I, par la méthode de l'équation en S. Nous pourrions donc nous en tenir là. Nous allons, néanmoins, reprendre la question, en l'interprétant géométriquement.

470. Directions principales. — Le nouveau trièdre de coordonnées doit être à la fois un trièdre trirectangle et un trièdre de directions conjuguées (n° 466). Il en résulte que *chaque direction d'axe doit être perpendiculaire à la direction de plan conjuguée.* Une telle direction de droite sera appelée *direction principale.*

Il est aisé d'en découvrir géométriquement l'existence, en coupant par le plan (ou la droite) de l'infini.

En Géométrie plane, la trace $p$ d'une direction principale sur la droite de l'infini doit avoir même conjugué harmonique par rapport aux points cycliques I et J et aux points à l'infini de la conique I′ et J′. C'est donc un *point double* de l'involution déterminée par ces deux couples de points (n° 141.) Comme il y a deux points doubles, il y a deux directions principales, qui sont les bissectrices des directions asymptotiques.

Si la conique est une parabole, les directions principales sont la direction asymptotique double et la direction perpendiculaire. Si elle est un cercle, les points I′, J′ se confondent avec les points I, J; l'involution n'est plus déterminée; toutes les directions sont principales, ce qui est, du reste, bien évident du point de vue élémentaire.

Dans l'espace, la trace $p$ d'une direction principale sur le plan de l'infini doit avoir même polaire par rapport au cercle de l'infini Γ et à la conique de l'infini Γ′ de la quadrique proposée. C'est donc un *pôle double* pour ces deux coniques (n° 484).

En général, il y a trois pôles doubles formant un triangle conjugué commun, donc trois directions principales formant un trièdre trirectangle et de directions conjuguées. Si la quadrique est un paraboloïde, Γ′ est dégénérée: son point double est un pôle double; l'intersection des plans directeurs du paraboloïde est une direction principale. Si Γ′ est bitangente à Γ en I et J [nous verrons que c'est la caractéristique des quadriques de révolution (n° 479)], le pôle $p$ et tous les points de IJ sont des pôles doubles; donc, la direction $p$ et toutes les directions perpendiculaires sont principales. Enfin, si la quadrique

est une sphère, Γ′ est confondue avec Γ, tous les points du plan de l'infini sont des pôles doubles, toutes les directions de l'espace sont principales, ce qui est, du reste, bien évident du point de vue élémentaire.

471. Recherche analytique des directions principales. — Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les paramètres directeurs d'une direction principale O$\lambda$. Le plan diamétral conjugué par rapport au cône

$$(1)\qquad \varphi(x, y, z) \equiv A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B y z + 2 B' z x + 2 B'' x y = 0$$

a pour équation (n° 463)

$$x \varphi'_\alpha + y \varphi'_\beta + z \varphi'_\gamma = 0.$$

Pour qu'il soit perpendiculaire à O$\lambda$, il faut et il suffit que l'on ait

$$(2)\qquad \frac{\varphi'_\alpha}{\alpha} = \frac{\varphi'_\beta}{\beta} = \frac{\varphi'_\gamma}{\gamma} = 2 S,$$

en prenant pour inconnue auxiliaire S la moitié de la valeur commune des trois rapports. Si S était connu, nous aurions, pour déterminer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, le système linéaire et homogène

$$(3)\qquad \frac{1}{2}\varphi'_\alpha - S\alpha = 0, \qquad \frac{1}{2}\varphi'_\beta - S\beta = 0, \qquad \frac{1}{2}\varphi'_\gamma - S\gamma = 0$$

ou

$$(4)\qquad \begin{cases} (A - S)\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0, \\ B''\alpha + (A' - S)\beta + B\gamma = 0, \\ B'\alpha + B\beta + (A'' - S)\gamma = 0. \end{cases}$$

Pour que ce système admette une solution autre que la solution nulle, il faut et il suffit que l'on ait

$$(5)\qquad \Delta(S) \equiv \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation du troisième degré porte le nom d'*équation en* S *de la quadrique*. Dès qu'on en connaît une racine, on obtient une ou plusieurs directions principales par le système (4).

En Géométrie plane, les calculs sont analogues. Il suffit de faire, dans ce qui précède, $A'' = B = B' = \gamma = 0$. Le système (4) se réduit à

$$(6)\qquad \begin{cases} (A - S)\alpha + B''\beta = 0, \\ B''\alpha + (A' - S)\beta = 0. \end{cases}$$

et l'équation en S à l'équation du second degré

$$(7) \qquad \delta(S) \equiv (A - S)(A' - S) - B''^2 = 0.$$

472. Discussion. — Il existe de nombreuses méthodes (1) permettant de démontrer que *l'équation en* S *a toujours toutes ses racines réelles* et d'étudier en même temps la distribution des directions principales. Nous indiquerons seulement celle qui nous paraît à la fois la plus simple et la plus instructive.

Nous commencerons par établir le théorème suivant (2) :

Théorème. — *Les racines de l'équation en* S *sont des invariants pour tout changement de coordonnées rectangulaires.*

Faisons seulement la démonstration pour l'espace. Elle s'applique au plan et même à un espace quelconque à $n$ dimensions.

$\Delta(S)$ n'est autre que le discriminant de la forme quadratique

$$(8) \qquad \psi(x, y, z) \equiv \varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2).$$

Si $x', y', z'$ désignent les nouvelles coordonnées, on sait que l'on a identiquement (n° 35)

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Si donc $\varphi_1(x', y', z')$ désigne la forme transformée de $\varphi(x, y, z)$ et $\psi_1(x', y', z')$ la transformée de $\psi(x, y, z)$, on a

$$(9) \qquad \psi_1(x', y', z') \equiv \varphi_1(x', y', z') - S(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Par conséquent, l'équation en S relative aux nouveaux axes s'obtient en annulant le discriminant $\Delta_1(S)$ de $\psi_1$. Or, on a identiquement (t. I, n° 309)

$$(10) \qquad \Delta_1(S) \equiv \Delta(S),$$

en se rappelant que le déterminant des neuf cosinus est égal à $\pm 1$.

Par conséquent, les racines de l'équation en S sont les mêmes pour les deux systèmes d'axes (3). C. Q. F. D.

---

(1) *Cf.* Niii, n^os 259 à 263.

(2) *Cf.* n° 494 et Tome I, Chapitre XXV, Exercice résolu n° 4.

(3) On peut aussi, sans faire appel au théorème du n° 309, remarquer simplement que toute racine S de la première équation rend $\psi$ décomposable en moins de trois carrés, donc aussi $\psi_1$, ce qui exige que S soit aussi racine de la deuxième équation. Inversement, toute racine de celle-ci satisfait à la première.

473. Cela posé, envisageons d'abord le *cas de la Géométrie plane*.

Si, dans $\delta(S)$, nous substituons $-\infty$, A, A', $+\infty$, nous obtenons les signes +, —, —, +. Donc, l'équation (7) a toujours ses deux racines réelles et situées de part et d'autre de l'intervalle (A, A'). Soit $S_1$ l'une d'elles. Il lui correspond au moins une direction principale. Prenons-la pour axe des $x$. Les équations (6) doivent alors être satisfaites pour $S = S_1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Ceci exige

$$A = S_1, \qquad B'' = 0. \tag{11}$$

La deuxième racine de (7) est alors $S_2 = A'$.

Voyons quelles directions principales correspondent à chaque racine. Nous avons deux cas à distinguer.

*Premier cas : L'équation en S a deux racines distinctes.* — Autrement dit, $A \neq A'$.

Pour $S = S_1 = A$, la première équation (6) est satisfaite identiquement; la seconde se réduit à

$$(A' - A)\beta = 0,$$

c'est-à-dire à $\beta = 0$, puisque $A' - A \neq 0$. A la racine $S_1$ correspond donc l'axe des $x$ pour direction principale unique. On verrait de même qu'à $S_2$ correspond seulement $Oy$.

*Deuxième cas : L'équation en S a une racine double.* — Autrement dit, $A = A'$.

Pour $S = A = A'$, les deux équations (6) sont vérifiées identiquement. Donc, toutes les directions du plan sont principales.

*Remarque.* — Avec les nouveaux axes, les termes du second degré sont

$$S_1 x^2 + S_2 y^2.$$

Ceci nous prouve que *la conique est un cercle dans le cas de la racine double et dans ce cas seulement*, et aussi qu'elle est du genre ellipse ou du genre hyperbole, suivant que les racines sont de même signe ou de signes contraires.

474. Passons maintenant à *l'espace*.

L'équation (5) est du troisième degré. Donc, elle a au moins une

racine réelle $S_3$, à laquelle correspond au moins une direction principale, que nous prenons pour axe des $z$.

Le système (4) doit alors être vérifié pour $S = S_3$, $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$. Ceci exige

$$B = B' = 0, \qquad A'' = S_3. \tag{12}$$

Dans ces conditions, les deux premières équations (4) se réduisent à (6) et la troisième à $(A'' - S)\gamma = 0$. Celle-ci étant vérifiée pour $\gamma = 0$, on voit que les directions principales de la conique de section par le plan des $xy$ sont aussi directions principales de la quadrique [1]. D'après le cas précédent, nous pouvons choisir deux de ces directions pour axes des $x$ et des $y$, ce qui nous donne, d'après (11), $B'' = 0$.

Le problème est maintenant très simplifié. Le déterminant $\Delta(S)$ se réduit à sa diagonale principale; les racines de l'équation en S sont donc A, A', A''. Quant au système (4), il se réduit à

$$(A - S)\alpha = 0, \qquad (A' - S)\beta = 0, \qquad (A'' - S)\gamma = 0. \tag{13}$$

La discussion est des plus faciles.

*Premier cas : Trois racines distinctes.* — Les trois coefficients A, A', A'' sont tous différents.

A la racine $S = A$ correspond la solution unique $\beta = \gamma = 0$, c'est-à-dire la direction principale $Ox$. De même, à $S = A'$ correspond $Oy$, et à $S = A''$ correspond $Oz$.

*Deuxième cas : Une racine double et une racine simple.* — On a, par exemple,

$$A = A' \neq A''.$$

A la racine double $S = A = A'$ correspond la solution indéterminée définie par la seule condition $\gamma = 0$, c'est-à-dire n'importe quelle direction du plan des $xy$.

A la racine simple $S = A''$ correspond, comme précédemment, l'unique direction principale $Oz$.

---

[1] C'est évident géométriquement, car le plan diamétral conjugué d'une telle direction $\delta$ contient la direction perpendiculaire de $xOy$ et aussi la direction $Oz$ (n° 464). Il est donc perpendiculaire à $\delta$.

*Troisième cas : Une racine triple.* — On a $A = A' = A''$.

Si l'on fait $S = A = A' = A''$ dans le système (13), il est satisfait, quels que soient $\alpha, \beta, \gamma$; autrement dit, toutes les directions de l'espace sont principales.

En résumé, nous avons le théorème suivant :

Théorème. — 1° *L'équation en S a toutes ses racines réelles.*

2° *A une racine simple correspond toujours une seule direction principale.*

3° *A une racine double correspondent une infinité de directions principales, parallèles à un même plan.*

4° *A une racine triple correspondent, comme directions principales, toutes les directions de l'espace.*

5° *Deux directions principales correspondant à deux racines différentes sont rectangulaires.*

6° *On peut toujours trouver au moins un trièdre trirectangle constitué par trois directions principales.* Si on le prend pour trièdre de coordonnées, les termes du second degré $\varphi(x, y, z)$ deviennent $S_1 x^2 + S_2 y^2 + S_3 z^2$.

D'après le théorème d'invariance du n° 472, toutes ces propriétés sont indépendantes du choix des axes. Revenons à des axes rectangulaires quelconques et appliquons au système (4) les propriétés 2°, 3° et 4°. D'après la théorie des équations linéaires et homogènes (t. I, n° 292), nous voyons que le déterminant principal est d'ordre 2, 1 ou 0, suivant que la racine S est simple, double ou triple. Donc :

Théorème. — 1° *Toute racine simple de l'équation en S annule $\Delta(S)$, mais n'annule pas tous ses mineurs du second ordre.*

2° *Toute racine double annule tous les mineurs du second ordre, mais n'annule pas tous ceux du premier ordre.*

3° *Toute racine triple annule tous les mineurs du premier ordre.*

475. Équations réduites. — Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le problème posé au n° 469. Nous savons, en effet, trouver un trièdre trirectangle de directions principales, ce qui résout la première partie du problème. Pour résoudre la seconde partie, il n'y a plus qu'à *appliquer la méthode de la décomposition en carrés*

exposée au Chapitre précédent. En effet, quand on a pris des directions principales pour axes de coordonnées, les termes rectangles ont disparu. Dès lors, en appliquant la méthode de Gauss comme il est expliqué au n° 449, on obtient des carrés dont chacun ne peut renfermer qu'une seule coordonnée. Par suite, les équations réduites auxquelles on aboutit se rapportent à des axes parallèles aux premiers, donc rectangulaires.

Ce raisonnement est impeccable tant qu'on obtient effectivement trois carrés dans la décomposition, c'est-à-dire quand l'équation en S n'a pas de racine nulle (*cf.* 6° du théorème du n° 474). Si une racine est nulle, par exemple $S_1$, on extrait un carré en $y$ et un carré en $z$; il restera une expression linéaire en $x$ [1]: nos conclusions s'appliquent encore.

Si deux racines sont nulles, par exemple $S_1$ et $S_3$, on extrait un carré en $y$ et il reste une expression linéaire en $x$, $z$ [2]. Le plan (Q) correspondant est perpendiculaire à $xOz$. On peut le prendre pour plan de coordonnées par une rotation des axes autour de $Oy$ suivie d'une translation. Nos conclusions subsistent.

476. Cas où il y a un centre. — Lorsque la quadrique (ou conique) admet un centre, on aboutit plus simplement à l'équation réduite par la méthode suivante :

1° *On transporte l'origine au centre.* Cela ne change pas les termes du second degré et nous savons calculer le nouveau terme constant (n° 462).

2° *On fait tourner les axes pour les rendre parallèles à des directions principales.* Cela ne change pas le terme constant et nous savons calculer tout de suite les nouveaux termes du second degré, quand nous connaissons les racines de l'équation en S.

Finalement, on peut écrire *a priori* l'équation réduite sous la forme

$$S_1 x^2 + S_2 y^2 + S_3 z^2 + \frac{1}{2} f'_{t_0} = 0, \tag{14}$$

*sans qu'il soit nécessaire d'utiliser aucune formule de change-*

(1) Si cette expression renferme effectivement $x$, la surface est un paraboloïde; si elle se réduit à une constante, la surface est un cylindre à centres.

(2) Si elle se réduit à une constante, la surface est un système de plans parallèles; sinon, c'est un cylindre parabolique.

*ment de coordonnées*, ni même de connaître les nouveaux axes. Dans la première méthode, au contraire, on est obligé de faire la transformation à cause des termes du premier degré.

477. Axes, plans principaux, sommets. — Les axes et plans de coordonnées qui, dans le Chapitre précédent, étaient des éléments de symétrie oblique, deviennent maintenant des éléments de symétrie droite.

Si l'on se reporte à la discussion faite aux nos 451 à 458, on voit que *l'ellipse et l'hyperbole* possèdent *deux axes*, qui sont les diamètres conjugués des directions principales. Leurs extrémités sont les *sommets*. Tous quatre sont réels dans l'ellipse, deux seulement le sont dans l'hyperbole.

*La parabole possède un seul axe*, qui est le diamètre conjugué de la direction principale perpendiculaire à la direction asymptotique double. L'autre axe, diamètre conjugué de cette direction asymptotique, est rejeté à l'infini. La parabole a aussi *un seul sommet*.

*L'ellipsoïde et les hyperboloïdes* possèdent trois plans de symétrie, qui sont les plans diamétraux conjugués des trois directions principales et sont appelés *plans principaux*. Ils possèdent aussi *trois axes* et *six sommets*. Les six sommets sont réels pour l'ellipsoïde, quatre sont réels pour l'hyperboloïde à une nappe et deux seulement pour l'hyperboloïde à deux nappes.

Toutefois, *lorsque l'équation en* S *a une racine double*, nous savons qu'il y a une infinité de directions principales; il y a donc aussi une infinité de plans principaux, d'axes et de sommets. Ceci s'explique aisément si l'on se reporte à l'équation (14), qui nous montre que *la quadrique est de révolution* autour de $Oz$ (n° 360), si l'on suppose, par exemple, $S_1 = S_2$. Les plans principaux sont alors les plans méridiens et les axes les diamètres perpendiculaires. L'axe de révolution et le plan du parallèle concentrique à la quadrique correspondent à la racine simple de l'équation en S.

Les *paraboloïdes* ont *deux plans principaux*, qui sont les plans diamétraux conjugués des directions principales perpendiculaires à l'intersection des plans directeurs. Le troisième est rejeté à l'infini. Il y a *un seul axe*, intersection des plans principaux et diamètre conjugué des plans perpendiculaires à l'intersection des plans directeurs. Il y a aussi *un seul sommet*.

*Lorsque les deux racines non nulles de l'équation en* S *sont égales, le paraboloïde est de révolution.* Il est évidemment elliptique. Il y a une infinité de plans principaux, qui sont les plans méridiens : mais il n'y a qu'un seul axe et un seul sommet.

Dans le *cas des cylindres*, les plans principaux, axes et lignes de sommets se déduisent immédiatement des axes et sommets d'une section droite.

478. ÉQUATION AUX CARRÉS DES DEMI-AXES. — Une quadrique (ou conique) à centre est déterminée en grandeur quand on connaît les longueurs de ses axes. Il peut donc être utile de savoir les calculer directement, sans être obligé de former l'équation réduite.

Une première méthode consiste à se reporter à l'équation (14) et à remarquer que les carrés des demi-axes sont donnés par la formule

$$(15) \qquad \rho = \frac{-\frac{1}{2}f'_{t_0}}{S},$$

S devant être remplacé successivement par les racines de l'équation en S. En éliminant S entre cette dernière et (15), on a une équation en $\rho$, qui est l'*équation aux carrés des demi-axes*.

Une autre méthode, dite *méthode de Gallois*, consiste à chercher les sphères (ou cercles) concentriques et bitangentes à la quadrique (ou à la conique) donnée. Les diamètres de contact de ces sphères (ou cercles) sont les axes demandés.

479. CONDITION POUR QU'UNE QUADRIQUE SOIT DE RÉVOLUTION. — D'après la discussion du n° 477, pour qu'une quadrique soit de révolution, il faut et il suffit *que son équation en* S *ait une racine double non nulle*.

D'après un théorème du n° 474, nous savons que si S est cette racine, le déterminant $\Delta(S)$ a tous ses mineurs nuls et réciproquement. Il en résulte que *la forme quadratique*

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2)$$

*doit se réduire à un carré parfait* (t. I, n° 305). Soit $P^2$ ce carré. L'équation du cône des directions asymptotiques peut s'écrire

$$(16) \qquad S(x^2 + y^2 + z^2) + P^2 = 0.$$

Elle représente bien un cône de révolution, dont *l'axe est per-*

*pendiculaire au plan* $P = 0$ (n° 360). L'axe de la quadrique est donc, lui aussi, perpendiculaire à ce plan, qui donne, par suite, la direction des plans des parallèles.

On peut interpréter l'équation (16), en disant que le cône des directions asymptotiques est bitangent au cône isotrope le long des deux génératrices du plan (P) et réciproquement (n° 507). Il est équivalent de dire que *la conique de l'infini de la quadrique proposée doit être bitangente au cercle de l'infini* (¹). La corde de contact est la trace des plans des parallèles et son pôle est la trace de l'axe de révolution (*cf.* n° 470).

480. Plans cycliques. — On appelle ainsi les plans qui *coupent la quadrique suivant des cercles.*

On peut se borner à chercher les plans cycliques du cône C des directions asymptotiques et seulement ceux de ces plans qui passent à l'origine, car tout cela ne change pas les points à l'infini de la section. Or, un tel plan P doit couper C suivant deux isotropes. Autrement dit, il doit contenir deux des quatre génératrices d'intersection du cône C et du cône isotrope Γ. Nous sommes donc ramenés à chercher les plans sécants communs à ces deux cônes (n° 509). Ils sont obtenus en écrivant que le cône

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \tag{17}$$

dégénère en deux plans, c'est-à-dire en annulant le discriminant du premier membre. Nous retombons sur l'équation en S. Donc, *les plans cycliques sont donnés par l'équation* (17), *où l'on doit remplacer successivement* S *par les trois racines de l'équation en* S. Chaque racine donne deux plans cycliques ; il y a donc en tout six plans cycliques. Mais, deux seulement sont réels. On le voit immédiatement sur l'équation réduite, au moyen de laquelle l'équation (17) s'écrit

$$(S_1 - S)x^2 + (S_2 - S)y^2 + (S_3 - S)z^2 = 0. \tag{18}$$

En remplaçant successivement S par $S_1$, $S_2$, $S_3$, on constate que l'on n'obtient deux plans réels que pour $S = S_2$, en supposant, pour fixer les idées, $S_1 > S_2 > S_3$. Comme les racines de l'équation en S sont des invariants (n° 472), ce résultat est indépendant des axes et

(¹) L'équation en S n'est autre que l'équation en λ de ces deux coniques (n° 483).

l'on peut affirmer que *les deux plans cycliques réels sont fournis par la racine moyenne de l'équation en* S. Ils se coupent, d'ailleurs, suivant la direction principale correspondant à cette racine, ainsi qu'on le voit sur l'équation (18).

Dans le cas de la racine double, les plans cycliques réels se confondent suivant les plans des parallèles.

481. Tout ceci peut s'interpréter dans le plan de l'infini, au moyen de la conique de l'infini $\Gamma'$ et du cercle de l'infini $\Gamma$.

Les traces des plans cycliques sont les sécantes communes à ces deux coniques. Elles se groupent deux à deux suivant les coniques dégénérées du faisceau ($\Gamma'$, $\Gamma$), lesquelles sont données par l'équation en $\lambda$ (n° 483), qui n'est autre ici que l'équation en S. Deux sécantes associées se coupent en un pôle double; donc deux plans cycliques associés se coupent suivant une direction principale.

Les quatre points de base du faisceau sont imaginaires; donc, un seul couple de sécantes communes est réel (n° 485, III), et, par suite, un seul couple de plans cycliques. Les trois pôles doubles sont réels, donc aussi les trois directions principales.

Lorsque les coniques sont bitangentes, les sécantes communes sont la corde de contact IJ et les tangentes en I et J. Les plans cycliques sont les plans des parallèles et les plans isotropes issus de l'axe de révolution de la quadrique.

482. Axes et plans principaux en coordonnées tangentielles. — Si une quadrique (ou conique) est définie par son équation tangentielle, on peut trouver ses plans principaux (ou axes) en partant d'un plan (ou droite) quelconque ($u$, $v$, $w$, $r$) et exprimant que *son pôle est à l'infini dans la direction perpendiculaire*. On reconnaît, le cas échéant, que *la quadrique est de révolution*, au fait qu'il y a une infinité de plans principaux passant par une même droite.

Une fois connue la direction d'un plan principal (ou axe), on a les *sommets* de l'axe perpendiculaire en cherchant les points de contact des plans tangents (ou tangentes) parallèles.

# CHAPITRE XXXII.

## INTERSECTION DES CONIQUES ET QUADRIQUES.

**483.** Intersection de deux coniques. — Soient deux coniques S et S′ définies par leurs équations ponctuelles

(1) $$S = 0, \qquad S' = 0.$$

Le théorème de Bézout (nº 46) nous apprend qu'*elles se coupent en quatre points*. Pour calculer leurs coordonnées, on pourrait former l'équation aux $x$ ou bien aux $\frac{y}{x}$. Voici une méthode plus élégante.

Considérons les coniques du faisceau (S, S′), c'est-à-dire les coniques Σ définies par l'équation

(2) $$S + \lambda S' = 0.$$

Quel que soit λ, chacune d'elles passe par l'intersection des coniques proposées (*cf.* nº 504). On peut, dès lors, songer à profiter du paramètre λ pour simplifier le problème, et, pour cela, il suffit, évidemment, de s'arranger pour que la conique Σ se décompose en deux droites. A cet effet, nous annulons le discriminant $\Delta(\lambda)$ de $S + \lambda S'$; nous obtenons ainsi une équation du troisième degré :

(3) $$\Delta(\lambda) = 0,$$

qui est appelée *l'équation en λ des deux coniques*.

Ayant une racine $\lambda_1$ de cette équation, nous décomposons la conique $\Sigma_1$ correspondante en deux droites $D_1$ et $D'_1$ et nous cherchons l'intersection de chacune d'elles avec S ou S′; toutes ces opérations se traduisent analytiquement par la résolution de trois équations du second degré [1].

[1] *Cf.* Tome I, Chapitre XVIII, Exercice résolu nº 1.

484. Sécantes communes; pôles doubles. — Chacune des droites $D_1$ et $D'_1$ est appelée une *sécante commune* des coniques proposées, parce qu'elle les coupe aux mêmes points. Leur ensemble est un *couple de sécantes communes*. Il correspond un tel couple à chaque racine de (3); il y a donc *trois couples de sécantes communes*.

Soit $P_1$ le point de rencontre de $D_1$ et $D'_1$. C'est un point double de la conique $\Sigma_1$. Ses coordonnées satisfont donc aux équations

$$(4) \qquad \frac{\partial S}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial S'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial S'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial S'}{\partial z} = 0.$$

Or, ces équations peuvent s'interpréter autrement. Elles expriment que les coefficients $\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}$ de la polaire de $P_1$ par rapport à S sont proportionnels aux coefficients $\frac{\partial S'}{\partial x}, \frac{\partial S'}{\partial y}, \frac{\partial S'}{\partial z}$ de la polaire de $P_1$ par rapport à S', et, par suite aussi, aux coefficients $\frac{\partial S}{\partial x} + \lambda \frac{\partial S'}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y} + \lambda \frac{\partial S'}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z} + \lambda \frac{\partial S'}{\partial z}$ de la polaire de $P_1$ par rapport à une conique $\Sigma$ quelconque du faisceau. Autrement dit, *le point $P_1$ a même polaire par rapport à toutes les coniques du faisceau. Réciproquement*, s'il a même polaire par rapport à deux coniques $\Sigma$ différentes, on en déduit la proportionnalité ci-dessus, et, par suite, des égalités analogues à (4); d'où il résulte que $P_1$ *est un point double d'une conique dégénérée du faisceau.*

Un tel point est appelé *pôle double* et sa polaire *polaire double*.

Aux trois coniques dégénérées $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ correspondent trois pôles doubles $P_1$, $P_2$, $P_3$. La polaire de $P_1$ par rapport à $\Sigma_2$ passe par $P_2$; la polaire du même point par rapport à $\Sigma_3$ passe par $P_3$; comme ces deux droites coïncident, on voit que la polaire de $P_1$ par rapport à toute conique du faisceau est $P_2P_3$. Autrement dit, le triangle $P_1P_2P_3$ est conjugué par rapport à toutes les coniques $\Sigma$; c'est *le triangle conjugué commun*. (*Cf.* t. I, Chap. XXV, Exercice résolu n° 5.)

Toutes ces propriétés sont évidentes géométriquement. Soient $a$, $b$, $c$, $d$ les quatre points de rencontre de S et de S'. Les trois couples de sécantes communes sont ($ab$, $cd$), ($ac$, $bd$) et ($ad$, $bc$). La polaire de $P_1$, intersection de $ab$ et de $cd$, par rapport à n'importe quelle conique passant par $a$, $b$, $c$, $d$, est la droite $P_2P_3$, en vertu de la construction du n° 440.

485. Discussion. — Tout ce qui précède s'applique au cas général où les quatre points *a*, *b*, *c*, *d* sont distincts. Si deux ou plusieurs de ces points sont confondus, il se produit des modifications qu'il est utile de faire ressortir.

Nous allons discuter tous les cas possibles de l'intersection, en nous occupant, en outre, des questions de réalité. Pour ce dernier point de vue, nous supposerons que les coniques S et S' sont *à coefficients réels*, de sorte que si un point imaginaire appartient à l'intersection, le point imaginaire conjugué lui appartient aussi (n° 55).

I. *Quatre points réels.* — Les six sécantes communes, les trois racines de l'équation en $\lambda$ et les trois pôles doubles sont réels et distincts.

II. *Deux points réels a, b et deux points imaginaires conjugués c, d.* — Les sécantes *ab*, *cd* sont réelles et distinctes; la racine $\lambda_1$ et le pôle double $P_1$ sont donc réels. Les sécantes *ac*, *bd* sont imaginaires non conjuguées, car la droite imaginaire conjuguée de *ac*, par exemple, est *ad*; la racine $\lambda_2$ et le pôle double $P_2$ sont donc imaginaires. On a une conclusion analogue pour le couple (*ad*, *bc*), la racine $\lambda_3$ et le pôle double $P_3$. Les deux couples $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ sont imaginaires conjugués, puisque *ad* est conjuguée de *ac* et *bc* de *bd*; donc $\lambda_3$ et $P_3$ sont imaginaires conjugués de $\lambda_2$ et $P_2$.

III. *Quatre points imaginaires.* — Ils sont deux à deux conjugués : par exemple, *b* est conjugué de *a* et *d* de *c*. Les sécantes *ab* et *cd* sont réelles (n° 74), donc aussi $\lambda_1$ et $P_1$. Les sécantes *ac* et *bd* sont imaginaires conjuguées, parce qu'elles joignent deux couples conjugués de points imaginaires; donc, $\lambda_2$ et $P_2$ sont réels. On a une conclusion analogue pour (*ad*, *bc*), $\lambda_3$ et $P_3$.

IV. *Deux points confondus a, b et deux points distincts c, d.* — La sécante *ab* doit couper chaque conique du faisceau en deux points confondus; c'est donc une tangente et l'on voit que *toutes les coniques* $\Sigma$ *sont tangentes* au point A, où viennent coïncider *a* et *b*. Les deux autres points *c*, *d* peuvent être réels ou imaginaires conjugués; dans les deux cas, la sécante *cd* est réelle. Elle coupe la tangente *ab* au pôle double réel $P_1$ et la racine $\lambda_1$ est réelle.

Les deux couples (*ac*, *bd*) et (*ad*, *bc*) sont confondus et composés

de droites réelles ou imaginaires conjuguées; $\lambda_2$ égale $\lambda_3$, $P_2$ et $P_3$ se confondent au point de contact A. Le triangle conjugué commun $P_1P_2P_3$ est infiniment aplati; le côté $P_2P_3$ est la polaire de $P_1$ par rapport à une conique quelconque du faisceau.

Ce cas peut être regardé comme cas limite des cas I ou II, lorsque $b$ tend vers $a$.

V. *Deux points confondus $a$, $b$ et deux points confondus $c$, $d$.* — *Les coniques sont bitangentes.* Leurs points de contact A et B peuvent être réels ou imaginaires conjugués ([1]). Les sécantes $ab$ et $cd$ sont les tangentes en ces points; elles sont réelles ou imaginaires conjuguées. Dans tous les cas, la racine $\lambda_1$ est réelle, ainsi que le pôle double $P_1$.

Les deux couples $(ac.\,bd)$ et $(ad.\,bc)$ se confondent avec la droite double, toujours réelle, qui joint les points de contact et qui est appelée, ordinairement, la *corde de contact*. La racine $\lambda_2=\lambda_3$ est double. Tous les points de la corde de contact sont des points doubles de $\Sigma_2$ (ou $\Sigma_3$); ce sont donc des pôles doubles. Il y a une *infinité de triangles conjugués communs* $P_1P_2P_3$, obtenus en prenant pour $P_2$, $P_3$ deux points quelconques de la corde de contact conjugués harmoniques par rapport aux points de contact.

Ce cas peut être regardé comme cas limite de l'un ou l'autre des trois premiers, lorsque $b$ tend vers $a$ et $d$ vers $c$.

VI. *Trois points confondus $a$, $b$, $c$, le quatrième distinct.* — Ils sont nécessairement tous réels. Les coniques $\Sigma$ sont dites *osculatrices* au point A, où viennent coïncider $a$, $b$, $c$. Les trois sécantes $ab$, $ac$, $bc$ se confondent avec la tangente en ce point et les trois sécantes $cd$, $bd$, $ad$ sont également confondues. Par suite, il en est de même des trois couples $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$. La racine $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ est triple. Les pôles doubles $P_1$, $P_2$, $P_3$ sont tous confondus avec le point d'osculation. Il n'y a plus, à proprement parler, de triangle conjugué.

Ce cas est un cas limite de IV, lorsque $c$ tend vers A.

VII. *Les quatre points confondus.* — Ils sont nécessairement

---

([1]) Le cas où les points de contact sont imaginaires ne diffère pas, comme apparence, du cas III. On le distingue par les pôles doubles.

confondus en un point réel, où les coniques $\Sigma$ sont dites *surosculatrices*. Toutes les sécantes communes sont confondues avec la tangente en ce point. La racine $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ est triple. Les coniques $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ se confondent en une droite double, qui est la tangente ci-dessus et dont tous les points sont, par suite, des pôles doubles.

Ce cas est la limite du précédent, quand $d$ tend vers A. Il a même apparence que le cas IV; il en diffère par ce fait, que tout point de la tangente est un pôle double, tandis que dans le cas IV, un seul point de la tangente jouit de cette propriété.

486. Nous avons maintenant terminé notre discussion. Si l'on examine ses conclusions relativement aux couples de sécantes communes, on voit qu'elles diffèrent toujours d'un cas à l'autre. Elles peuvent donc servir à caractériser les diverses configurations que peut présenter l'intersection. En particulier, elles donnent un moyen commode pour écrire ou reconnaître que deux coniques sont tangentes, bitangentes, osculatrices ou surosculatrices.

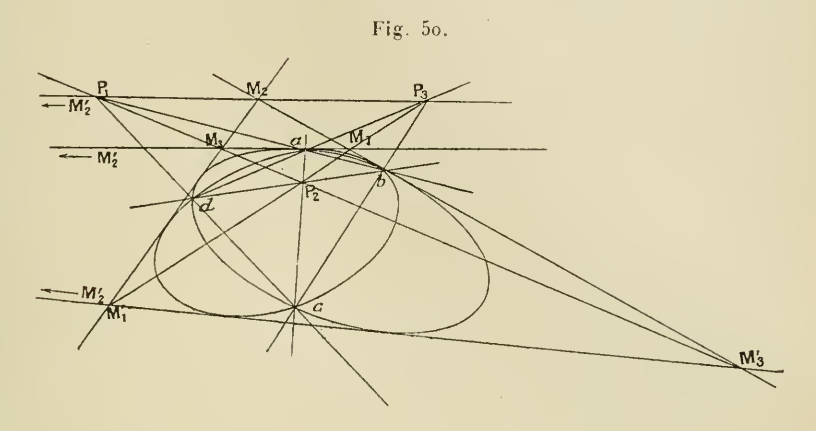
Dans tout ce qui précède, nous n'avons fait intervenir, nulle part, la droite de l'infini. Nos conclusions sont absolument générales; elles revêtent seulement certaines formes particulières, que nous laissons au lecteur le soin d'examiner en détail, quand on suppose que certains points ou droites sont à l'infini.

487. Problème corrélatif. — Le problème corrélatif est la recherche des *quatre tangentes communes à deux coniques*. Il peut être traité d'une manière entièrement analogue. Les équations (1) sont alors des équations tangentielles et l'équation (2) représente les coniques $\Sigma$ du faisceau tangentiel (S, S') (n° 308), c'est-à-dire les coniques tangentes aux quatre tangentes communes cherchées. L'équation en $\lambda$ détermine les trois coniques dégénérées du faisceau : $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$. La conique $\Sigma_1$, par exemple, se décompose en deux points $M_1$, $M'_1$, appelés *ombilics*. Les tangentes issues de chacun d'eux à toutes les coniques $\Sigma$ sont les mêmes; de sorte que, lorsque l'on connaît un couple d'ombilics, il suffit de mener, par ces deux points, les tangentes à une conique $\Sigma$ quelconque pour avoir les tangentes communes cherchées.

La droite $M_1 M'_1$ a même pôle par rapport à toutes les coniques $\Sigma$; c'est une *polaire double*. Il y a donc trois polaires doubles, dont les

pôles sont des pôles doubles. Ceux-ci ne sauraient différer de ceux qui ont été obtenus au moyen des sécantes communes (n° 484). Cela donne lieu, dans le cas où les quatre points d'intersection et les quatre tangentes communes sont réels, à la figure 50. On peut aussi

Fig. 50.




en conclure que, lorsque l'on connaît une racine de l'équation en λ ponctuelle, on en connaît une de l'équation en λ tangentielle et *vice versa* (¹); ou bien encore que, si l'on connaît les points communs à deux coniques, on peut trouver leurs tangentes communes par des résolutions d'équations du second degré et *vice versa*.

On pourrait reprendre, au point de vue tangentiel, toute la discussion du n° 485. Contentons-nous de faire les observations suivantes :

Lorsque *les coniques sont tangentes* en A, la tangente T au point de contact est une tangente commune comptant pour deux. Les deux autres tangentes communes sont distinctes (réelles ou imaginaires conjuguées); elles se coupent au point $M_1$ et rencontrent T en $M_2$, $M'_2$. Un couple d'ombilics est $(A, M_1)$; l'autre est $(M_2, M'_2)$, il est double.

Si *les coniques sont bitangentes*, les tangentes aux points de contact sont les seules tangentes communes. Un couple d'ombilics est constitué par les points de contact; l'autre, qui compte pour deux, est constitué par le pôle de la corde de contact considéré

(¹) On démontre que les λ tangentiels sont inverses des λ ponctuels (n° 495).

comme point double. Toutes les droites qui passent par ce pôle sont des polaires doubles.

Si *les coniques sont osculatrices*, la tangente T au point d'osculation compte pour trois tangentes communes et il y a une autre tangente commune T'. Les trois couples d'ombilics sont confondus et comprennent le point d'osculation et le point de rencontre de T et de T'.

Si *les coniques sont surosculatrices*, la seule tangente commune est la tangente au point de surosculation, lequel point constitue l'unique couple d'ombilics. Toutes les droites passant par ce point sont des polaires doubles.

488. Intersection de deux quadriques. — L'intersection de deux quadriques S et S' est une courbe du quatrième degré (n° 52). On l'appelle *biquadratique*, pour rappeler son origine (¹).

On peut reprendre, pour les quadriques, les théories des n$^{os}$ 483 et 484. Si les équations (1) sont les équations ponctuelles de nos deux quadriques, l'équation (2) représente le faisceau des quadriques Σ qui passent par leur intersection. En annulant le discriminant, on obtient une *équation* en λ du quatrième degré, qui donne les quadriques dégénérées du faisceau. Ces quadriques sont, ordinairement, des cônes, et l'on peut dire qu'en général *il y a quatre cônes du second degré qui s'appuient sur une biquadratique.*

Tout point double d'une quadrique Σ dégénérée a même plan polaire par rapport à toutes les quadriques du faisceau ; c'est un *pôle double*. Dans le cas général, les sommets des quatre cônes du faisceau sont quatre pôles doubles et constituent *le tétraèdre conjugué commun*. (*Cf.* t. I, Chap. XXV, Exercice résolu n° 5.)

489. Décomposition de l'intersection. — L'intersection de deux quadriques peut se décomposer en plusieurs lignes dont la somme des degrés est égale à quatre. L'évaluation de ces degrés nécessite quelques précautions, car il peut arriver *qu'une ligne γ doive être comptée plusieurs fois.*

(¹) Il y a des courbes du quatrième degré qui ne sont pas des biquadratiques (*cf.* Chap. XXXVI, Exercice proposé n° 28).

On le reconnaît de la manière suivante. Coupons par un plan Π quelconque. Nous obtenons les coniques C et C', sections de S et S' par ce plan. Ces coniques ont en commun les points de rencontre de $\gamma$ avec Π. Soit A l'un quelconque d'entre eux. Si les coniques C et C' ont en ce point un contact d'ordre $p-1$, c'est-à-dire si A compte pour $p$ points dans leur intersection, $\gamma$ doit être comptée $p$ fois dans l'intersection des deux surfaces. Si $q$ est son degré, elle apporte $pq$ unités dans le degré de l'intersection complète.

Cette proposition est vraie pour l'intersection de deux surfaces algébriques quelconques. Dans le cas qui nous occupe, le produit $pq$ ne peut dépasser 4. Donc, $p$ ne peut dépasser l'unité que si $q$ est égal à 1 ou à 2; autrement dit, si la courbe $\gamma$ doit être comptée plus d'une fois, elle ne peut être qu'une droite ou une conique. En outre, si elle est une conique, elle ne peut être comptée que deux fois. Une droite peut être comptée trois ou quatre fois; mais, on peut démontrer que les deux quadriques sont alors des cônes de même sommet et dont les bases sont osculatrices ou surosculatrices.

Nous écarterons, d'une manière générale, l'intersection de deux cônes de même sommet, qui se ramène, évidemment, à l'intersection de deux coniques. Dans ces conditions, *si la biquadratique se décompose, elle ne peut comprendre que des lignes simples et des lignes doubles, celles-ci étant des droites ou une conique, le long desquelles les deux surfaces sont tangentes.*

Théorème. — *Si deux quadriques ont une conique Γ commune, elles en ont une seconde Γ', qui constitue, avec la première, leur intersection complète.*

En effet, prenons le plan de Γ pour plan des $xy$ et soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation de la conique dans ce plan. Les termes indépendants de $z$ dans S et dans S' doivent se réduire à $f(x, y)$. Les équations des deux quadriques sont donc de la forme

$$f(x, y) + z\mathrm{P} = 0, \qquad f(x, y) + z\mathrm{P}' = 0,$$

P et P' désignant deux expressions linéaires quelconques. Si on les retranche membre à membre, on obtient une quadrique du faisceau

$$z(\mathrm{P} - \mathrm{P}') = 0,$$

composée du plan des $xy$ et d'un autre plan $\mathrm{P} - \mathrm{P}' = 0$. Cette quadrique contient toute l'intersection. Celle-ci se compose donc de la conique Γ et d'une autre conique Γ', section de S, par exemple, par le plan $(\mathrm{P} - \mathrm{P}')$. C. Q. F. D.

**490. Points doubles de l'intersection.** — *Si les deux quadriques sont tangentes* en un point A, nous savons (n° 343) que ce point est point double de l'intersection. Réciproquement, si A est un point double de la biquadratique, de tangentes AT et AT′, toutes les surfaces $\Sigma$ du faisceau sont tangentes en ce point au plan TAT′.

Dans le cas de la ligne double $\gamma$ envisagée au numéro précédent, tout point A de $\gamma$ est un point double de l'intersection complète; mais les tangentes AT et AT′ sont confondues avec la tangente à $\gamma$.

*Le cône qui a pour sommet un point double* A et pour directrice la biquadratique est du second degré (n° 379); *c'est un cône du faisceau.* Réciproquement, si un cône $\Sigma_1$ du faisceau a son sommet A sur l'intersection, ce sommet est un point double. En effet, on peut considérer la biquadratique comme définie par l'intersection de $\Sigma_1$ avec une autre quadrique $\Sigma$ du faisceau. Or, tout plan II passant par A coupe $\Sigma_1$ suivant deux génératrices AG et AG′ et $\Sigma$ suivant une conique C passant par A. Les deux droites rencontrent la conique au point A compté deux fois et en deux autres points M et M′. Donc, le plan II coupe la biquadratique suivant deux points confondus en A et suivant les deux points M et M′. Cela prouve bien que A est un point double.

Il est aisé d'avoir les tangentes en ce point. En effet, si M tend vers A sur l'une des branches, AG tend vers la tangente AT à cette branche. Celle-ci est, d'autre part, dans le plan tangent à $\Sigma$. Donc, *les tangentes en A sont les deux génératrices d'intersection du cône $\Sigma_1$ avec le plan tangent en A aux quadriques $\Sigma$* ([1]).

Nous savons que si une courbe gauche du quatrième degré a deux points doubles, elle se décompose nécessairement (n° 268, note de la page 275). Donc, *si deux quadriques sont bitangentes, leur intersection se décompose.* Les deux points de contact A et A′, étant des points doubles de l'intersection complète, sont des points communs aux deux lignes de décomposition, lesquelles sont deux coniques se rencontrant en A et A′ ou bien la droite AA′ et une cubique passant par A et A′.

**491. Discussion.** — Nous allons maintenant passer en revue les

---

([1]) Cette démonstration est évidemment valable pour l'intersection d'une surface quelconque $\Sigma$ avec un cône quelconque $\Sigma_1$ ayant son sommet sur $\Sigma$.

différents cas qui peuvent se présenter dans l'intersection. Mais, nous ne nous préoccuperons pas, comme au n° 485, des questions de réalité, car cela compliquerait par trop notre discussion.

I. *Biquadratique* $\Gamma$ *sans point double.* — C'est le cas général de l'intersection de deux quadriques non tangentes. On peut démontrer que les quatre cônes du faisceau sont distincts, les quatre pôles doubles formant un véritable tétraèdre conjugué commun.

*Tout plan tangent* $\Pi$ *à l'un de ces cônes* $\Sigma_1$ *est bitangent à* $\Gamma$. En effet, la génératrice G de contact rencontre une quelconque des quadriques $\Sigma$ en deux points M et M′ qui appartiennent, évidemment, à $\Gamma$. D'autre part, $\Gamma$ se trouvant sur $\Sigma_1$, sa tangente en M, par exemple, est forcément dans le plan tangent $\Pi$ et il en est de même pour la tangente en M′. Le plan $\Pi$ est donc bien bitangent.

Réciproquement, soit un plan $\Pi$ tangent en deux points M et M′ à $\Gamma$. Considérons la quadrique $\Sigma_1$ du faisceau qui passe par un point N quelconque (n° 505) de la droite MM′. Elle contient cette droite en entier, parce qu'elle en contient trois points : M, M′, N. D'autre part, elle a le même plan tangent en M et M′, à savoir le plan $\Pi$. C'est donc un cône et l'on peut affirmer qu'*il n'y a pas d'autres plans bitangents à* $\Gamma$ *que les plans tangents aux cônes du faisceau.*

II. *Biquadratique* $\Gamma$ *à point double* A. — C'est le cas de l'intersection de deux quadriques tangentes en un seul point A.

Il y a un cône $\Sigma_1$ du faisceau qui a pour sommet A ; on démontre qu'il compte pour deux. Les deux autres $\Sigma_3$ et $\Sigma_4$ sont tangents en A, comme toutes les quadriques $\Sigma$. Leurs sommets $P_3$ et $P_4$ sont des pôles doubles; ils sont conjugués par rapport à toute quadrique $\Sigma$ du faisceau, car le plan polaire double de $P_3$, par exemple, doit passer par $P_4$, comme on le voit en prenant, pour $\Sigma$, le cône $\Sigma_4$. En particulier, $P_3$ et $P_4$ sont conjugués par rapport à $\Sigma_1$. On en conclut que *les droites* $AP_3$ *et* $AP_4$ *sont conjuguées harmoniques* par rapport aux deux génératrices d'intersection de $\Sigma_1$ avec le plan tangent commun $P_3AP_4$, c'est-à-dire *par rapport aux deux tangentes en* A *à* $\Gamma$.

La courbe $\Gamma$ admet deux familles de plans bitangents, qui sont les plans tangents à $\Sigma_3$ et $\Sigma_4$.

III. *Une cubique* $\Gamma$ *et une droite* D. — On sait (n° 368) que les quadriques S et S′ se raccordent en deux points A et B de D. Ces

deux points sont des points doubles de l'intersection complète, donc, les *points de rencontre de* D *et de* Γ.

Le cône $\Sigma_1$ de sommet A et de directrice Γ est du second degré (n° 379); d'autre part, il contient AB, et, par conséquent, la biquadratique complète. C'est donc un cône du faisceau. On démontre qu'il compte pour deux. Il en est de même pour le cône $\Sigma_2$ de sommet B.

Le plan tangent de raccordement en A coupe $\Sigma_1$ suivant D et une autre génératrice AG, qui est la tangente à Γ, puisque c'est la seconde tangente au point double A (n° 490).

Il peut arriver que les deux points de raccordement A et B soient confondus. La cubique est alors tangente à D et admet le plan de raccordement Π pour plan osculateur [1]. Les quatre cônes du faisceau sont confondus avec le cône de sommet A et de directrice Γ, qui est tangent à Π le long de D [2].

IV. *Deux coniques* Γ *et* Γ'. — Soient Π et Π' leurs plans et Δ l'intersection de ces plans. Cette droite Δ rencontre une quadrique Σ en deux points A et B, qui peuvent être obtenus indifféremment par l'intersection de Δ avec Γ ou Γ', puisque ces deux coniques sont les sections de Σ par Π et Π'. Il s'ensuit que *nos deux coniques se rencontrent aux deux points* A *et* B [3].

Ces points sont des points doubles de la biquadratique et, par suite, des points de contact de toutes les quadriques du faisceau. Le plan tangent commun en A, par exemple, est le plan des tangentes AT et AT' à Γ et Γ'.

*Les plans* Π *et* Π' *constituent un cône dégénéré du faisceau*; la droite Δ est une ligne de pôles doubles.

Il y a deux autres cônes $\Sigma_3$ et $\Sigma_4$ dans le faisceau. Ce sont des cônes véritables. Ils sont tangents en A et B. Leurs sommets $P_3$ et $P_4$ sont des pôles doubles; ils forment un tétraèdre conjugué commun avec deux points $P_1$ et $P_2$ quelconques conjugués harmoniques par rapport à AB.

---

[1] *Cf.* Chapitre XXVI, Exercice proposé n° 12.

[2] Puisque la tangente AG à Γ se confond avec D.

[3] Cette démonstration nous prouve que deux coniques tracées sur une même quadrique se rencontrent nécessairement en deux points.

Voici maintenant quelques cas particuliers :

*a. Les coniques* Γ *et* Γ′ *sont tangentes.* — L'un des cônes $\Sigma_3$ et $\Sigma_4$ se confond avec le cône dégénéré (Π, Π′) et il n'y a plus qu'un seul cône véritable dans le faisceau.

*b. La conique* Γ′ *se décompose en deux droites distinctes* AC, BC. — Les quadriques sont bitangentes aux points A, B, C. Le seul cône véritable du faisceau a pour sommet C et pour base Γ.

*c. Les deux coniques se décomposent en droites distinctes.* — L'intersection est constituée par les quatre côtés d'un *quadrilatère gauche*. Les quadriques sont tangentes aux quatre sommets A, B, C, D de ce quadrilatère. Les cônes du faisceau sont les couples de plans (ACB, ACD) et (ABD, CBD), qui comptent chacun pour deux. Les diagonales AC, BD sont des lignes de pôles doubles. On obtient un tétraèdre conjugué commun en prenant deux points quelconques $P_1$, $P_2$ divisant harmoniquement AC et deux autres points quelconques $P_3$, $P_4$ divisant harmoniquement BD.

*d. Les coniques se décomposent et ont une droite commune* D. — L'intersection comprend cette droite D et deux autres droites D′ et D″ qui s'appuient sur elle. La droite D compte pour deux; c'est donc une *génératrice de raccordement* (n° 489). Le seul cône du faisceau est le couple de plans (D, D′), (D, D″) et les pôles doubles sont les points de D.

Ce cas est la limite du précédent, lorsque deux côtés opposés AB, CD du quadrilatère gauche tendent l'un vers l'autre, C tendant vers A et D vers B.

*e. La conique* Γ′ *est une droite double* D′. — Le plan Π′ coupe chaque quadrique Σ suivant la droite double D′. Donc, *toutes ces quadriques sont des cônes tangents* à Π′ le long de D′ et admettant pour base commune la conique Γ.

*f. Les deux coniques sont des droites doubles.* — Toutes les quadriques Σ sont des *cônes de même sommet et bitangents*.

*g. Les deux coniques sont confondues.* — Les quadriques sont *circonscrites* le long de cette conique double (n° 489). Les cônes du faisceau sont le plan Π considéré comme plan double et le cône circonscrit le long de Γ.

Les pôles doubles sont le sommet $P_1$ de celui-ci et les points de Π. Tout triangle $P_2P_3P_4$ conjugué par rapport à Γ forme avec $P_1$ un tétraèdre conjugué commun.

*h. Les deux coniques sont confondues et décomposées en deux droites.* — Ces deux droites sont *deux génératrices de raccordement*. Leur plan Π,

considéré comme plan double, est le seul cône du faisceau. Tous ses points sont des pôles doubles.

Ce cas est la limite du cas *d*, lorsque la droite D″ tend vers D′.

**492. Nous avons épuisé tous les cas possibles.**

Nous savons, en effet, que si l'intersection comporte une conique, elle en comporte une autre et rentre dans le cas IV. D'autre part, les cas I, II et III étant écartés, il est impossible que l'intersection ne comprenne pas une conique. Il faudrait, pour cela, qu'elle se décomposât en quatre droites ne se rencontrant pas deux à deux. Mais, cela est impossible, car, dès que deux quadriques ont en commun trois génératrices de même système, elles coïncident (¹) (n° 447).

Si l'on examine attentivement les résultats de la discussion, on découvre aisément des propriétés caractéristiques de chaque cas. Citons, par exemple, *le nombre et la distribution des points de contact*. En particulier, rappelons que *lorsque deux quadriques sont bitangentes, leur intersection se décompose toujours*: on se trouve dans le cas III ou dans le cas IV, suivant que les deux points de contact sont ou ne sont pas sur une même génératrice.

Voici un corollaire qui est souvent utilisé en Géométrie descriptive :

Théorème. — *Si deux quadriques S et S′ sont circonscrites à une même troisième S″, elles se coupent suivant deux coniques.*

Soient, en effet, C et C′ les coniques de contact. Comme elles sont sur une même quadrique S″, elles se rencontrent en deux points A et B. En ces points, les quadriques S et S′ sont tangentes, parce qu'elles sont tangentes à S″. Leur intersection se décompose donc en deux coniques passant par A et B (²).

Voici, au surplus, une démonstration analytique directe. Si (P) et (Q) sont les plans des coniques C et C′, les équations de S et S′ sont de la forme (n° 507)

$$S''+\lambda P^2=0, \qquad S''+\mu Q^2=0.$$

---

(¹) Pour que notre raisonnement fût complet, il faudrait examiner le cas de deux droites doubles ne se rencontrant pas. En coupant par le plan tangent commun en un point quelconque de l'une d'elles, on voit aisément que les quadriques coïncident encore.

(²) Si A et B appartenaient à une même génératrice, les coniques C et C′ se décomposeraient et auraient en commun la droite AB, qui serait, dès lors, une génératrice de raccordement pour S et S′. On se trouverait dans le cas IV, *d*: l'énoncé serait toujours valable.

En les retranchant membre à membre, on obtient un cône du faisceau décomposé en deux plans :

$$\sqrt{\lambda}\,P \pm \sqrt{\mu}\,Q = 0.$$

L'intersection se décompose donc en deux coniques, dont les plans sont les plans ci-dessus. Remarquons qu'*ils forment un faisceau harmonique avec les plans des coniques de contact.*

Comme caractéristiques de l'intersection, on peut aussi considérer *les cônes du faisceau.* C'est ainsi que, *pour que deux quadriques se coupent suivant deux coniques, il faut et il suffit que le faisceau qu'elles déterminent comprenne un couple de plans.* Ceci peut aussi être regardé comme la condition pour qu'elles soient bitangentes, si l'on excepte le cas de la génératrice commune.

De même, *pour que deux quadriques soient circonscrites, il faut et il suffit que leur faisceau comprenne un plan double.*

493. Problème corrélatif. — Le problème corrélatif est l'étude des plans tangents communs à deux quadriques définies tangentiellement. Ces plans tangents enveloppent *une développable $\Delta$ de quatrième classe*, qui est circonscrite à S et à S', ainsi qu'à toutes les quadriques $\Sigma$ du *faisceau tangentiel* défini par (2), si les équations (1) sont les équations tangentielles des quadriques proposées.

L'équation en $\lambda$ détermine *les quatre coniques* $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$, $\Sigma_4$ *du faisceau.*

Les plans de ces quatre coniques sont les *plans polaires doubles* et leurs pôles sont les pôles doubles considérés dans la théorie précédente.

Par chaque point de $\Sigma_1$, par exemple, on peut mener deux génératrices de $\Delta$ et réciproquement. Cette propriété est, en effet, corrélative de celle des plans bitangents à une biquadratique [1] (nº 491). Les coniques du faisceau sont donc *les lignes doubles de la développable.*

Si les quadriques S et S' sont *tangentes*, deux des coniques $\Sigma$ se confondent suivant une conique du plan tangent au point de contact.

Si elles sont *bitangentes*, la développable $\Delta$ se décompose généralement en *deux cônes de la seconde classe*, dont les sommets constituent une des coniques $\Sigma$. Ces deux cônes, étant circonscrits aux mêmes quadriques, se coupent suivant deux coniques (nº 492), qui sont les deux autres coniques du faisceau.

Si les quadriques S et S' sont *circonscrites*, les deux cônes se confondent avec le cône circonscrit le long de la conique de contact. Le sommet de ce

[1] Le plan tangent à un cône du faisceau ponctuel contient deux tangentes à la biquadratique.

cône, considéré comme point double, est une conique du faisceau. La conique de contact en est une autre.

494. Invariants simultanés de deux coniques ou quadriques. — La théorie de l'équation en $\lambda$ donne lieu à d'intéressantes propriétés d'invariance, dont nous allons dire quelques mots.

Théorème I. — *Les racines de l'équation en $\lambda$ sont des invariants pour tout changement de coordonnées.*

En effet, le discriminant $\Delta(\lambda)$ est simplement multiplié par le carré du module de la substitution (t. I, n° 309). Donc, ses racines ne changent pas. (*Cf.* t. I, Chap. XXV, Exercice résolu n° 5.)

Théorème II. — *Deux coniques (ou quadriques) étant données, les racines de leur équation en $\lambda$ sont déterminées à un facteur près.*

En effet, si la conique (ou quadrique) S est donnée, la forme quadratique S est déterminée à un facteur arbitraire près, quand le système de coordonnées est choisi. Il en est de même pour la forme quadratique S'. Or, l'introduction de ces deux facteurs arbitraires dans S et dans S' ne fait évidemment que multiplier $\lambda$ par leur rapport. Si l'on combine ceci avec le théorème I, on obtient le théorème II.

Corollaire. — *Toute fonction homogène et de degré zéro des racines de l'équation en $\lambda$ est entièrement déterminée par la connaissance des deux coniques* (*ou quadriques*). On dit que cette fonction est un *invariant simultané* des deux courbes (ou surfaces).

De même, *toute relation homogène* (et de degré quelconque) *est invariante.*

Du fait qu'elles sont indépendantes du choix des coordonnées, ces fonctions ou relations invariantes ont nécessairement une interprétation géométrique ne faisant intervenir que les deux coniques (ou quadriques) S et S'. Un choix judicieux des coordonnées facilite généralement la recherche de cette interprétation.

Inversement, si, avec un système particulier de coordonnées, on découvre qu'une certaine propriété géométrique s'exprime par une relation homogène entre les racines de l'équation en $\lambda$, cette relation est valable pour des coordonnées quelconques.

495. Tout ceci s'applique indifféremment en coordonnées ponctuelles ou tangentielles. Il existe d'ailleurs un lien très étroit entre les deux points de vue, ainsi qu'il ressort du théorème suivant :

Théorème III. — *Les $\lambda$ ponctuels sont inverses des $\lambda$ tangentiels.*

Supposons que S et S' soient des formes quadratiques en $x, y, z, t$ et dési-

gnons par $s$ et $s'$ les formes adjointes (t. I, n° 311). Appelons $\Delta(\lambda)$ le discriminant de $S+\lambda S'$ et $\delta(\lambda)$ le discriminant de $s+\lambda s'$.

Si $\lambda$ annule $\Delta(\lambda)$, les quatre équations

$$(5)\qquad \frac{\partial S}{\partial x}+\lambda\frac{\partial S'}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial S}{\partial y}+\lambda\frac{\partial S'}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial S}{\partial z}+\lambda\frac{\partial S'}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial S}{\partial t}+\lambda\frac{\partial S'}{\partial t}=0$$

ont une solution non nulle $(x, y, z, t)$. Soient $(u, v, w, r)$ et $(u', v', w', r')$ les variables adjointes de cette solution par rapport à S et à S'. On a

$$(6)\qquad u=\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x},\qquad u'=\frac{1}{2}\frac{\partial S'}{\partial x},\qquad x=\frac{1}{2}\frac{\partial s}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{\partial s'}{\partial u'};$$

puis, à cause de (5),

$$u+\lambda u'=0;$$

d'où

$$\frac{\partial s'}{\partial u}+\lambda\frac{\partial s'}{\partial u'}=0,$$

puisque la dérivée partielle $\frac{\partial s}{\partial u}$ est linéaire et homogène. En tenant compte de la dernière équation (6), cette égalité s'écrit

$$\frac{\partial s'}{\partial u}+\lambda\frac{\partial s}{\partial u}=0\qquad\text{ou}\qquad \frac{\partial s}{\partial u}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial s'}{\partial u}=0.$$

On a les égalités analogues pour $v$, $w$, $r$, et cela prouve que $\frac{1}{\lambda}$ annule $\delta(\lambda)$.

C. Q. F. D.

Si l'on n'astreint pas $s$ et $s'$ à être exactement les formes adjointes de S et S', mais seulement des formes proportionnelles, on peut seulement dire que *les $\lambda$ ponctuels sont proportionnels aux inverses des $\lambda$ tangentiels.*

496. Nous allons retrouver ce résultat en calculant explicitement les coefficients de $\Delta(\lambda)$ et de $\delta(\lambda)$, mais dans le cas des coniques seulement.

Soient

$$S = A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+2B_1yz+2B_2zx+2B_3xy,$$
$$s = a_1u^2+a_2v^2+a_3w^2+2b_1vw+2b_2wu+2b_3uv$$

et les notations analogues affectées d'accents pour S' et $s'$. Désignons, d'autre part, par $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\beta_3$ les mineurs du discriminant $\Delta$ de S. On a (t. I, n° 311)

$$(7)\qquad a_1=\frac{\alpha_1}{\Delta},\qquad a_2=\frac{\alpha_2}{\Delta},\qquad \ldots,\qquad b_3=\frac{\beta_3}{\Delta}.$$

Cela posé, développons $\Delta(\lambda)$ suivant les puissances de $\lambda$ :

$$(8)\qquad \Delta(\lambda)=\Delta+\theta\lambda+\theta'\lambda^2+\Delta'\lambda^3.$$

$\Delta$ et $\Delta'$ sont respectivement les discriminants de S et de S'. Quant à $\Theta$ et $\Theta'$, si on les ordonne respectivement par rapport aux $A'$, $B'$ et par rapport aux A, B, on trouve

$$(9)\qquad \begin{cases} \Theta = A'_1\alpha_1 + A'_2\alpha_2 + A'_3\alpha_3 + 2B'_1\beta_1 + 2B'_2\beta_2 + 2B'_3\beta_3, \\ \Theta' = A_1\alpha'_1 + A_2\alpha'_2 + A_3\alpha'_3 + 2B_1\beta'_1 + 2B_2\beta'_2 + 2B_3\beta'_3, \end{cases}$$

ou, en tenant compte de (7),

$$(10)\qquad \begin{cases} \Theta = \Delta(A'_1 a_1 + A'_2 a_2 + A'_3 a_3 + 2B'_1 b_1 + 2B'_2 b_2 + 2B'_3 b_3), \\ \Theta' = \Delta'(A_1 a'_1 + A_2 a'_2 + A_3 a'_3 + 2B_1 b'_1 + 2B_2 b'_2 + 2B_3 b'_3). \end{cases}$$

Si maintenant nous posons

$$(11)\qquad \delta(\lambda) = \delta + \theta\lambda + \theta'\lambda^2 + \delta'\lambda^3,$$

nous avons $\theta$ et $\theta'$ par des formules analogues aux formules (10). En les écrivant, on aperçoit immédiatement les identités

$$\frac{\Theta}{\Delta} = \frac{\theta'}{\delta'}, \qquad \frac{\Theta'}{\Delta'} = \frac{\theta}{\delta};$$

d'où l'on déduit, en se rappelant que $\delta = \frac{1}{\Delta}$ et $\delta' = \frac{1}{\Delta'}$,

$$(12)\qquad \delta(\lambda) = \frac{\lambda^3\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\Delta\Delta'}.$$

Cela nous redonne bien le théorème III.

**497.** Coniques harmoniquement inscrites ou circonscrites. — Parmi les relations homogènes que l'on peut établir entre les racines de l'équation en $\lambda$, deux des plus simples sont les suivantes :

$$(13)\qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \qquad \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = 0,$$

c'est-à-dire, avec les notations du numéro précédent,

$$(14)\qquad \Theta' = 0, \qquad \Theta = 0$$

ou

$$(15)\qquad \theta = 0, \qquad \theta' = 0.$$

Cherchons à les interpréter géométriquement. Prenons, par exemple,

$$(16)\qquad \Theta' = 0.$$

Utilisons la seconde formule (9) et essayons de la simplifier le plus possible, en choisissant convenablement le triangle de référence (n° 494). Nous pouvons d'abord annuler $\beta'_1$, $\beta'_2$, $\beta'_3$ (et en même temps $B'_1$, $B'_2$, $B'_3$) en prenant ce triangle conjugué par rapport à $S'$ (n$^{os}$ 439 et 445). Nous pouvons ensuite annuler $A_1$ et $A_2$, en prenant les sommets $P_1(1, 0, 0)$ et $P_2(0, 1, 0)$ sur $S$. Pour réaliser simultanément toutes ces conditions, nous prenons $P_1$ arbitrairement sur $S$, puis $P_2$ à l'intersection de $S$ avec la polaire de $P_1$ par rapport à $S'$, et enfin $P_3$ au pôle de $P_1P_2$ par rapport à $S'$. L'équation (16) se réduit alors à

$$A_3 A'_1 A'_2 = 0.$$

Si nous nous bornons à considérer le cas où $S'$ n'est pas dégénérée, le produit $A'_1 A'_2$ est différent de zéro et la condition (16) se réduit finalement à

$$A_3 = 0.$$

Son interprétation géométrique est évidente; elle signifie que $P_3$ est sur $S$, c'est-à-dire que le triangle de référence est inscrit dans cette conique. Ce résultat est d'ailleurs valable, quelle que soit la position de $P_1$ sur $S$. Enfin, en échangeant les rôles des deux coniques, on interprète de même $\Theta = 0$. Nous pouvons finalement énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *La condition* $\Theta' = 0$ *est la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse inscrire dans* $S$ *des triangles conjugués à* $S'$. *S'il existe un tel triangle, il en existe une infinité. La conique* $S$ *est alors dite harmoniquement circonscrite à* $S'$. *La condition* $\Theta = 0$ *est, de même, la condition pour que* $S'$ *soit harmoniquement circonscrite à* $S$.

En appliquant le principe de dualité et se rappelant l'équivalence des conditions (14) et (15), on a la proposition corrélative :

THÉORÈME II. — *La condition* $\theta' = 0$ *est la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse circonscrire à* $S$ *des triangles conjugués à* $S'$. *S'il existe un tel triangle, il en existe une infinité. La conique* $S$ *est dite harmoniquement inscrite dans* $S'$, *laquelle est harmoniquement circonscrite à* $S$, *au sens du théorème précédent. Enfin, la condition* $\theta = 0$ *est la condition pour que* $S'$ *soit harmoniquement inscrite dans* $S$.

Il resterait à examiner ce que signifient les conditions précédentes lorsque l'une ou l'autre des coniques $S$ et $S'$ dégénère. Nous laissons au lecteur le soin d'établir [1] que, lorsque $S$ est, par exemple, harmoniquement circonscrite

---

[1] Il suffit d'appliquer les formules (9) ou (10) ou les formules corrélatives, en prenant, dans chaque cas particulier, les éléments de dégénérescence comme côtés ou sommets du triangle de référence. On peut aussi voir ce que deviennent les triangles inscrits dans $S$ et conjugués à $S'$ ou circonscrits à $S'$ et conjugués à $S$.

à S′, les cas de dégénérescence s'interprètent de la manière suivante :

| | | |
|---|---|---|
| S dégénère en | 2 droites distinctes. | Ces deux droites sont conjuguées par rapport à S′ : |
| | 1 droite double..... | Cette droite est tangente à S′ ; |
| | 2 points distincts... | La droite qui les joint est tangente à S′ ; |
| | 1 point double..... | Aucune condition. |
| S′ dégénère en | 2 points distincts... | Ces deux points sont conjugués par rapport à S ; |
| | 1 point double..... | Ce point est sur S ; |
| | 2 droites distinctes. | Leur point de rencontre est sur S ; |
| | 1 droite double..... | Aucune condition. |

498. Triangles de Poncelet. — Un problème analogue à ceux qui viennent d'être traités est le suivant :

*Chercher la condition pour qu'il existe un triangle inscrit dans S et circonscrit à S′.*

Choisissons le triangle de référence de la manière suivante : $P_3$ est un point quelconque de S et $P_1$, $P_2$ sont les points de rencontre avec S des tangentes à S′ menées par $P_3$. Le triangle $P_1P_2P_3$ est inscrit dans S. Nous allons chercher la condition pour qu'il soit circonscrit à S′ et nous essaierons de mettre cette condition sous forme d'une relation homogène entre les racines de l'équation en $\lambda$.

D'après le choix du triangle de référence, nous avons

$$(17) \qquad A_1 = A_2 = A_3 = 0; \qquad a'_1 = a'_2 = 0.$$

D'autre part, la condition nécessaire et suffisante pour que $P_1P_2$ soit tangent à S′ est

$$(18) \qquad a'_3 = 0.$$

Nous avons maintenant, d'après (10) et (17),

$$(19) \qquad \Theta' = 2\Delta'(B_1 b'_1 + B_2 b'_2 + B_3 b'_3),$$

puis, d'après (9) et (17),

$$\Theta = -A'_1 B_1^2 - A'_2 B_2^2 - A'_3 B_3^2 + 2(B'_1 B_2 B_3 + B'_2 B_3 B_1 + B'_3 B_1 B_2),$$

ou, en exprimant les coefficients A′, B′ en fonction des coefficients tangentiels $a'$, $b'$,

$$(20) \qquad \Theta = \Delta'[B_1^2 b'^2_1 + B_2^2 b'^2_2 + B_3^2 b'^2_3 + 2B_2B_3 b'_2 b'_3 + 2B_3B_1 b'_3 b'_1 + 2B_1B_2(b'_1 b'_2 - a'_3 b'_3)]$$

En comparant (19) et (20), on aperçoit de suite l'identité

$$\frac{\Theta}{\Delta'} = \frac{\Theta'^2}{4\Delta'^2} - 2B_1 B_2 b'_3 a'_3. \tag{21}$$

Si l'on écarte les cas de dégénérescence, on en conclut que la condition (18) équivaut à la suivante :

$$\Theta'^2 - 4\Theta\Delta' = 0 \tag{22}$$

ou

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 4(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) = 0,$$

relation homogène, donc invariante.

Ce résultat subsiste, quelle que soit la position de $P_3$ sur S et quel que soit le système de coordonnées.

Nous avons finalement la proposition suivante :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des triangles inscrits dans S et circonscrits à S' est la condition* (22). *S'il existe un tel triangle, il en existe une infinité.*

Ces triangles portent le nom de *triangles de Poncelet*. Il existe un théorème analogue pour des polygones d'un nombre quelconque de côtés, inscrits dans S et circonscrits à S', et qui portent le nom de *polygones de Poncelet*. (*Cf.* Chap. XXXVII, Exercice proposé n° 18.)

# CHAPITRE XXXIII.

## DÉTERMINATION DES CONIQUES ET QUADRIQUES ; ÉQUATIONS GÉNÉRALES ; FAISCEAUX ET RÉSEAUX.

499. Détermination des coniques et quadriques. — Pour déterminer une conique dans son plan ou une quadrique dans l'espace, il suffit de connaître les coefficients de son équation ponctuelle ou tangentielle, ou plutôt les rapports de ces coefficients à l'un d'entre eux. Or, ces coefficients sont au nombre de six pour une conique, et de dix pour une quadrique. Donc, *une conique, dans son plan* [1], *dépend de cinq paramètres; une quadrique, dans l'espace, dépend de neuf paramètres.*

Pour déterminer une conique (ou une quadrique), il faut donc l'assujettir à cinq (ou neuf) conditions simples indépendantes, une condition étant dite *simple*, si elle s'exprime par une seule relation entre les coefficients.

Nous appellerons *condition ponctuelle* (ou *tangentielle*) une condition qui s'exprime par une relation *linéaire* entre les coefficients ponctuels (ou tangentiels). Une condition tangentielle est du second degré, en Géométrie plane, et du troisième degré, dans l'espace, par rapport aux coefficients ponctuels, et *vice versa*. Cela résulte, en effet, des propriétés des coefficients des formes adjointes (n° 441).

*Une conique (ou quadrique) est déterminée d'une manière unique par cinq (ou neuf) conditions ponctuelles, ou par cinq (ou neuf) conditions tangentielles indépendantes.* Car, on peut calculer les coefficients ponctuels ou les coefficients tangentiels en résolvant un système linéaire. En particulier, on a le théorème suivant :

Théorème. — *Par cinq points du plan (ou neuf points de*

---

[1] Une conique, dans l'espace, dépend de *huit paramètres;* les trois coordonnées de son plan s'ajoutent, en effet, aux cinq paramètres ci-dessus.

*l'espace*), *on peut faire passer une conique (ou une quadrique) et l'on n'en peut faire passer qu'une.*

Corrélativement, *il existe une seule conique (ou quadrique) tangente à cinq droites du plan (ou neuf plans de l'espace).*

Car, en exprimant, par exemple, qu'une quadrique passe par un point donné, on écrit une condition ponctuelle.

Il faut, toutefois, prendre garde que les conditions résultant de l'ensemble des points (ou plans) donnés soient indépendantes. Si elles ne le sont pas, il y a une infinité de solutions.

Pour reconnaître cette indépendance, on peut vérifier que le déterminant du système linéaire dont dépendent les coefficients n'est pas nul. Mais cela est compliqué, à cause de l'ordre élevé de ce déterminant. On peut reconnaître géométriquement l'indétermination à ce fait que les cinq (ou neuf) points donnés font partie de l'intersection de deux coniques (ou quadriques). En Géométrie plane, rien n'est plus simple. Nous savons, en effet, que si l'intersection de deux coniques comprend plus de quatre points, elle en comprend une infinité; les deux coniques se décomposent et ont une droite commune, en dehors de laquelle elles n'ont qu'un seul point d'intersection.

Si donc cinq points appartiennent à deux coniques différentes, quatre au moins sont en ligne droite, et, si l'on veut être certain de la généralité du théorème ci-dessus, il suffit d'ajouter, dans son énoncé, que *parmi les cinq points donnés, il n'y en a pas quatre en ligne droite* (ou que, parmi les cinq droites données, il n'y en a pas quatre qui concourent).

Dans l'espace, il s'agit de reconnaître *si les neuf points donnés sont sur une même biquadratique*. La question est beaucoup plus difficile; nous la laisserons de côté.

500. Passons en revue quelques autres conditions, qui se présentent couramment dans les applications.

Donner *deux points conjugués* est une condition ponctuelle (n° 432); donner *deux droites conjuguées*, en Géométrie plane, ou *deux plans conjugués* dans l'espace est une condition tangentielle (n° 443). Il en résulte qu'*un pôle et sa polaire* (ou *son plan polaire*) équivalent indifféremment à deux (ou trois) conditions ponctuelles ou à deux (ou trois) conditions tangentielles.

Ceci s'applique, en particulier, quand on donne *un point et la*

*tangente* (ou *le plan tangent*) en ce point [1], ou bien un *centre* [2], ou bien un *plan principal* [3] (*axe*, en Géométrie plane).

Donner *deux droites conjuguées par rapport à une quadrique* équivaut à quatre conditions ponctuelles ou tangentielles. Il suffit, en effet, d'exprimer que deux points de la première droite sont conjugués de deux points de la seconde ou que deux plans passant par la première sont conjugués de deux plans passant par la seconde. Ceci s'applique, en particulier, quand on donne un *axe*, qui doit être conjugué de la droite de l'infini des plans perpendiculaires.

Donner *une courbe de degré* $p$, par laquelle doit passer une quadrique, équivaut, en général, à $2p+1$ conditions ponctuelles, obtenues en écrivant que la courbe a $2p+1$ points sur la surface. Par exemple, une *droite*, une *conique*, une *cubique* valent respectivement 3, 5, 7 conditions. Une *quartique* équivaut généralement à 9 conditions et détermine la quadrique; toutefois, une biquadratique (n° 488) équivaut seulement à 8 conditions, puisqu'elle appartient à tout un faisceau.

501. Appelons *élément remarquable* tout élément qui est déterminé quand la conique (ou quadrique) l'est. Si cet élément, considéré comme libre dans le plan (ou l'espace), dépend de $p$ paramètres, sa donnée équivaut à $p$ conditions simples.

Par exemple, en Géométrie plane, un point ou une droite remarquables valent deux conditions; un cercle en vaut trois.

Dans l'espace, un point ou un plan remarquables valent trois conditions; une droite ou une sphère en valent quatre; une conique en vaut huit.

Citons, comme points remarquables, le *centre*, un *sommet* [4], un *ombilic* [4], un *foyer* [5] (pour une conique seulement); comme

---

(1) On peut dire aussi que cela revient à donner deux (ou trois) points ou deux (ou trois) tangentes (ou plans tangents) infiniment voisins.

(2) Pôle de la droite (ou du plan) de l'infini.

(3) Le point à l'infini dans la direction perpendiculaire doit être son pôle.

(4) Pour exprimer qu'un point M est sommet ou ombilic, on écrit qu'il est sur la quadrique, puis que le plan tangent en ce point est perpendiculaire au diamètre conjugué ou qu'il est cyclique.

(5) Un foyer équivaut à deux tangentes, à savoir les isotropes qui en sont issues (n° 514).

droites remarquables d'une conique, une *asymptote*, un *axe*, une *tangente au sommet*; comme plans remarquables d'une quadrique, un *plan principal*, un *plan tangent au sommet*; comme coniques remarquables, une *section principale*, une *focale*.

502. *Remarque.* — Lorsqu'on donne simultanément plusieurs conditions composées, il n'est pas toujours correct, dans le décompte des conditions simples équivalentes, d'additionner purement et simplement les conditions simples équivalentes à chaque condition composée envisagée séparément. Il peut arriver, en effet, qu'une des conditions données soit entraînée, en totalité ou en partie, par l'ensemble des autres.

Par exemple, un axe d'une quadrique et un sommet de cet axe ne valent pas $4+3=7$ conditions, mais seulement 5, car le sommet, étant déjà sur l'axe, il ne reste plus qu'à exprimer qu'il est sur la quadrique, ce qui fait seulement une condition et non trois, comme s'il s'agissait d'un sommet isolé.

De même, si l'on se donne *deux génératrices rectilignes* D et D', cela fait 6 conditions si les génératrices sont du même système, mais seulement 5 si elles sont de systèmes différents, car, dans ce cas, elles se rencontrent en un point M et, quand on a écrit que D est sur la surface, il suffit d'écrire que D' y a deux points, puisque M s'y trouve déjà, comme appartenant à D.

On verrait de même que *trois génératrices* donnent 9 conditions et déterminent la quadrique, si elles sont de même système (*cf.* n° 447, théorème VI); mais elles ne donnent que 7 conditions dans l'hypothèse contraire.

Le lecteur pourra vérifier aussi que chacun des systèmes de lignes qui constituent une biquadratique dans les cas III et IV du n° 491 équivaut à 8 conditions.

503. Familles de coniques ou de quadriques ; équations générales. — Supposons que l'on impose à une conique (ou quadrique) $5-p$ (ou $9-p$) conditions simples indépendantes. Il y a une infinité de coniques (ou quadriques) satisfaisant à ces conditions. Elles dépendent de $p$ paramètres arbitraires et constituent ce que l'on appelle *une famille à p paramètres*.

Pour trouver leur *équation générale*, on part d'une conique (ou

quadrique) quelconque et l'on écrit les conditions imposées. On tire ensuite de ces conditions tous les coefficients en fonction homogène de $p+1$ d'entre eux.

Par exemple, l'équation générale des *quadriques circonscrites au tétraèdre de référence* s'obtient en écrivant qu'elle est vérifiée quand on annule toutes les coordonnées, sauf une. On trouve ainsi que les coefficients des carrés doivent être nuls, ce qui donne, pour l'équation cherchée,

$$\lambda_1 xy + \lambda_2 yz + \lambda_3 zx + \lambda_4 xt + \lambda_5 yt + \lambda_6 zt = 0,$$

les $\lambda$ étant tous arbitraires.

En changeant $x, y, z, t$ en $u, v, w, r$, on a de même l'équation générale des *quadriques inscrites dans le tétraèdre de référence*.

En annulant $t$ ou $r$, on a les équations analogues en Géométrie plane.

Si le tétraèdre est défini par les équations $P=0$, $Q=0$, $R=0$, $S=0$ de ses faces ou de ses sommets, il suffit de remplacer, dans l'équation ci-dessus, $x, y, z, t$ par $P, Q, R, S$. Cela revient à faire un changement de coordonnées.

La méthode générale indiquée ci-dessus donne souvent lieu à des calculs compliqués, qu'il est quelquefois possible d'éviter par l'emploi de procédés plus élégants. Dans certains cas même, on peut écrire du premier coup l'équation demandée, comme nous allons en voir un exemple au numéro suivant.

594. Faisceaux ponctuels. — Soient les deux coniques (ou quadriques) S et S', définies par les équations ponctuelles

(1) $$S=0, \qquad S'=0.$$

Cherchons l'équation générale des *coniques* (*ou quadriques*) *passant par leur intersection* (*cf.* nos 76, 90, 171, 186).

Je dis que cette équation est

(2) $$S+\lambda S'=0,$$

$\lambda$ désignant un paramètre arbitraire.

En effet, d'abord nous avons déjà remarqué (n° 483) que toutes les coniques (ou quadriques) $\Sigma$ définies par cette équation passent bien par l'intersection de S et de S'.

Réciproquement, soit $\Sigma_0$ une conique (ou quadrique) quelconque contenant cette intersection. Prenons-y un point $M_0$ arbitraire en

dehors de cette dernière et déterminons $\lambda$ par la condition que $\Sigma$ passe par $M_0$. Nous avons l'équation du premier degré

$$S_0 + \lambda S'_0 = 0, \tag{3}$$

qui ne saurait être indéterminée, car, d'après l'hypothèse faite sur le choix de $M_0$, $S_0$ et $S'_0$ ne peuvent être tous deux nuls. Nous obtenons ainsi une valeur unique pour $\lambda$ (qui peut être infinie, si $S'_0 = 0$), et, par suite, une seule conique (ou quadrique) $\Sigma$ passant par $M_0$. Je dis que cette conique (ou quadrique) coïncide avec $\Sigma_0$.

En effet, s'il s'agit de coniques, il suffit de remarquer qu'elles ont cinq points communs : $M_0$ et les quatre points d'intersection $a$, $b$, $c$, $d$ de S et de S' et l'on est ramené au théorème du nº 499 [1]. S'il s'agit de quadriques, tout plan $\Pi$ passant par $M_0$ coupe $\Sigma$ et $\Sigma_0$ suivant deux coniques ayant cinq points communs : $M_0$ et les quatre points de rencontre de $\Pi$ avec la biquadratique $\Gamma$ suivant laquelle se coupent S et S'; donc, ces deux coniques coïncident et, par suite, aussi les quadriques, puisque ceci a lieu quel que soit $\Pi$.

Finalement, l'équation (2) ne représente que des coniques (ou quadriques) satisfaisant à la condition imposée et elle les représente toutes. C'est donc bien l'équation générale cherchée.

L'ensemble des coniques (ou quadriques) $\Sigma$ est appelé *faisceau ponctuel*. Les coniques (ou quadriques) S et S' sont les *coniques* (ou *quadriques*) *de base*. Elles peuvent évidemment être remplacées par deux coniques (ou quadriques) quelconques du faisceau.

Les points $a$, $b$, $c$, $d$ (ou la biquadratique $\Gamma$) sont appelés les *points de base* (ou la *biquadratique de base*).

505. Propriétés générales des faisceaux ponctuels. — D'après la démonstration du numéro précédent, nous pouvons déjà énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — *Par tout point extérieur à la base, passe une conique (ou quadrique) du faisceau et une seule.*

---

[1] Ce théorème s'applique, car, des quatre derniers points, trois ne sauraient être en ligne droite, si l'on écarte le cas où S et S' auraient une droite commune. Il est d'ailleurs facile de voir que, même dans ce cas, notre raisonnement est encore valable. Mais ce cas n'a pas grand intérêt.

On en déduit le théorème suivant :

Théorème II ou de Desargues. — *Les coniques (ou quadriques) d'un faisceau ponctuel déterminent une involution sur toute droite fixe du plan (ou de l'espace).*

Nous entendons par là que les points de rencontre M et M′ de la droite D avec une même conique (ou quadrique) Σ décrivent deux divisions homographiques en involution (n° 149). En effet, la relation entre M et M′ est évidemment algébrique. Elle est biunivoque, car, si l'on se donne M, par exemple, Σ est déterminée d'après le théorème I et, par suite, aussi M′, second point de rencontre de Σ avec D. Enfin, la correspondance est réciproque, car si M vient en M′, Σ ne change pas et M′ vient en M.

Les points M et M′ se confondent lorsque Σ est tangente à D et dans ce cas seulement. Donc

Théorème III. — *Il y a deux coniques (ou quadriques) du faisceau tangentes à la droite D; leurs points de contact sont les points doubles de l'involution de Desargues; ils sont conjugués par rapport à tout le faisceau.*

En particulier, tout faisceau ponctuel de coniques comprend *deux paraboles*, comme on le voit en prenant D à l'infini. Leurs directions asymptotiques sont des directions conjuguées par rapport à chaque conique du faisceau.

Théorème IV. — *Les quadriques Σ d'un faisceau ponctuel* Φ *découpent sur un plan quelconque* Π *un faisceau ponctuel* φ *de coniques* σ : *il y a trois quadriques* Σ *tangentes à* Π ; *leurs points de contact sont les pôles doubles du faisceau* φ ; *ils forment un triangle conjugué par rapport à toutes les quadriques* Σ.

Toutes ces propriétés sont à peu près évidentes. Les points de base du faisceau φ sont les points de rencontre de Π avec la biquadratique de base de Φ. La quadrique Σ est tangente à Π si sa section σ se décompose en deux droites et réciproquement. Or, il y a trois coniques dégénérées dans le faisceau φ (n° 484). Leurs points doubles, qui sont les points de contact des quadriques tangentes, sont les pôles doubles du faisceau de coniques ; ils forment un triangle conjugué

par rapport à toutes les coniques $\sigma$ (n° 484), donc par rapport à toutes les quadriques $\Sigma$ (n° 438).

Si l'on prend pour $\Pi$ le plan de l'infini, on voit que *tout faisceau ponctuel de quadriques comprend trois paraboloïdes, dont les directions d'axes forment un trièdre de directions conjuguées* (n° 466) *pour chaque quadrique du faisceau.*

Théorème V. — *Étant donnés deux points quelconques* P *et* P', *il y a, en général, une seule conique (ou quadrique) du faisceau les admettant comme points conjugués. S'il y en a plus d'une, les deux points sont conjugués par rapport à tout le faisceau.*

En effet, soient $p$ et $p'$ les formes polaires de S et de S' par rapport à ces deux points. La condition pour qu'ils soient conjugués par rapport à $\Sigma$ est

$$(1) \qquad p + \lambda p' = 0.$$

Elle est du premier degré en $\lambda$; elle admet donc une seule racine, sauf si $p = p' = 0$, auquel cas elle est vérifiée quel que soit $\lambda$.

*Remarque.* — Dans ce dernier cas P et P' sont les points doubles de l'involution de Desargues de la droite qui les joint.

Théorème VI. — *Dans tout faisceau ponctuel de coniques, il y a une hyperbole équilatère* (n° 529); *s'il y en a plus d'une, il y en a une infinité.*

Cela résulte du théorème V, si l'on prend P et P' aux points cycliques.

Théorème VII. — *Toute hyperbole équilatère $\Sigma$ circonscrite à un triangle* ABC *passe par son orthocentre* D.

En effet, considérons le faisceau $\Phi$ qui admet pour coniques de base deux quelconques de ces hyperboles. Il est tout entier composé d'hyperboles équilatères. Trois de ses points de base sont A, B, C; soit D' le quatrième. Les couples de droites (AB, CD'), (AC, BD'), (BC, AD') sont rectangulaires. Donc, D' est l'orthocentre D [1]. C. Q. F. D.

Théorème VIII. — *Les polaires (ou plans polaires) d'un point fixe* P *par rapport aux coniques (ou quadriques) d'un faisceau ponctuel passent par un point (ou droite) fixe.*

Cela résulte de ce que l'équation de cette polaire (ou plan polaire) est

---

(1) Nous démontrons, du même coup, que les trois hauteurs du triangle sont concourantes.

linéaire par rapport à $\lambda$ (*cf.* démonstration du théorème V; on peut aussi déduire la proposition actuelle du théorème V lui-même).

Dans le cas particulier où P est un *pôle double*, sa polaire (ou plan polaire) reste fixe quel que soit $\lambda$.

En Géométrie plane, à tout point P du plan correspond, par le théorème VIII, un point P', point de concours de toutes les polaires de P. Les deux points sont conjugués par rapport à toutes les coniques $\Sigma$; leur correspondance est donc symétrique. Nous dirons que ce sont *deux points associés* (*cf.* n° 415).

Théorème IX. — *Si le point* P *décrit une droite* $\Delta$, *son associé* P' *décrit une conique* $\Gamma$.

En effet, définissons P' par l'intersection des polaires de P par rapport à S et S'. Quand P décrit $\Delta$, ces polaires passent respectivement par deux points fixes, qui sont les pôles Q et Q' de $\Delta$ par rapport à S et S'. D'autre part, elles sont manifestement en correspondance homographique. Leur point de rencontre décrit donc une conique $\Gamma$, qui passe par Q et Q'.

Si l'on observe maintenant que S et S' sont deux coniques quelconques du faisceau, on en conclut :

Théorème X. — *La conique* $\Gamma$ *est aussi le lieu des pôles de* $\Delta$ *par rapport aux coniques* $\Sigma$.

Tout point d'une polaire double $\Delta_1$ est associé du pôle double $P_1$ de cette polaire. Donc, si P vient à l'intersection de $\Delta$ avec $\Delta_1$, P' vient en $P_1$. D'où il résulte que *la conique* $\Gamma$ *passe par les pôles doubles*. Elle est circonscrite au triangle conjugué commun.

Prenons maintenant P à l'intersection de $\Delta$ avec une sécante commune *ab*. Le point P' correspondant est conjugué harmonique de P par rapport à *ab*. On obtient, de la sorte, six points particuliers de la conique $\Gamma$, qui, ajoutés aux trois pôles doubles, nous donnent, en tout, neuf points.

Théorème XI. — *Le lieu des centres d'un faisceau ponctuel de coniques est une conique, appelée conique des neuf points.*

Il suffit de prendre la droite de l'infini pour droite $\Delta$.

Les neuf points sont alors les trois pôles doubles et les milieux des six segments obtenus en associant les points de base deux à deux.

Les directions asymptotiques de cette conique sont celles des deux paraboles du faisceau.

Dans le cas particulier du faisceau d'hyperboles équilatères, ces directions asymptotiques sont isotropes, puisque les points doubles de l'involution de Desargues sur la droite de l'infini sont les points cycliques. Donc, la conique est un cercle. C'est *le cercle des neuf points* du triangle formé par trois

quelconques des points de base. On obtient donc, en passant, une propriété de ce cercle, bien connu en Géométrie élémentaire :

THÉORÈME XII. — *Le cercle des neuf points d'un triangle est le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à ce triangle.*

506. Dans un faisceau donné, il n'existe pas de cercle, en général. Pour qu'il y en ait un, il faut et il suffit que les points cycliques soient deux points homologues de l'involution de Desargues de la droite de l'infini. Il équivaut de dire que les points doubles de cette involution doivent être à l'infini dans deux directions rectangulaires. Comme ces points doubles sont conjugués par rapport à toutes les coniques du faisceau, ce sont les points à l'infini de leurs directions principales (nº 470), lesquelles sont donc fixes.

Réciproquement, si deux coniques du faisceau ont mêmes directions principales, les points à l'infini de ces directions sont les points doubles de l'involution de Desargues, qui admet, par suite, les points cycliques comme points homologues. Donc,

THÉORÈME XIII. — *Pour qu'un faisceau ponctuel contienne un cercle, il faut et il suffit que les coniques de base aient leurs axes parallèles, auquel cas toutes les coniques du faisceau ont leurs axes parallèles.*

En particulier, les trois couples de sécantes communes doivent avoir des bissectrices parallèles et l'on peut dire encore que, *pour que quatre points $a$, $b$, $c$, $d$ pris sur une conique soient sur un même cercle, il faut et il suffit que les cordes $ab$ et $cd$, par exemple, soient également inclinées sur les axes de la conique.*

507. MANIÈRES D'ÉCRIRE L'ÉQUATION D'UN FAISCEAU PONCTUEL. — Au Chapitre précédent, nous avons étudié en détail les *coniques* (et *quadriques*) *dégénérées* qui appartiennent à un faisceau donné. Il est souvent commode, quand on veut écrire l'équation du faisceau, de prendre une ou deux d'entre elles pour coniques (ou quadriques) de base. Voici quelques équations générales formées de cette manière.

Coniques passant par quatre points donnés $a$, $b$, $c$, $d$ :

$$ab.cd + \lambda\, ac.bd = 0, \qquad (5)$$

en représentant conventionnellement par $ab$, par exemple, le premier membre de l'équation de la droite $ab$.

Coniques tangentes en $a$ à une droite T et passant par deux points $b$ et $c$ :

$$(6) \qquad T.bc + \lambda ab.ac = 0.$$

Coniques tangentes en $a$ à T et en $b$ à T' :

$$(7) \qquad TT' + \lambda \overline{ab}^2 = 0.$$

Coniques tangentes en $a$ à une conique S et passant par deux de ses points $b$ et $c$ :

$$(8) \qquad S + \lambda ab.ac = 0$$

ou

$$(9) \qquad S + \lambda T.bc = 0,$$

T représentant la tangente en $a$.

Si on laisse la droite $bc$ indéterminée, on a toutes les coniques tangentes en $a$ à S.

Coniques bitangentes à S en $a$ et $b$ :

$$(10) \qquad S + \lambda \overline{ab}^2 = 0$$

ou

$$(11) \qquad S + \lambda TT' = 0,$$

T et T' représentant les tangentes en $a$ et $b$.

Coniques osculatrices en $a$ à S :

$$(12) \qquad S + \lambda T.ab = 0,$$

T désignant la tangente en $a$ et $ab$ une sécante passant par $a$.

Coniques surosculatrices en $a$ à S :

$$(13) \qquad S + \lambda T^2 = 0.$$

Quadriques passant par deux coniques données de la quadrique S :

$$(14) \qquad S + \lambda PQ = 0,$$

P et Q représentant les plans des deux coniques.

Quadriques passant par un quadrilatère gauche ABCD :

(15) $$ACB.ACD + \lambda BDA.BDC = 0.$$

Quadriques circonscrites à S :

(16) $$S + \lambda P^2 = 0,$$

P représentant le plan de la conique de contact.

508. Faisceaux tangentiels. — Si les équations (1) sont des équations tangentielles, l'équation (2) définit un *faisceau tangentiel*, dont S et S′ sont encore appelées les coniques (ou quadriques) de base. Les coniques (ou quadriques) Σ de ce faisceau sont caractérisées par la condition d'être tangentes à toutes les tangentes communes (ou plans tangents communs) [1] à S et à S′.

Les propriétés des faisceaux tangentiels se déduisent par dualité de celles des faisceaux ponctuels. Nous laissons au lecteur le soin de les énoncer et de les démontrer, en reprenant corrélativement les nos 504 à 507.

Énonçons seulement la proposition corrélative du théorème VIII.

Théorème VIII *bis*. — *Le lieu des pôles d'une droite (ou plan) fixe par rapport aux coniques (ou quadriques) d'un faisceau tangentiel est une droite.*

En particulier, *le lieu des centres est une droite*. En Géométrie plane, cette droite passe par le milieu de chaque couple d'ombilics ; c'est la *droite de Newton* du quadrilatère complet formé par les quatre tangentes communes.

Comme en coordonnées ponctuelles, il est souvent commode d'utiliser les coniques (ou quadriques) dégénérées du faisceau pour former l'équation générale. On obtient ainsi les équations corrélatives des équations du n° 507.

509. Faisceaux de cônes. — Si l'on considère des cônes Σ ayant même sommet O et dont les bases dans un plan Π forment un faisceau ponctuel ou tangentiel de coniques, on obtient un *faisceau ponctuel ou tangentiel de cônes*. Ils peuvent être caractérisés par la condition de passer par quatre droites fixes issues du point O et appelées *droites de base* ou d'être tangents à quatre plans fixes passant par O et appelés *plans de base*.

L'équation générale d'un faisceau ponctuel de cônes est encore l'équa-

---

[1] Dans le cas des quadriques, on peut dire aussi que chaque quadrique Σ doit être inscrite dans la développable Δ circonscrite à S et à S′.

tion (2), si les équations (1) représentent les cônes de base. On a une conclusion analogue pour un faisceau tangentiel, à condition d'adjoindre aux équations (1) et (2) l'équation tangentielle du sommet O.

Les propriétés des faisceaux de cônes se déduisent évidemment de celles des faisceaux de coniques, en considérant les bases dans le plan II.

On peut aussi observer que, dans l'espace, les faisceaux ponctuels et tangentiels de cônes peuvent être regardés comme corrélatifs des faisceaux tangentiels et ponctuels de coniques.

510. Réseaux ponctuels et tangentiels de coniques. — Si l'on impose à une conique trois conditions ponctuelles distinctes, son équation générale est de la forme

$$\lambda S + \lambda' S' + \lambda'' S'' = 0. \tag{17}$$

Elle définit une famille à deux paramètres, qui porte le nom de *réseau ponctuel*. Les coniques S, S', S'' sont dites *coniques de base* (*cf.* n° 174).

*Le faisceau ponctuel déterminé par deux coniques quelconques du réseau appartient tout entier au réseau.* Car, en combinant linéairement deux expressions de la forme (17), on obtient encore une expression de même forme.

En particulier, on peut définir le réseau comme l'ensemble des faisceaux déterminés par S et une conique quelconque du faisceau (S', S'').

On définit de même le *réseau tangentiel*

$$\mu \Sigma + \mu' \Sigma' + \mu'' \Sigma'' = 0, \tag{18}$$

auxquelles les propriétés précédentes s'appliquent sans modification.

Comme exemples de réseaux, on peut citer les *coniques circonscrites ou inscrites ou conjuguées à un triangle;* mais ce sont des cas très particuliers.

511. Réseaux contravariants; hessienne, cayleyenne. — Soient trois coniques Σ, Σ', Σ'' n'appartenant pas à un même faisceau tangentiel. Considérons toutes les coniques S harmoniquement circonscrites à chacune d'elles. Leurs coefficients ponctuels sont liés par trois relations linéaires (n°s 497 et 496). Ces relations sont indépendantes, sans quoi Σ, Σ', Σ'' appartiendraient à un même faisceau tangentiel. Il s'ensuit que les coniques S constituent un réseau ponctuel (R). Chacune d'elles est harmoniquement circonscrite à toutes les coniques du réseau tangentiel (ρ), dont les coniques de base sont Σ, Σ', Σ''; cela résulte, en effet, de ce que la condition qui exprime cette propriété est linéaire par rapport aux coefficients tangentiels des coniques Σ.

Nous obtenons finalement deux réseaux (R) et (ρ), l'un ponctuel et l'autre tangentiel, qui sont tels que *toute conique du premier est harmoniquement circonscrite à toute conique du second.*

Ces deux réseaux sont dits *conjugués* ou *contravariants*.

512. Considérons *les coniques dégénérées de* (R); chacune est constituée par deux droites D et D′, se coupant en un point P. Cherchons *le lieu de ce point.* Ses coordonnées $x, y, z$ doivent satisfaire aux trois équations

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda\frac{\partial S}{\partial x}+\lambda'\frac{\partial S'}{\partial x}+\lambda''\frac{\partial S''}{\partial x}=0,\\ &\lambda\frac{\partial S}{\partial y}+\lambda'\frac{\partial S'}{\partial y}+\lambda''\frac{\partial S''}{\partial y}=0,\\ &\lambda\frac{\partial S}{\partial z}+\lambda'\frac{\partial S'}{\partial z}+\lambda''\frac{\partial S''}{\partial z}=0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on éliminait $x, y, z$, on obtiendrait la relation homogène et du troisième degré à laquelle doivent satisfaire $\lambda, \lambda', \lambda''$ pour que la conique (17) soit dégénérée ([1]).

Si l'on élimine, au contraire, $\lambda, \lambda', \lambda''$, on obtient le lieu du point P :

$$(20)\qquad \mathrm{H}\equiv\begin{vmatrix}\frac{\partial S}{\partial x} & \frac{\partial S'}{\partial x} & \frac{\partial S''}{\partial x}\\ \frac{\partial S}{\partial y} & \frac{\partial S'}{\partial y} & \frac{\partial S''}{\partial y}\\ \frac{\partial S}{\partial z} & \frac{\partial S'}{\partial z} & \frac{\partial S''}{\partial z}\end{vmatrix}=0.$$

Cette équation est du troisième degré en $x, y, z$; donc, *le lieu cherché est une cubique* (H), qui est appelée la *hessienne* ([2]) du réseau.

Un calcul très simple, qui aboutit à l'équation (20), montre que *la hessienne est aussi le lieu des points* P *dont les polaires par rapport à toutes les coniques du réseau sont concourantes.* Si P′ désigne le point de concours, il est aussi sur (H), car la relation entre P et P′ est réciproque. Nous dirons que ces deux points sont *deux points associés de la hessienne.* Ils sont conjugués par rapport à toute conique du réseau (R); d'après le Tableau de la page 514, *ils constituent donc une conique dégénérée du réseau contravariant* (ρ).

D'après le même Tableau, on peut dire encore que *la hessienne de* (R) *est le lieu des points* P *d'où l'on peut mener deux droites* D *et* D′ *conjuguées par rapport à toutes les coniques de* (ρ).

Corrélativement, si l'on considère les coniques du réseau (ρ) décomposées en deux points P et P′, la droite Δ qui les joint enveloppe une courbe (Γ) de

---

([1]) Cette relation prouve que *les coniques dégénérées d'un faisceau ponctuel forment une famille à un paramètre, telle que, par tout point du plan, passent trois coniques de la famille.*

([2]) Le déterminant H est le *hessien* des trois formes quadratiques S, S′, S″.

troisième classe, qui a pour équation tangentielle

$$(21)\qquad \Gamma = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Sigma}{\partial u} & \dfrac{\partial\Sigma'}{\partial u} & \dfrac{\partial\Sigma''}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\Sigma}{\partial v} & \dfrac{\partial\Sigma'}{\partial v} & \dfrac{\partial\Sigma''}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\Sigma}{\partial w} & \dfrac{\partial\Sigma'}{\partial w} & \dfrac{\partial\Sigma''}{\partial w} \end{vmatrix} = 0$$

et qui est appelée la *cayleyenne* du réseau tangentiel ($\rho$).

Cette courbe est aussi *l'enveloppe des droites* D *dont les pôles par rapport à toutes les coniques du réseau sont sur une même ligne droite* D'. Les droites D et D', qui constituent une conique dégénérée de (R), sont appelées *tangentes associées* de ($\Gamma$).

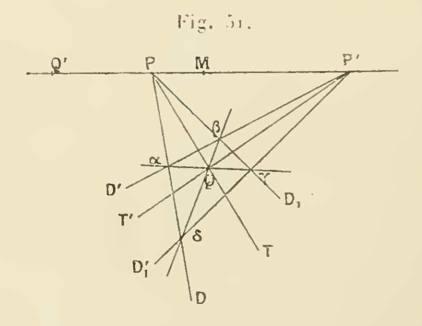
Enfin, la cayleyenne peut être considérée comme *l'enveloppe des droites sur lesquelles on peut trouver deux points conjugués par rapport à toutes les coniques de* (R).

513. Nous allons chercher la tangente au point P de la hessienne. A cet effet, considérons le point voisin Q, puis les points P', Q', associés à P, Q. Les deux points Q, Q' sont conjugués par rapport à toute conique du réseau (R), en particulier, par rapport au couple de droites D, $D_1$, qui admet P pour point double. Il s'ensuit que les droites PQ et PQ' sont conjuguées harmoniques par rapport à PD, $PD_1$. Si maintenant Q tend vers P, Q' tend vers P', PQ tend vers la tangente cherchée PT et PQ' tend vers PP'. Finalement, *la tangente* PT *est conjuguée harmonique de* PP' *par rapport à* PD, $PD_1$.

On a une règle analogue pour la tangente P'T' au point P'.

Si l'on considère le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ (*fig.* 51) formé par les quatre

Fig. 51.




droites D, $D_1$, D', $D'_1$ et le point de rencontre $\rho$ des diagonales $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, les tangentes PT et P'T' passent toutes deux par ce point (n° 133). D'autre part, le couple de droites $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ appartient au faisceau déterminé par (D, $D_1$) et

$(D', D'_1)$, donc au réseau (R). Il en résulte que Q appartient à la hessienne. Donc,

THÉORÈME. — *Les tangentes à la hessienne en deux points associés se coupent sur la hessienne.*

Le point Q′ associé de Q est conjugué de Q par rapport à $(D, D_1)$ ; il est donc sur PP′ ; c'est le troisième point de rencontre de cette droite avec la hessienne. Les droites Q′PP′ et Q′Q sont deux tangentes associées de la cayleyenne.

On a des propriétés corrélatives pour la cayleyenne. *La tangente* PP′ *admet pour point de contact le point* M *conjugué harmonique de* Q′ *par rapport à* PP′.

La droite joignant les points de contact de deux tangentes associées est aussi une tangente.

## CHAPITRE XXXIV.

### FOYERS.

514. Foyers d'une courbe plane. — *On appelle foyer d'une courbe plane* C *un point* F *d'où l'on peut mener deux tangentes isotropes* ou, ce qui revient au même, *le centre d'un cercle de rayon nul bitangent.* La droite D qui joint les deux points de contact est appelée *directrice correspondante au foyer* F.

Cette définition est connue sous le nom de *définition de Plücker.*

Il est aisé d'évaluer le nombre des foyers d'une courbe dont on connaît la classe.

Soit, en effet, $m$ la classe de C. Par chacun des points cycliques I et J, nous pouvons mener $m$ tangentes. Les tangentes issues de I rencontrent les tangentes issues de J en $m^2$ points, dont chacun est un foyer. Donc

Théorème. — *Une courbe algébrique de classe m possède $m^2$ foyers.*

Dans le cas particulier où *la courbe passe par les points cycliques*, les tangentes en ces points comptent chacune pour deux, de sorte que leur point de rencontre est un foyer qui compte pour quatre. La directrice correspondante est la droite de l'infini. Un tel foyer est appelé *foyer singulier*. Les autres foyers sont seulement *au nombre de* $m^2 - 4$.

Si la courbe est *tangente à la droite de l'infini*, cette droite fait partie des tangentes issues de I et des tangentes issues de J. Il lui correspond comme foyers le point de contact M et les points I et J, ceux-ci étant comptés $m - 1$ fois. Quant aux $m - 1$ autres tangentes issues de chaque point cyclique, elles donnent $(m-1)^2$ *foyers véritables.*

515. Foyers d'une conique. — La théorie des foyers est surtout intéressante pour les coniques.

*Si la conique C n'est pas une parabole, ni un cercle, il y a quatre foyers.*

Si les coefficients de son équation sont réels, les tangentes issues de I sont imaginaires conjuguées des tangentes issues de J; par exemple, IF est conjuguée de JF et IF′ de JF′. *Les foyers* F *et* F′ *sont donc réels et les deux autres* $\varphi$ *et* $\varphi'$ *sont imaginaires conjugués.*

Nous verrons (n° 534) que *les foyers réels coïncident avec les foyers qui servent de base à la définition élémentaire des coniques.*

*Dans le cas d'une parabole*, il n'y a plus qu'*un seul foyer*. Il est d'ailleurs *réel*, si la parabole l'est et coïncide, lui aussi, avec celui de la définition élémentaire.

Dans le cas du cercle, les quatre foyers sont au centre.

*La directrice correspondant à un foyer* F *est la polaire de ce point par rapport à la conique.* Cela résulte de la définition ci-dessus et du n° 435.

Pour rechercher analytiquement les foyers d'une conique, il suffit de *prendre un point quelconque* F$(x, y)$ *et d'écrire que les tangentes issues de ce point sont isotropes.* On obtient ainsi deux équations du second degré en $x$, $y$, qu'il suffit ensuite de résoudre.

Il y a bien des manières de faire ce calcul, qui dépendent surtout de la manière dont est donnée la conique. Le cas le plus simple est celui où *elle est donnée par son équation tangentielle*

$$f(u, v, w) = 0. \tag{1}$$

L'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues du point F$(x, y)$ est (n° 211)

$$f(m, -1, y - mx) = 0. \tag{2}$$

Il suffit d'écrire qu'elle se réduit à

$$m^2 + 1 = 0. \tag{3}$$

Si la conique n'est pas une parabole, on obtient deux équations du second degré en $x$, $y$. Si elle est une parabole, $w$ dans (1), donc $y - mx$ dans (2) ne figurent qu'au premier degré; on obtient donc

deux équations du premier degré en $x$, $y$, conformément à ce qui a été vu plus haut.

516. Coniques homofocales. — Les foyers de la conique C peuvent être considérés comme *les ombilics du faisceau tangentiel* H *admettant pour coniques de base* C *et les points cycliques* (¹). Nous savons qu'il existe trois couples d'ombilics. Le premier est I, J; le deuxième est F, F'; le troisième est $\varphi$, $\varphi'$.

Les diagonales IJ, FF' et $\varphi\varphi'$ forment un triangle conjugué par rapport à toutes les coniques du faisceau. Comme IJ est la droite de l'infini, FF' et $\varphi\varphi'$ sont deux diamètres conjugués. Ils sont, en outre, rectangulaires, parce que conjugués par rapport aux points cycliques. Ce sont donc les axes de C. Donc :

Théorème. — *Les foyers d'une conique sont sur ses axes, les foyers réels sur un axe, les foyers imaginaires sur l'autre.*

Le point O, étant le centre de toutes les coniques du faisceau, est, en particulier, le centre des couples de points F, F' et $\varphi$, $\varphi'$. Donc, *sur chaque axe, les foyers sont symétriques par rapport au centre.*

Les coniques du faisceau H, ayant toutes les mêmes foyers, sont appelées *coniques homofocales.*

Appliquons-leur les propriétés générales des faisceaux tangentiels (n° 508). D'abord, *il existe une seule conique* H *tangente à une droite donnée* D.

Appliquons maintenant le théorème corrélatif du théorème de Desargues. Les tangentes issues d'un point P décrivent deux faisceaux en involution. Les droites PI et PJ étant deux rayons homologues, les rayons doubles sont rectangulaires. Par suite, ce sont les bissectrices de tous les couples de rayons homologues. En particulier, ce sont les bissectrices des angles FPF' et $\varphi P \varphi'$. Nous savons, d'autre part, que ce sont les tangentes aux deux coniques du faisceau qui passent par P. Nous pouvons finalement énoncer le théorème suivant :

Théorème. — 1° *Les tangentes menées par un point fixe* P *à des coniques homofocales admettent des bissectrices fixes.*

2° *Par le point* P *passent deux de ces coniques; elles se coupent à angle droit, leurs tangentes étant les bissectrices ci-dessus.*

---

(¹) Ce faisceau a pour équation tangentielle

$$f(u, v, w) + \lambda(u^2 + v^2) = 0.$$

3° *La tangente et la normale en un point* P *d'une conique sont bissectrices des droites joignant ce point à deux foyers d'un même axe.*

4° *Les tangentes* PT *et* PT′ *menées à une conique par un point* P *quelconque sont également inclinées sur les droites* PF *et* PF′ (*Poncelet*).

Les propriétés 3° et 4° sont des propriétés bien connues en Géométrie élémentaire. Elles nous permettent d'affirmer, dès maintenant, que *la définition de Plücker conduit aux mêmes foyers que la définition élémentaire.* On peut, en effet, quelle que soit la définition adoptée, caractériser les foyers d'un axe A par la double condition d'être symétriques par rapport au centre et conjugués harmoniques par rapport aux deux points N et T où la normale et la tangente rencontrent A. Or, il n'y a qu'un seul couple de points F, F′ satisfaisant à ces conditions.

*Le lieu des pôles d'une droite* D *par rapport à des coniques homofocales est une droite* D′ (n° 508).

Les deux droites sont conjuguées par rapport à la conique (I, J); elles sont donc *rectangulaires*. De plus, *elles divisent harmoniquement les segments* FF′ *et* $\varphi\varphi'$. Le point de contact M de la conique tangente à D fait évidemment partie du lieu. On peut donc le construire très simplement de la manière suivante :

*On prend le point de rencontre* T *de* D *avec l'axe* FF′, *puis le point* N *conjugué harmonique de* T *par rapport à* FF′ *et l'on projette* N *sur* D.

Cela résulte d'ailleurs aussi de la propriété 3° du théorème énoncé plus haut.

517. Dans tout le numéro qui précède, nous avons implicitement supposé que *la conique* C *n'était pas une parabole.* Voyons maintenant ce qui se passe quand on fait cette hypothèse.

Il y a deux couples d'ombilics qui se confondent avec les points cycliques, le troisième étant constitué par le foyer F et le point de contact F′ de la parabole avec la droite de l'infini.

Toutes les coniques H du faisceau sont tangentes en F′ à IJ; ce sont donc *toutes des paraboles.*

La droite FF′ est polaire double. Or, son pôle par rapport à IJ est le point G, conjugué harmonique de F′ par rapport à IJ, c'est-à-dire le point à l'infini de la direction perpendiculaire à FF′. Donc, FF′ est diamètre conjugué de la direction qui lui est perpendiculaire; c'est donc l'axe commun à toutes les paraboles H et nous en concluons que *le foyer d'une parabole se trouve sur son axe.*

Les autres propriétés énoncées au numéro précédent subsistent sans modification, à condition de considérer toujours le point à l'infini F′ des paraboles comme le foyer associé au foyer véritable F. On retrouve ainsi, en particulier, les propriétés élémentaires de la tangente et de la normale, ce qui permet d'affirmer l'identité de la définition de Plücker et de la définition élémentaire.

518. Propriétés relatives à la directrice. — Soient un point F,

de coordonnées $(\alpha, \beta)$ et une droite D, d'équation

$$(4)\qquad ux + vy + w = 0.$$

*L'équation générale des coniques C admettant F pour foyer et D pour directrice correspondante* s'obtient immédiatement par application de l'équation (10) du n° 507,

$$(5)\qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \lambda(ux + vy + w)^2 = 0.$$

Prenons F pour origine et la perpendiculaire à D pour axe des $x$: notre équation se réduit à

$$(6)\qquad x^2 + y^2 = e^2(x-a)^2,$$

$e$ étant une constante positive, que nous substituons à $\lambda$, nous bornant ainsi à considérer des coniques réelles.

L'équation (6) a une interprétation très simple. Si M désigne le point courant $(x, y)$ et N sa projection sur D, elle s'écrit, en effet,

$$\overline{\mathrm{MF}}^2 = e^2.\overline{\mathrm{MN}}^2$$

ou

$$(7)\qquad \frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MN}} = e.$$

Donc,

Théorème. — *Le rapport des distances d'un point quelconque d'une conique à un foyer et à la directrice correspondante est constant.*

On retrouve encore une propriété élémentaire caractéristique des coniques, qui nous prouve, une fois de plus, l'identité de la définition de Plücker avec la définition élémentaire.

Le rapport constant $e$ porte le nom d'*excentricité* de la conique.

Les directions asymptotiques étant données par

$$x^2(1-e^2) + y^2 = 0,$$

on voit que *la conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'excentricité est* $< 1$, $> 1$ *ou* $= 1$, propriétés qui sont également bien connues en Géométrie élémentaire.

519. Reprenons l'équation (6), en introduisant *la coordonnée surabon-*

*dante* $z$ définie par

$$z = e(x - a). \tag{8}$$

Toute équation peut être rendue homogène en $x, y, z$, en remplaçant, autant de fois qu'il est nécessaire, 1 par $\frac{ex - z}{ea}$ ([1]). C'est ainsi que l'équation (6) devient

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{9}$$

On peut y satisfaire identiquement en posant

$$x = z \cos\varphi, \qquad y = z \sin\varphi: \tag{10}$$

$z$ et $\varphi$ sont alors les coordonnées polaires du point M.

Cherchons *l'équation homogène*

$$ux + vy + wz = 0 \tag{11}$$

*de la corde* $M_1M_2$. Les coefficients $u, v, w$ doivent satisfaire aux deux conditions

$$u\cos\varphi_1 + v\sin\varphi_1 + w = 0, \qquad u\cos\varphi_2 + v\sin\varphi_2 + w = 0.$$

En les éliminant entre ces trois équations homogènes, on obtient, après suppression du facteur $2\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$,

$$x\cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + y\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - z\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 0. \tag{12}$$

Cette droite rencontre D en un point P, qui satisfait à l'équation

$$x\cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + y\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 0,$$

laquelle représente donc la droite FP. Cette droite a, par suite, pour angle polaire $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \frac{\pi}{2}$.

Donc :

Théorème I. — *La droite* FP *est bissectrice de l'angle* $M_1FM_2$.

Ceci est d'ailleurs facile à démontrer géométriquement. On a, en

---

([1]) Ceci revient à prendre des coordonnées trilinéaires, le triangle de référence étant constitué par $Ox$, $Oy$ et D.

effet, en appelant $N_1$ et $N_2$ les projections de $M_1$ et de $M_2$ sur D,

$$\frac{PM_1}{PM_2} = \frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{FM_1}{FM_2}$$

et l'on est ramené au théorème de la bissectrice.

Si la corde $M_1M_2$ devient tangente, $M_1$ et $M_2$ se confondent et FP devient perpendiculaire à $FM_1$.

En menant, du point P, les deux tangentes PM et PM', on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Si d'un point* P *de la directrice, on mène les deux tangentes* PM *et* PM', *la corde de contact* MM' *passe par* F *et est perpendiculaire à* FP.

On peut aussi déduire la première propriété du théorème du n° 435 et de ce que F est le pôle de D. Quant à la seconde, elle résulte de ce que les droites FP et MM' sont conjuguées par rapport à la conique et, par suite, conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes issues de F, lesquelles sont isotropes.

Si, dans l'équation (12), nous faisons $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, nous obtenons l'*équation homogène de la tangente en* M

$$(13)\qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi - z = 0.$$

L'équation homogène de la tangente en M' est, de même,

$$x\cos\varphi' + y\sin\varphi' - z = 0.$$

Si nous la retranchons de la première, de manière à éliminer $z$, nous obtenons, après suppression du facteur $2\sin\frac{\varphi'-\varphi}{2}$,

$$x\sin\frac{\varphi'+\varphi}{2} - y\cos\frac{\varphi'+\varphi}{2} = 0.$$

C'est l'équation de la droite joignant F au point de rencontre Q des deux tangentes; comme elle a pour angle polaire $\frac{\varphi'+\varphi}{2}$, nous avons le théorème, bien connu en Géométrie élémentaire :

THÉORÈME III. — *La droite* FQ *est bissectrice de l'angle* MFM'.

Reprenons l'équation (12) et cherchons l'enveloppe de la corde $M_1M_2$, quand l'angle $M_2FM_1$ demeure constant et égal à 2V. On a alors $\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = V$. Si l'on

pose $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi$, l'équation (12) s'écrit

(14) $$x \cos\varphi + y \sin\varphi = z \cos V.$$

Son enveloppe, quand $\varphi$ varie, a pour équation homogène (n° 272)

(15) $$x^2 + y^2 = z^2 \cos^2 V.$$

Si l'on remplace $z$ par (8), on obtient le théorème suivant :

Théorème IV. — *L'enveloppe des cordes vues de* F *sous l'angle constant* 2V *est une conique admettant* F *pour foyer*, D *pour directrice et* $e \cos V$ *pour excentricité.*

520. Équation focale en coordonnées polaires. — Transformons l'équation (6) en coordonnées polaires :

$$\rho^2 = e^2(\rho \cos\omega - a)^2;$$

d'où

$$\pm \rho = e(\rho \cos\omega - a).$$

Le changement de $\omega$ en $\omega + \pi$ et de $\rho$ en $-\rho$ nous montre que les deux courbes obtenues en prenant successivement le signe + et le signe − au premier membre coïncident (n° 40). Prenons, par exemple, le signe −. Nous avons alors l'équation

(16) $$\rho = \frac{p}{1 + e \cos\omega},$$

en posant $p = ea$ (¹).

Telle est *l'équation polaire d'une conique, quand on prend un foyer pour pôle et l'axe focal pour axe polaire.*

La directrice D a pour équation polaire

(17) $$\rho \cos\omega = a.$$

On peut l'obtenir en supprimant le terme constant 1 au dénominateur de (16).

Plus généralement, *si l'on prend pour axe polaire une demi-droite quelconque issue du foyer*, l'équation de la conique est de la forme

(18) $$\frac{1}{\rho} = \alpha \cos\omega + \beta \sin\omega + \gamma$$

(¹) Cette quantité $p$ est appelée *paramètre*. On peut la définir géométriquement comme étant la demi-corde menée par F perpendiculairement à l'axe focal.

et l'*on obtient l'équation de la directrice, en supprimant simplement le terme constant* $\gamma$ *du second membre.*

On le voit en changeant $\omega$ en $\omega_0 + \omega$ dans (16) et (17) ou bien en partant de l'équation cartésienne (5).

521. Foyers d'une surface. — *On appelle foyer d'une surface* S *tout point* F *qui est le centre d'une sphère de rayon nul bitangente à la surface.*

Tandis que, pour une courbe, il n'y a qu'un nombre limité de foyers (n° 514), pour une surface, il y en a une infinité (¹), constituant une ou plusieurs courbes appelées *focales.*

Considérons *la développable* $\Delta$ *circonscrite à* S *et au cercle imaginaire de l'infini* $\Gamma$. Si F est un foyer, le cône de sommet F et de base $\Gamma$ est tangent à S en $M_1$ et $M_2$. Le plan tangent à ce cône le long de $FM_1$, par exemple, est tangent à S en $M_1$ et à $\Gamma$ en $N_1$. C'est donc un plan tangent commun à S et à $\Gamma$ et, par suite, un plan tangent à $\Delta$. Sa génératrice de contact avec $\Delta$ passe par $M_1$ et $N_1$; c'est donc $FM_1$. De même, $FM_2$ est aussi une génératrice de $\Delta$. Nous voyons donc que *le foyer* F *est un point par où passent deux génératrices de* $\Delta$.

*Réciproquement*, si F est un tel point, le cône isotrope de sommet F est tangent à S aux deux points $M_1$, $M_2$ où les génératrices de $\Delta$ issues de F touchent la surface S; le point F est donc un foyer.

Finalement, nous voyons que *les foyers de la surface* S *sont les points doubles de la développable* $\Delta$; *les focales de* S *sont les lignes doubles de* $\Delta$.

522. Focales d'une quadrique. — Supposons maintenant que la surface S soit une quadrique. D'après ce qui a été vu au n° 493, *les focales ne sont autres que les coniques du faisceau tangentiel déterminé par la quadrique et le cercle imaginaire de l'infini*, déduction faite, bien entendu, de ce cercle lui-même.

Toutes les quadriques H de ce faisceau ont les mêmes focales; ce sont des *quadriques homofocales.*

Dans le cas général, il y a quatre coniques dans le faisceau, donc *trois focales* $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$.

Les plans de ces quatre coniques forment un tétraèdre conjugué par rapport à tout le faisceau. Comme l'un d'eux est le plan de l'infini, il revient au même de dire que les plans $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$ des trois focales forment un système de plans diamétraux conjugués. D'autre part, si l'on applique cette propriété en prenant $\Gamma$ comme quadrique du faisceau, on en conclut que les trois plans forment aussi un trièdre trirectangle. Ce sont donc les plans principaux communs à toutes

---

(¹) Le point F n'est, en effet, assujetti qu'à deux conditions, obtenues théoriquement en écrivant que la sphère de rayon nul est tangente deux fois.

les quadriques du faisceau. Nous avons finalement la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Les focales d'une quadrique quelconque sont trois coniques situées respectivement dans les trois plans principaux et admettant chacune pour axes les axes de la quadrique qui sont situés dans son plan.*

523. Considérons un point quelconque F de $\Phi_1$. Soient G et G' les deux génératrices de $\Delta$ issues de ce point et P et P' les plans tangents à $\Delta$ le long de ces génératrices. Ces plans sont tangents à toutes les quadriques du faisceau, donc, en particulier, à $\Phi_1$. Ils se coupent donc suivant la tangente FT à cette courbe. D'autre part, ils sont tangents, le long de G et de G', au cône isotrope de sommet F. Ils se coupent donc suivant le diamètre conjugué du plan GFG' par rapport à ce cône. Il en résulte que le plan GFG' est perpendiculaire à FT, c'est-à-dire normal à $\Phi_1$. Enfin, toute quadrique H du faisceau, étant inscrite dans $\Delta$, est tangente à P et à P' en des points situés respectivement sur G et G'. Il s'ensuit que le plan GFG' coupe H suivant une conique tangente aux isotropes G et G', c'est-à-dire admettant pour foyer F. Donc :

THÉORÈME II. — *Le plan normal en* F *à la focale* $\Phi_1$ *est un foyer pour toutes les sections des quadriques* H *par ce plan.*

Si l'on coupe en particulier par le plan $\Pi_2$ normal à $\Phi_1$ en ses deux sommets $A_1$ et $B_1$, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Les sections des quadriques* H *par un plan principal* Π *sont des coniques homofocales. Leurs foyers communs sont les sommets situés dans* Π, *des deux focales normales à ce plan.*

Comme quadrique H, on peut prendre, en particulier, la focale située dans Π et l'on voit ainsi que *chaque focale a pour foyers les sommets des deux autres focales qui sont situés dans son plan.*

On peut aisément, d'après cela, trouver la nature des trois focales. Chacune a deux foyers réels; à elle trois, elles ont donc six sommets réels. Il s'ensuit nécessairement que l'une d'elles au moins, soit $\Phi_1$, est une hyperbole.

Pour faciliter le langage, appelons $Ox$ son axe transverse, $Oy$ son axe imaginaire et $Oz$ la perpendiculaire à son plan. La focale $\Phi_2$ du plan $zOx$ admet pour foyers réels $A_1$ et $B_1$, sommets de $\Phi_1$ : ses foyers imaginaires sont donc sur $Oz$. La focale $\Phi_3$ du plan $yOz$ a, dès lors, ses quatre sommets imaginaires; c'est une ellipse imaginaire. Ses foyers imaginaires étant sur $Oy$, ses foyers réels sont sur $Oz$. Donc, $\Phi_2$ est une ellipse réelle. Finalement, nous voyons que les trois focales sont : *une hyperbole, une ellipse réelle et une ellipse imaginaire.*

524. CONES DE RÉVOLUTION CIRCONSCRITS A UNE QUADRIQUE. — Considérons le cône circonscrit à la quadrique S à partir du foyer F. Il est tangent à cette

surface, en particulier, aux points $M_1$ et $M_2$; il est donc tangent, le long de $SM_1$ et de $SM_2$, au cône isotrope de sommet F; par suite, il est bitangent au cercle imaginaire de l'infini, donc de révolution (n° 479). Nous avons vu, d'ailleurs, au n° 523, que les plans tangents le long de $SM_1$ et de $SM_2$ se coupaient suivant la tangente FT à la focale. Cette tangente est donc l'axe du cône (n° 479). Réciproquement, si le cône circonscrit de sommet F est de révolution, il est bitangent au cône isotrope, lequel est, par suite, bitangent à S. Donc, F est un foyer.

Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème. — *Les foyers d'une quadrique sont aussi les sommets des cônes de révolution circonscrits. L'axe d'un tel cône est tangent à la focale.*

Ceci nous donne une autre définition des foyers, ne faisant pas intervenir les éléments imaginaires.

Si l'on applique le théorème précédent à l'une ou l'autre des focales réelles, on retrouve une proposition classique, qu'on démontre élémentairement au moyen du théorème de Dandelin (*cf.* Chap. XXXI, Exercice résolu n° 4) :

*Le lieu des sommets des cônes de révolution ayant pour base une ellipse* E *est une hyperbole* H, *qui admet pour foyers les sommets du grand axe et pour sommets les foyers de* E *et dont le plan est perpendiculaire à celui de* E. *Le lieu des sommets des cônes de révolution admettant* H *pour base est l'ellipse* E. *L'axe du cône de base* E *et de sommet* F, *situé sur* H, *est la tangente en* F *à* H.

525. Propriétés diverses. — Appliquons au faisceau H les propriétés générales des faisceaux tangentiels de quadriques.

D'abord, *il y a une seule quadrique homofocale à une quadrique donnée qui soit tangente à un plan donné.*

Appliquons maintenant le théorème corrélatif du théorème de Desargues. Les plans tangents menés par une droite D forment une involution comprenant les plans isotropes, donc ayant ses plans doubles rectangulaires et, par suite, bissecteurs de tous les couples de plans homologues. D'où :

Théorème. — *Les plans tangents menés par une droite* D *à des quadriques homofocales ont des plans bissecteurs fixes, qui sont les plans tangents aux deux quadriques du faisceau tangentes à* D.

Ceci est une généralisation des propriétés 1° et 2° du théorème du n° 516.

Appliquons maintenant le théorème corrélatif du théorème IV du n° 505. Les cônes circonscrits aux quadriques H à partir d'un point P forment un faisceau tangentiel de cônes, comprenant le cône isotrope. Leurs plans polaires doubles sont donc deux à deux rectangulaires et sont, par suite, les plans principaux de tous les cônes. D'où :

Théorème. — *Les cônes circonscrits à des quadriques homofocales à partir d'un point* P *ont tous mêmes axes. Il y a trois quadriques du*

*faisceau qui passent par* P; *leurs normales respectives sont ces axes. Ces trois quadriques se coupent donc deux à deux à angle droit.*

Ce théorème peut être, lui aussi, considéré comme une généralisation des propriétés 1° et 2° du théorème du n° 516.

Le théorème VIII *bis* du n° 508 nous donne enfin le suivant :

Théorème. — *Le lieu des pôles d'un plan* Π *par rapport à des quadriques homofocales est une droite* D *perpendiculaire à ce plan. Elle perce* Π *au point de contact avec la quadrique tangente. Elle perce chaque plan principal en un point qui est le pôle de l'intersection de ce plan avec* Π *par rapport à la focale située dans ce plan.*

526. Cas des paraboloïdes. — Dans les trois numéros qui précèdent, nous avons envisagé le cas général d'une quadrique S qui ne présente aucune position particulière vis-à-vis du cercle de l'infini Γ. Examinons maintenant les cas où la développable commune Δ possède des singularités.

Nous considérerons d'abord le cas où le plan de Γ est tangent à S (¹), c'est-à-dire le cas où S est un paraboloïde.

*Il n'y a plus que deux focales*, dont les plans passent par le point de contact M de S avec le plan de l'infini. De plus, ces plans sont des plans polaires doubles pour tout le faisceau. Si l'on prend, en particulier, leurs pôles par rapport à Γ, on voit que le pôle de chacun d'eux est le point à l'infini dans la direction perpendiculaire. Donc, *les plans des focales sont les plans principaux du paraboloïde.*

Toutes les quadriques H sont tangentes en M au plan de l'infini. Elles forment un faisceau de *paraboloïdes homofocaux.*

En particulier, *les focales sont des paraboles admettant même axe que ces paraboloïdes.*

Le théorème II du n° 523 continue à s'appliquer sans modification. Quant au théorème III, il subsiste aussi, sauf que les sections considérées sont des paraboles et n'ont qu'un foyer. En particulier, *chaque focale a pour sommet et foyer le foyer et le sommet de l'autre.*

Les propriétés des nos 524 et 525 ne subissent aucun changement.

527. Cas des quadriques de révolution. — Nous avons maintenant à considérer le cas où Γ est tangent à S (²). Si nous nous bornons à considérer des quadriques réelles, ceci ne peut arriver que si Γ est bitangent (³), autrement dit si S est une quadrique de révolution.

(¹) C'est le cas corrélatif du cas II du n° 491.

(²) Ceci correspond, par dualité, à l'intersection d'une quadrique avec un cône tangent.

(³) Car si un point de Γ est point de contact, le point imaginaire conjugué en est un autre.

Il y aurait aussi à considérer le cas où S contient Γ, c'est-à-dire est une sphère. Tous les points de l'espace sont des foyers; mais ce cas n'a pas d'intérêt.

La développable $\Delta$ se décompose alors en deux cônes du second degré. Comme ces cônes sont circonscrits à $\Gamma$, ils sont isotropes. Il sont, d'autre part, circonscrits à S et, *a fortiori*, bitangents. Leurs sommets F et F′ sont donc des foyers, mais des *foyers singuliers*.

Tous les plans passant par FF′ sont des plans polaires doubles pour le faisceau; en répétant un raisonnement déjà fait, on voit que ce sont des plans principaux. Donc, *la droite* FF′ *est l'axe de révolution de* S.

Toutes les sections des quadriques H du faisceau par un plan $\Pi$ contenant F, par exemple, sont tangentes aux deux isotropes suivant lesquelles ce plan coupe le cône isotrope de sommet F, puisque ce cône est circonscrit. Elles admettent donc F pour foyer.

Si le plan $\Pi$ passe aussi par F′, on voit que *les foyers singuliers* F *et* F′ *ne sont autres que les foyers de la méridienne de* S. Ce résultat était facile à prévoir et ne présente pas grand intérêt en lui-même. Toutefois, si on le rapproche de la propriété précédente, on a le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnée une quadrique de révolution, toute section faite par un plan passant par un des foyers de la méridienne situés sur l'axe de révolution admet ce foyer pour foyer.*

Les cônes isotropes de sommets F et F′ se coupent suivant un cercle $\Phi$, qui est, on le voit aisément, le lieu des foyers $\varphi$ et $\varphi'$ de la méridienne autres que F et F′. Chaque point $\varphi$ de ce cercle est le sommet d'un cône isotrope tangent le long de $\varphi$F et de $\varphi$F′ aux deux cônes isotropes (F) et (F′) et, par suite, bitangent à S. C'est donc un foyer de S et *le cercle* $\Phi$ *est l'unique focale de cette surface* (¹). On peut dire, en définitive, que *les seuls foyers d'une quadrique de révolution sont ceux de ses méridiennes.*

Nous n'insisterons pas davantage sur ce cas particulier, qui ne nous donnerait aucune propriété nouvelle intéressante.

---

(¹) On le voit aussi en remarquant que le faisceau admet une conique autre que $\Gamma$ et la conique dégénérée (F, F′).

# CHAPITRE XXXV.

## ÉTUDE DES CONIQUES SUR LEURS ÉQUATIONS RÉDUITES.

528. Dans les Chapitres précédents, nous avons établi un certain nombre de propriétés des courbes du second degré, en partant de leur équation générale. On pourrait poursuivre cette étude et découvrir, de la même manière, une foule de propriétés nouvelles.

Mais, il est beaucoup plus simple d'utiliser dorénavant les résultats obtenus au Chapitre XXXI et d'étudier les coniques sur leurs équations réduites.

Nous avons deux cas à distinguer, suivant qu'il s'agit d'une conique à centre (ellipse ou hyperbole) ou d'une parabole.

### I. — CONIQUES A CENTRE.

529. Forme de l'équation réduite. — Nous prenons pour axes de coordonnées *les axes de la conique* (C). L'équation est alors de la forme (n° 476)

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0. \tag{1}$$

Dans le cas d'une *ellipse réelle*, A et B sont positifs; nous poserons

$$A = a^2, \qquad B = b^2. \tag{2}$$

Nous supposerons, pour fixer les idées, $a > b$, de sorte que $2a$ sera le *grand axe* et $2b$ le *petit axe*.

Dans le cas d'une *hyperbole*, A et B sont de signes contraires. Par un choix convenable de la désignation des axes, nous pouvons supposer $A > 0$, $B < 0$ et poser

$$A = a^2, \qquad B = -b^2. \tag{3}$$

L'axe suivant $Ox$ est réel et a pour longueur $2a$; on l'appelle *axe*

*réel* ou *axe transverse*. L'axe suivant $Oy$ est imaginaire et a pour longueur $2ib$; on l'appelle *axe imaginaire* ou *axe non transverse*. Les asymptotes ont pour équation $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$. Elles sont rectangulaires pour $a = b$; dans ce cas, on dit que l'hyperbole est *équilatère*.

Avec les notations précédentes, on peut écrire les *équations paramétriques* sous la forme

$$(4) \qquad x = a \cos\varphi, \qquad y = b \sin\varphi,$$

pour l'ellipse, et

$$(5) \qquad x = a \operatorname{ch}\varphi, \qquad y = b \operatorname{sh}\varphi,$$

pour l'hyperbole ([1]). Nous en ferons un usage fréquent dans la suite.

Dans le cas de l'ellipse, l'angle $\varphi$ est habituellement désigné sous le nom d'*angle* d'*anomalie excentrique*. Nous verrons, au n° 539, quelle est sa signification géométrique.

Si l'on pose

$$(6) \qquad \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = t \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{th}\frac{\varphi}{2} = t,$$

on obtient les *équations paramétriques rationnelles*

$$(7) \qquad x = a\,\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2bt}{1+t^2},$$

pour l'ellipse, et

$$(8) \qquad x = a\,\frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad y = \frac{2bt}{1-t^2},$$

pour l'hyperbole. Elles nous montrent, ce que nous savions déjà (n° 265), que l'ellipse et l'hyperbole sont des *courbes unicursales*.

530. Propriétés des tangentes. — La tangente en $M(x, y)$ a pour équation

$$(9) \qquad \frac{Xx}{A} + \frac{Yy}{B} - 1 = 0.$$

---

([1]) On peut aussi écrire, en introduisant un paramètre imaginaire,

$$x = a \cos\varphi, \qquad y = ib \sin\varphi.$$

On retombe sur les équations (4), au changement près de $b$ en $ib$, qui caractérise le passage de l'ellipse à l'hyperbole.

En identifiant avec

$$uX + vY + w = 0,$$

on obtient

$$x = -A\frac{u}{w}, \qquad y = -B\frac{v}{w}.$$

En portant dans (1), on obtient l'*équation tangentielle*

(10) $$Au^2 + Bv^2 - w^2 = 0.$$

On peut l'utiliser pour résoudre différents problèmes sur les tangentes. Par exemple, si l'on cherche les tangentes issues d'un point $P(x, y)$, on peut former immédiatement l'équation du second degré qui donne leurs coefficients angulaires (n° 211),

$$Am^2 + B - (y - mx)^2 = 0$$

ou

(11) $$(A - x^2)m^2 + 2mxy + B - y^2 = 0.$$

En discutant la réalité des racines, on trouve des propriétés élémentaires bien connues et qui, d'ailleurs, sautent aux yeux, dès qu'on regarde une ellipse ou une hyperbole. Nous laissons au lecteur le soin de faire, comme exercice, cette petite vérification analytique.

Cherchons la condition pour que les deux tangentes issues de P soient rectangulaires. Pour cela, il faut et il suffit que les racines de l'équation (11) aient pour produit $-1$, ce qui s'écrit

$$\frac{B - y^2}{A - x^2} = -1$$

ou

(12) $$x^2 + y^2 = A + B.$$

D'où le théorème suivant :

Théorème de Monge. — *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique à centre est un cercle concentrique à la conique.*

Ce cercle porte le nom de *cercle de Monge* ou encore *cercle orthoptique*.

Dans le cas de l'ellipse, il est toujours réel et a pour rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$. C'est le cercle circonscrit au rectangle formé par les tangentes au sommet.

Dans le cas de l'hyperbole, il a pour rayon $\sqrt{a^2-b^2}$. Il n'est donc réel que si $a > b$, c'est-à-dire si l'angle des asymptotes qui comprend l'axe transverse est inférieur à un droit. Si l'hyperbole est équilatère, il se réduit à son centre; les asymptotes sont alors les seules tangentes rectangulaires qu'on puisse mener.

531. Propriétés des normales. — La normale au point $M(x, y)$ a pour équation

$$\frac{X-x}{\frac{x}{A}} = \frac{Y-y}{\frac{y}{B}} \tag{13}$$

ou

$$AXy - BYx = (A-B)xy. \tag{14}$$

Cherchons les *normales issues d'un point donné* $P(x_0, y_0)$. Pour cela, nous remplaçons, dans (14), X par $x_0$ et Y par $y_0$; nous obtenons l'équation

$$(A-B)xy + By_0x - Ax_0y = 0, \tag{15}$$

qui détermine, avec (1), les coordonnées des pieds des normales cherchées.

Si l'on interprète géométriquement, on voit que ces pieds peuvent être obtenus par l'intersection de la conique (C) avec l'hyperbole (H) définie par l'équation (15). Cette hyperbole passe à l'origine et au point P; elle admet les axes pour directions asymptotiques. Elle coupe (C) en quatre points réels ou imaginaires. On l'appelle *hyperbole d'Apollonius* du point P.

Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème. — *Par tout point* P *du plan, on peut mener quatre normales réelles ou imaginaires à une conique à centre. Les pieds de ces normales sont à l'intersection de la conique et de l'hyperbole d'Apollonius du point* P.

Nous allons maintenant discuter la *réalité de ces normales*.

Faisons d'abord observer qu'il est géométriquement évident que *deux au moins sont réelles*. En effet, si (C) est une ellipse, la branche de (H) qui passe à l'origine coupe nécessairement l'ellipe en deux points réels. Si (C) est une hyperbole, chaque branche de (H) a ses deux points à l'infini, l'un

extérieur, l'autre intérieur à (C) et, par suite, donne au moins un point d'intersection réel.

Pour discuter la réalité des deux autres normales, il faut traiter la question par le calcul. A cet effet, au lieu de prendre l'équation (15), déduite de (14), partons de la suivante :

$$\frac{A(x_0 - x)}{x} = \frac{B(y_0 - y)}{y} = \lambda, \tag{16}$$

déduite de (13). Si nous appelons $\lambda$ la valeur commune des deux rapports, nous avons

$$x = \frac{Ax_0}{A+\lambda}, \qquad y = \frac{By_0}{B+\lambda}. \tag{17}$$

Ce sont les équations paramétriques de l'hyperbole d'Apollonius.

Portant dans (1), nous obtenons *l'équation aux $\lambda$ des pieds des normales :*

$$f(\lambda) \equiv \frac{Ax_0^2}{(A+\lambda)^2} + \frac{By_0^2}{(B+\lambda)^2} - 1 = 0. \tag{18}$$

A chaque racine de cette équation du quatrième degré correspond une normale, dont le pied, donné par les formules (17), est réel en même temps que $\lambda$. Nous sommes donc ramenés à discuter la réalité des racines de l'équation (18).

A cet effet, nous étudions les variations de $f(\lambda)$, (t. I, n° 263).

Nous remarquons d'abord que $f(\lambda)$ devient infini pour $\lambda = -A \pm \varepsilon$ et $\lambda = -B \pm \varepsilon$, en prenant, dans le premier cas, le signe de A, et dans le second, le signe de B. Comme, d'après les conventions faites au n° 529, A est toujours positif, $f(-A) = +\infty$. D'autre part, $f(-\infty)$ et $f(+\infty)$ sont tous deux égaux à $-1$. Nous avons donc déjà le tableau suivant [1] :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ .............. | $-\infty$ | $-A \pm \varepsilon$ | $-B \pm \varepsilon$ | $+\infty$ |
| $f(\lambda)$ .......... | $-1$ | $+\infty$ | $\infty \times \operatorname{sgn} B$ | $-1$ |

Ceci nous prouve qu'il y a au moins une racine réelle $\lambda_1$ entre $-\infty$ et $-A$ et au moins une racine réelle $\lambda_2$ entre $-A$ et $+\infty$. Nous retrouvons le résultat prévu géométriquement.

Pour pousser plus loin la discussion, il faut faire appel à la dérivée

$$f'(\lambda) = -\frac{2Ax_0^2}{(A+\lambda)^3} - \frac{2By_0^2}{(B+\lambda)^3}.$$

Elle s'annule pour *une seule* valeur réelle $\lambda'$, donnée par

$$\frac{A+\lambda'}{(Ax_0^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{B-\lambda'}{(-By_0^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{A-B}{(Ax_0^2)^{\frac{1}{3}} + (By_0^2)^{\frac{1}{3}}}. \tag{19}$$

---

(1) D'après les conventions du n° 529, on a toujours $A > B$, donc $-A < -B$.

Nous en concluons d'abord que la racine $\lambda_1$ est unique dans l'intervalle $(-\infty, -A)$, sans quoi cet intervalle comprendrait trois racines de $f(\lambda)$, donc au moins deux racines de $f'(\lambda)$, d'après le théorème de Rolle (t. I, n° 61); ce qui est impossible.

Le même raisonnement nous prouve que la racine $\lambda_2$ est unique dans l'intervalle $(-B, +\infty)$, si $B > 0$, ou dans l'intervalle $(-A, -B)$, si $B < 0$.

Il nous reste finalement un seul intervalle I, où il puisse y avoir d'autres racines que $\lambda_1$ et $\lambda_2$; c'est l'intervalle $(-A, -B)$, si $B > 0$; ou l'intervalle $(-B, +\infty)$, si $B < 0$. Comme $f(\lambda)$ prend le même signe $\sigma$ aux deux extrémités, ces racines sont en nombre pair : zéro ou deux. Si elles existent, elles comprennent nécessairement $\lambda'$, en vertu du théorème de Rolle, et $f(\lambda')$ a le signe opposé à $\sigma$. Réciproquement, si $\lambda'$ se trouve dans l'intervalle I et si $f(\lambda')$ a le signe contraire à $\sigma$, il y a deux racines, de part et d'autre de $\lambda'$, dans cet intervalle.

Finalement, pour que l'équation (18) ait ses quatre racines réelles, il faut et il suffit que l'on ait les inégalités suivantes :

$$-A < \lambda' < -B, \quad f(\lambda') < 0, \qquad \text{si} \qquad B > 0 \text{ (ellipse)};$$

ou

$$-B < \lambda', \quad f(\lambda') > 0, \qquad \text{si} \qquad B < 0 \text{ (hyperbole)}.$$

Dans le premier cas, les formules (19) montrent tout de suite que $A + \lambda'$ est positif et $B + \lambda'$ négatif; donc, la condition $-A < \lambda' < -B$ est satisfaite identiquement. Il ne nous reste que la condition $f(\lambda') < 0$.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$A - B = C, \qquad (Ax_0^2)^{\frac{1}{3}} + (By_0^2)^{\frac{1}{3}} = \Delta.$$

Nous avons

$$A + \lambda' = \frac{C}{\Delta}\cdot(Ax_0^2)^{\frac{1}{3}}, \qquad B + \lambda' = -\frac{C}{\Delta}\cdot(By_0^2)^{\frac{1}{3}};$$

d'où

$$(20) \qquad f(\lambda') = \frac{\Delta^3}{C^2} - 1.$$

La condition de réalité des quatre normales est donc

$$\Delta^3 < C^2$$

ou

$$\Delta < C^{\frac{2}{3}},$$

ou, enfin, en remplaçant A par $a^2$, B par $b^2$ et C par $c^2$,

$$(21) \qquad (ax_0)^{\frac{2}{3}} + (by_0)^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{4}{3}} < 0.$$

Dans le cas de l'hyperbole, la condition $-B < \lambda'$ équivaut, d'après (19), à $\Delta > 0$. Elle est entraînée par la condition $f(\lambda') > 0$, qui s'écrit, en effet,

$$\Delta > C^{\frac{2}{3}}$$

et qui demeure, par conséquent, l'unique condition de réalité. En remplaçant A par $a^2$, B par $-b^2$ et C par $c^2$, elle s'écrit

$$(22)\qquad (ax_0)^{\frac{2}{3}} - (by_0)^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{4}{3}} > 0.$$

En définitive, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Du point* P, *on peut toujours mener deux normales réelles à la conique* (C). *Pour qu'on puisse en mener quatre, il faut et il suffit que les coordonnées de* P *satisfassent à l'inégalité* (21), *si* (C) *est une ellipse ou à l'inégalité* (22), *si* (C) *est une hyperbole.*

Il nous reste à interpréter géométriquement ces inégalités. Pour cela, nous savons qu'il faut d'abord construire les courbes (D), obtenues en annulant les premiers membres (n° 56).

Dans le cas de l'ellipse, la courbe (D) a pour équation

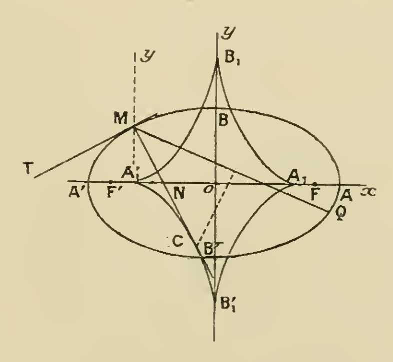
$$(23)\qquad (ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

Cette équation est résoluble indifféremment par rapport à $x$ ou par rapport à $y$. Si on la résout, par exemple par rapport à $x$, on constate, en se bornant aux valeurs positives de $x$ et de $y$, que, $y$ croissant de o à $\frac{c^2}{b}$, $x$ décroît de $\frac{c^2}{a}$ à o. D'autre part, le coefficient angulaire de la tangente est

$$(24)\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}\left(\frac{by}{ax}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Il est nul au point de départ, infini au point d'arrivée. Nous avons finalement

Fig. 52.




l'arc de courbe $A_1B_1$, que nous complétons ensuite par symétrie par rapport aux deux axes (*fig.* 52).

La courbe présente, comme on voit, quatre points de rebroussements [1].

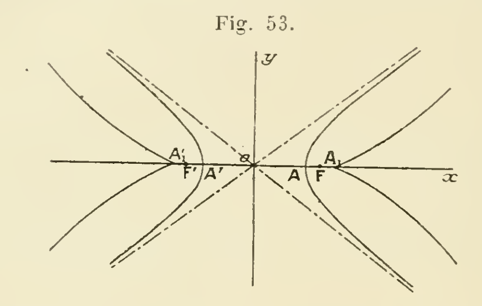
Si l'on remarque que l'inégalité (21) est satisfaite pour $x_0 = y_0 = 0$, on voit que *les points d'où l'on peut mener quatre normales à l'ellipse sont les points intérieurs à la courbe* (D).

Dans le cas de l'hyperbole, l'équation de la courbe (D) s'écrit

$$(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}. \tag{25}$$

Elle se construit comme précédemment, en faisant croître, par exemple, $y$ de $0$ à $+\infty$, auquel cas $x$ croît de $\frac{c^2}{a}$ à $+\infty$. La courbe part encore du point $A_1$ de $Ox$ et va à l'infini dans la direction de coefficient angulaire $\frac{a}{b}$, suivant une branche parabolique [2]. En complétant par symétrie, on obtient la courbe de la figure 53, qui présente deux points de rebroussements [3].

Fig. 53.




Si l'on remarque que l'inégalité (22) n'est pas satisfaite pour $x_0 = y_0 = 0$, on voit que *les points d'où l'on peut mener quatre normales à l'hyperbole sont les points des deux régions limitées par la courbe* (D) *qui comprennent les parties éloignées de* $Ox$.

532. Développée; centre de courbure, rayon de courbure. — Si le point P

---

(1) C'est la projection d'une hypocycloïde à quatre rebroussements (n° 600). Le point $A_1$ est conjugué harmonique du sommet A par rapport aux foyers F, F'. Il est toujours intérieur à l'ellipse. Quant à $B_1$, il est intérieur seulement si l'on a $a < b\sqrt{2}$.

(2) La partie principale de $ax - by = \left[c^{\frac{4}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} - by$ se calcule aisément en développant le crochet par la formule du binome, après mise en facteur préalable de $by$. On trouve comme premier terme non nul du développement $\frac{3}{2}c^{\frac{4}{3}}(by)^{\frac{1}{3}}$, qui tend vers l'infini avec $y$. On a donc bien une branche parabolique (n° 230).

Les directions asymptotiques de (D) sont perpendiculaires à celles de (C).

(3) Le point $A_1$ est encore conjugué harmonique du sommet A par rapport aux foyers. Il est donc intérieur à l'hyperbole.

vient sur (D), l'équation (18) a une racine double : deux des normales issues de P sont confondues. On en conclut (n° 272) que la courbe (D) n'est autre que l'enveloppe des normales, c'est-à-dire la *développée* (n° 312) de la conique (C) [1].

On peut retrouver directement ce résultat de bien des manières, en s'appuyant sur la théorie des enveloppes.

Prenons, par exemple, dans le cas de l'ellipse, l'équation de la normale sous la forme, déduite de (14),

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} = c^2, \tag{26}$$

où $\varphi$ désigne l'anomalie excentrique du point M. Pour avoir l'enveloppe, nous dérivons par rapport à $\varphi$ :

$$\frac{ax\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{by\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = 0$$

ou

$$\frac{ax}{\cos^3\varphi} + \frac{by}{\sin^3\varphi} = 0. \tag{27}$$

En éliminant $\varphi$ entre (26) et (27), on retrouverait l'équation (23) [2]. Résolvons plutôt par rapport à $x$, $y$ :

$$x = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi, \qquad y = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi. \tag{28}$$

Nous obtenons les *équations paramétriques de la développée* [3].

Mais, on peut aussi considérer ces formules comme donnant les *coordonnées du centre de courbure* C *de l'ellipse au point* M, puisque ce centre de courbure est le point de contact de la normale avec son enveloppe (n° 312).

En prenant la distance R = MC, on peut ensuite calculer *le rayon*

---

[1] Si P est sur l'un des axes, deux normales sont aussi confondues avec cet axe. Cela tient à ce que les axes sont des tangentes doubles de la développée (n° 299).

[2] On tire $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ de (26) et (27), en écrivant cette dernière sous la forme

$$\frac{\cos\varphi}{(ax)^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sin\varphi}{-(by)^{\frac{1}{3}}}.$$

On porte ensuite les valeurs obtenues dans $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.

[3] On aurait pu s'en servir avantageusement pour la construction de la courbe (D), faite au numéro précédent.

*de courbure.* On obtient

$$R^2 = \left(\frac{c^2}{a}\cos^2\varphi - a\right)^2\cos^2\varphi + \left(\frac{c^2}{b}\sin^2\varphi + b\right)^2\sin^2\varphi$$
$$= \frac{\cos^2\varphi}{a^2}(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^2 + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^2$$
$$= \frac{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^3}{a^2b^2};$$

(29) $$R = \frac{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Cette formule, qui aurait pu se déduire immédiatement de la formule générale (11) du n° 313, peut s'écrire, en remarquant que $(-a\sin\varphi, b\cos\varphi)$ sont les coordonnées de l'extrémité M′ du diamètre conjugué de OM (n° 533).

(30) $$R = \frac{\overline{OM'}^3}{ab}.$$

On a aussi

(31) $$R = \frac{\left(a^2 + b^2 - \overline{OM}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

On voit que *le rayon de courbure en* M *varie en sens inverse de* OM : *il est maximum et égal à* $\frac{a^2}{b}$ *aux sommets du petit axe, minimum et égal à* $\frac{b^2}{a}$ *aux sommets du grand axe.*

Le *cercle de courbure* (Γ) a pour centre C et pour rayon R. Nous savons que c'est aussi le cercle osculateur. Il coupe (C) en trois points confondus au point M et en un quatrième point Q (*fig.* 52). D'après le n° 485, VI, la tangente MT et la sécante MQ constituent les sécantes communes des deux coniques (C) et (Γ). Comme (Γ) est un cercle, ces deux sécantes sont également inclinées sur les axes de (C) (n° 506). Réciproquement, *si nous menons* MQ *symétrique de* MT *par rapport à* My, *le cercle tangent en* M *à* MT *et passant par* Q *est le cercle de courbure au point* M. En menant la perpendiculaire au milieu de MQ et prenant son intersection avec la normale MN, on obtient une *construction simple du centre de courbure.*

Dans le cas de l'hyperbole, on a des résultats analogues, qui peuvent se déduire des précédents par le changement de $b$ en $ib$ et de $\varphi$ en $i\varphi$. Nous laissons au lecteur le soin d'écrire ce que deviennent les for-

mules (26), (28), (29), (31) et de voir comment varie le rayon de courbure. Quant aux propriétés du cercle de courbure, elles ne subissent aucune modification.

533. Propriétés des diamètres. — Le demi-diamètre $\rho$ d'angle polaire $\omega$ s'obtient très simplement en remplaçant, dans (1), $x$ par $\rho\cos\omega$ et $y$ par $\rho\sin\omega$ :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\omega}{A} + \frac{\sin^2\omega}{B}. \tag{32}$$

On peut aisément discuter sa réalité et sa variation; cela conduit à des propriétés évidentes.

Changeons $\omega$ en $\omega + \frac{\pi}{2}$ et ajoutons, il vient

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B}. \tag{33}$$

Donc, *la somme des inverses des carrés de deux diamètres rectangulaires est constante.*

Étudions les systèmes de *diamètres conjugués* dans l'ellipse.

Étant donnés les deux points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$, la condition pour que les diamètres OM et OM' soient conjugués est (n° 463)

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0. \tag{34}$$

Si nous supposons que M et M' sont sur l'ellipse et ont pour anomalies $\varphi$ et $\varphi'$, cette condition s'écrit

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi' = 0$$

ou

$$\cos(\varphi' - \varphi) = 0,$$

$$\varphi' - \varphi = \pm\frac{\pi}{2}. \tag{35}$$

Sur l'ellipse, *les extrémités de deux diamètres conjugués sont donc caractérisées par la condition que leurs anomalies excentriques diffèrent d'un angle droit.*

Si l'on prend $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$, on a

$$x' = -a\sin\varphi = -\frac{a}{b}y, \qquad y' = b\cos\varphi = \frac{b}{a}x.$$

Si l'on prend $\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}$, $x'$ et $y'$ changent de signe. Par conséquent, *les deux extrémités* M′ *et* M″ *du diamètre conjugué de* OM *ont pour coordonnées*

$$(36) \qquad x' = -\frac{a}{b}y, \qquad y' = \frac{b}{a}x;$$

$$(37) \qquad x'' = \frac{a}{b}y, \qquad y'' = -\frac{b}{a}x.$$

Ces formules sont connues sous le nom de *formules de Chasles*.

Calculons la somme $\overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2$. Nous avons

$$\overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 = (x^2 + x'^2) + (y^2 + y'^2).$$
$$\overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 = (a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi) + (b^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) = a^2 + b^2.$$

Calculons l'aire du triangle OMM′ :

$$\text{aire OMM}' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(xy' - yx')$$
$$= \frac{1}{2}ab(\cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi') = \frac{1}{2}ab\sin(\varphi' - \varphi) = \pm\frac{1}{2}ab.$$

D'où les théorèmes suivants :

Théorèmes d'Apollonius. — 1° *La somme des carrés de deux diamètres conjugués est constante.*

2° *L'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est constante.*

Dans le cas de l'hyperbole, on a des propriétés analogues. Mais elles perdent une grande partie de leur intérêt du fait que, *si* M *est réel,* M′ *est imaginaire et inversement*. Cela résulte, en effet, de ce que les diamètres conjugués sont conjugués harmoniques par rapport aux asymptotes et, par suite, sont l'un dans l'angle qui comprend la courbe et l'autre dans l'angle qui ne la comprend pas.

Les formules (35), (36) et (37) subsistent, à condition de changer $\varphi$ en $i\varphi$, $\varphi'$ en $i\varphi'$ et $b$ en $ib$.

Si l'on veut éviter les imaginaires, il suffit de considérer, en même temps que l'hyperbole proposée, l'*hyperbole conjuguée*, qui se déduit

de la première par le changement de $a$ en $ia$ et de $b$ en $ib$ ([1]) ou, si l'on veut, par une homothétie imaginaire, de centre O et de rapport $i$. Chaque diamètre est alors réel pour l'une des hyberboles et imaginaire pour l'autre.

Les formules (36) et (37) subsistent sans modification, à condition de considérer les points M′ et M″ comme appartenant à l'hyperbole conjuguée de celle qui passe par M. Il en est de même des théorèmes d'Apollonius.

534. Foyers, directrices. — Cherchons les foyers de la conique (C), en appliquant la méthode générale du n° 515. Il nous suffit pour cela d'identifier l'équation (11) avec $m^2+1=0$, ce qui nous donne

$$xy = 0, \qquad A - x^2 = B - y^2.$$

Ce système admet les deux solutions :

$$(38) \qquad y = 0, \qquad x = \pm\sqrt{A - B} = \pm c \text{ ([2])};$$

$$(39) \qquad x = 0, \qquad y = \pm\sqrt{B - A} = \pm ci.$$

Nous avons donc *quatre foyers*. Les deux premiers F et F′ sont réels, situés sur $Ox$ ([3]) et coïncident avec les foyers de la Géométrie élémentaire. Les deux autres $\varphi$ et $\varphi'$ sont imaginaires conjugués et situés sur $Oy$ ([4]) (*cf.* n° 515).

La directrice D relative au foyer F a pour équations (n° 432)

$$\frac{cx}{a^2} - 1 = 0$$

ou

$$(40) \qquad x = \frac{a^2}{c}.$$

Calculons le rayon vecteur $r = MF$, dans le cas de l'ellipse. Nous

---

([1]) Il revient au même de changer le signe du terme constant de l'équation, ou bien de changer $x$ en $ix$ et $y$ en $iy$.

([2]) Nous poserons dorénavant $A - B = c^2$. La quantité $c$ est réelle, en vertu de l'hypothèse $A > B$, faite au n° 529.

([3]) C'est pourquoi l'axe $Ox$ est quelquefois appelé *axe focal*.

([4]) Ce sont les centres des cercles de rayon nul passant par F, F′ ou bien encore les points de rencontre des cercles de rayon nul de centres F et F′.

avons

$$\begin{aligned} r^2 &= (x-c)^2 + y^2 = (a\cos\varphi - c)^2 + b^2\sin^2\varphi \\ &= a^2\cos^2\varphi - 2ac\cos\varphi + a^2 - b^2 + b^2\sin^2\varphi \\ &= a^2\cos^2\varphi - 2ac\cos\varphi + a^2 - b^2\cos^2\varphi = c^2\cos^2\varphi - 2ac\cos\varphi + a^2 \\ &= (c\cos\varphi - a)^2. \end{aligned}$$

D'où

$$r = a - c\cos\varphi,$$

en remarquant que $a > c > c\cos\varphi$, ou enfin

$$(41) \qquad r = a - \frac{cx}{a}.$$

En changeant $c$ en $-c$ dans (41), nous avons le deuxième rayon vecteur $r' = \mathrm{MF}'$,

$$(42) \qquad r' = a + \frac{cx}{a}.$$

On aperçoit immédiatement la relation

$$(43) \qquad r + r' = 2a$$

et l'on retrouve la propriété classique qui sert de définition élémentaire à l'ellipse.

La formule (41) peut s'écrire

$$r = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right).$$

Or, la parenthèse n'est autre, d'après (40), que la distance MP à la directrice D. On a donc

$$(44) \qquad \frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MP}} = \frac{c}{a} = e = \text{const.}$$

On retrouve une autre propriété classique déjà démontrée au n° 518 et l'on obtient en même temps la formule qui donne l'excentricité.

Dans le cas de l'hyperbole, les formules (41) et (42) subsistent, au signe près. Si M appartient à la branche de droite, $\frac{cx}{a} > a$ et l'on a

$$r = \frac{cx}{a} - a, \qquad r' = \frac{cx}{a} + a, \qquad r' - r = 2a.$$

Si M appartient à la branche de gauche, $\frac{cx}{a} < -a$ et l'on a

$$r = a - \frac{cx}{a}, \qquad r' = -a - \frac{cx}{a}, \qquad r - r' = 2a.$$

La formule (44) subsiste sans modification.

335. Propriétés focales des tangentes et normales. — Il serait très facile de démontrer analytiquement, avec les axes actuels, les propriétés focales des tangentes et normales. Nous considérerons seulement celles qui n'ont pas été établies au Chapitre précédent.

Théorème I. — *Le lieu des projections des foyers sur les tangentes est le cercle décrit sur l'axe focal comme diamètre.*

Soit $P(x, y)$ un point quelconque du lieu. La perpendiculaire PT à FP menée par ce point a pour équation

$$(X - x)(x - c) + (Y - y)y = 0$$

ou

$$X(x - c) + Yy - [x(x - c) + y^2] = 0.$$

Exprimons qu'elle est tangente à la conique, c'est-à-dire que ses coordonnées $x - c$, $y$, $-[x(x - c) + y^2]$ satisfont à l'équation tangentielle (10) :

$$(45) \qquad A(x - c)^2 + By^2 - [x(x - c) + y^2]^2 = 0.$$

Nous obtenons une équation du quatrième degré, alors que nous attendons l'équation d'un cercle. Cela tient probablement à la présence d'une solution singulière (nº 59). Cherchons-la. Elle ne peut provenir que de la coïncidence des droites FP et PT. Comme ces droites sont rectangulaires, elles ne coïncident que si elles sont isotropes. Or, cette condition peut être réalisée, car les droites isotropes issues de F sont tangentes à la conique. *La solution singulière* soupçonnée existe donc bien; elle est *constituée par les droites isotropes du point* F.

Il faut maintenant la mettre en évidence sur l'équation (45) et enlever le facteur correspondant, de manière qu'il ne reste que la solution véritable. A cet effet, portons l'origine des coordonnées

au point F[1]. Notre équation devient

$$AX^2 + BY^2 - (X^2 + Y^2 + cX)^2 = 0$$

ou, en ordonnant par groupes homogènes,

$$AX^2 + BY^2 - c^2X^2 - 2cX(X^2 + Y^2) - (X^2 + Y^2)^2 = 0.$$

Si l'on se rappelle maintenant que $c^2 = A - B$, on voit que les termes du second degré se réduisent à $B(X^2 + Y^2)$. Finalement, $X^2 + Y^2$ est en facteur, conformément à nos prévisions géométriques. Supprimant ce facteur, il nous reste

$$X^2 + Y^2 + 2cX - B = 0$$

ou, en revenant aux anciens axes,

$$(x - c)^2 + y^2 + 2c(x - c) - B = 0,$$

ou enfin, en remplaçant $c^2$ par $A - B$,

(46) $$x^2 + y^2 - A = 0.$$

Le lieu véritable est donc bien un cercle, de centre O et de rayon $\sqrt{A} = a$. C. Q. F. D.

THÉORÈME II. — *Le produit des distances des foyers à une tangente quelconque est constant et réciproquement.*

Cherchons l'enveloppe des droites $\Delta$ telles que le produit $\overline{FP}.\overline{F'P'}$ de ses distances à F et à F' soit constant et égal à K.

Soit

$$ux + vy + w = 0,$$

l'équation de $\Delta$. On a (nº 66)

$$\overline{FP} = \frac{uc + w}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \qquad \overline{F'P'} = \frac{-uc + w}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

D'où

$$\frac{w^2 - u^2c^2}{u^2 + v^2} = K,$$

(47) $$u^2(K + c^2) + v^2K - w^2 = 0.$$

---

(1) Même si l'on n'avait pas trouvé *a priori* la solution singulière, ce changement de coordonnées eût été naturel, car on voit tout de suite, sur l'équation (45), que le point F est un point double.

Cette équation est identique à (10), si l'on prend $K = B$. Le théorème est donc démontré.

536. Coniques homofocales. — L'équation tangentielle générale des coniques homofocales à (C) est (nº 516)

$$(48)\qquad A u^2 + B v^2 - w^2 + \lambda(u^2 + v^2) = 0$$

ou

$$(49)\qquad (A + \lambda) u^2 + (B + \lambda) v^2 - w^2 = 0.$$

Elle est identique à (47), si l'on pose $K = B + \lambda$.

On peut remonter de (49) à l'équation ponctuelle :

$$(50)\qquad \frac{x^2}{A + \lambda} + \frac{y^2}{B + \lambda} - 1 = 0,$$

laquelle aurait d'ailleurs pu être écrite directement, en remarquant simplement que la différence $A - B$ doit demeurer constante pour tout le faisceau.

Les propriétés générales de ces coniques ont été énoncées au nº 516. Nous allons seulement reprendre la suivante :

Théorème. — *Par tout point P du plan passent deux coniques du faisceau : une ellipse et une hyperbole, qui se coupent à angle droit.*

Vérifions-le sur l'équation (50). Si $(x, y)$ sont les coordonnées de P, cette équation donne les $\lambda$ des coniques cherchées. Or, elle est du second degré. Il y a donc bien deux coniques passant par P.

Elles sont réelles. En effet, nous avons le tableau de substitutions :

| $\lambda$ : | $-\infty$ | $-A-\varepsilon$ | $-A+\varepsilon$ | $-B-\varepsilon$ | $-B+\varepsilon$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-1$ |

Il y a donc une racine $\lambda_1$ comprise entre $-A$ et $-B$ et une racine $\lambda_2$ entre $-B$ et $+\infty$. A la première correspond une hyperbole et à la seconde une ellipse.

La condition d'orthogonalité s'écrit, en remarquant que les paramètres directeurs de la normale à (50) au point $(x, y)$ sont $\dfrac{x}{A + \lambda}$,

$\frac{y}{B+\lambda}$,

$$(51)\qquad \frac{x^2}{(A+\lambda_1)(A+\lambda_2)} + \frac{y^2}{(B+\lambda_1)(B+\lambda_2)} = 0.$$

Or, si l'on remplace successivement, dans (50), $\lambda$ par $\lambda_1$ et $\lambda_2$ et si l'on retranche l'une de l'autre les équations obtenues, on obtient précisément l'égalité (51), au facteur $\lambda_1 - \lambda_2$ près, qui est différent de zéro, d'après la discussion ci-dessus.

Les coniques homofocales constituent donc bien un réseau orthogonal.

537. Coordonnées elliptiques. — Dans l'étude de certaines questions de Géométrie, de Mécanique ou de Physique mathématique, il est commode de prendre les deux nombres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ comme coordonnées du point P. On obtient ainsi le système dit des *coordonnées elliptiques*.

Il est intéressant de savoir exprimer $x$, $y$ en fonction de ces coordonnées. On y arrive très aisément par l'artifice suivant :

On a l'identité

$$(52)\qquad \frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} - 1 = \frac{-(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)}{(A+\lambda)(B+\lambda)},$$

car les racines du premier membre sont, par hypothèse, $\lambda_1$ et $\lambda_2$ et, d'autre part, si l'on chasse les dénominateurs, le coefficient de $\lambda^2$ est $-1$.

Ceci étant, multiplions les deux membres par $A+\lambda$ et remplaçons ensuite $\lambda$ par $-A$ (*cf.* t. I, n° 216) :

$$x^2 = \frac{(A+\lambda_1)(A+\lambda_2)}{A-B}.$$

En multipliant par $B+\lambda$ et faisant $\lambda = -B$, on trouve de même $y^2$. Finalement, on a les formules

$$(53)\qquad x = \sqrt{\frac{(A+\lambda_1)(A+\lambda_2)}{A-B}}, \qquad y = \sqrt{\frac{(B+\lambda_1)(B+\lambda_2)}{B-A}}.$$

De l'identité (52), on peut déduire une foule d'autres relations intéressantes. Par exemple, dérivons (52) par rapport à $\lambda$, puis faisons $\lambda = \lambda_1$ ; nous obtenons [1]

$$(54)\qquad \frac{x^2}{(A+\lambda_1)^2} + \frac{y^2}{(B+\lambda_1)^2} = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{(A+\lambda_1)(B+\lambda_1)}.$$

---

[1] Dans le calcul du second membre, il suffit de prendre la dérivée du facteur $\lambda - \lambda_1$, car les termes provenant de la dérivation des autres facteurs s'annulent tous pour $\lambda = \lambda_1$.

538. Cercles focaux. — On appelle ainsi les *cercles bitangents* à la conique. Ils comprennent comme cas particuliers les foyers; d'où leur dénomination. La corde de contact de chacun d'eux doit être parallèle à l'un des axes, d'après le cas V du n° 485 (¹). Nous avons donc *deux familles de cercles focaux*, ayant respectivement leurs centres sur $Ox$ et sur $Oy$.

Étudions, par exemple, la première famille. L'équation générale des coniques bitangentes à (C) et admettant pour corde de contact $\Delta$ la droite $x = \alpha$ est (n° 507)

$$\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1\right) - \lambda(x - \alpha)^2 = 0. \tag{55}$$

Déterminons $\lambda$ pour que cette équation représente un cercle ($\Gamma$) :

$$\frac{1}{A} - \lambda = \frac{1}{B} \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \frac{C}{AB}. \tag{56}$$

Les coordonnées $(x, y)$ de tout point M de (C) annulant la première parenthèse de (55), on voit tout de suite apparaître la propriété suivante :

*La puissance de tout point de (C) par rapport à un cercle focal quelconque est un carré parfait.*

Cette puissance est d'ailleurs égale à $\frac{C}{A}(x - \alpha)^2$, c'est-à-dire à $\left(\frac{c}{a}\cdot \text{MP}\right)^2$, P étant la projection de M sur $\Delta$. Si, d'autre part, nous menons la tangente MT au cercle, nous obtenons l'élégante relation

$$\text{MT} = \frac{c}{a}\,\text{MP} = e.\text{MP}. \tag{57}$$

C'est une généralisation de la formule (44), avec laquelle elle se confond, quand le rayon de ($\Gamma$) devient nul.

Si l'on considère un autre cercle focal ($\Gamma'$) de la même famille, on a de même

$$\text{MT}' = e.\text{MP}'.$$

D'où

$$\text{MT} + \text{MT}' = e(\text{MP} + \text{MP}') = e.\text{PP}' = \text{const.},$$

si M est entre les deux cordes de contact, et

$$|\text{MT} - \text{MT}'| = e.\text{PP}' = \text{const.},$$

si M' n'est pas entre ces cordes. C'est la généralisation de la formule (43) et de la formule analogue relative à l'hyperbole.

Signalons encore la propriété suivante :

*L'axe radical de ($\Gamma$) et de ($\Gamma'$) est équidistant des cordes de contact $\Delta$ et $\Delta'$.*

---

(¹) Le point à l'infini de cette corde est un pôle double.

En effet, on obtient son équation en retranchant l'équation (55) de l'équation analogue relative à (Γ'), ce qui donne, après suppression du facteur $\alpha' - \alpha$,

$$x = \frac{\alpha + \alpha'}{2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On a des propriétés analogues pour les cercles qui ont leur centre sur $Oy$.

539. Ellipse considérée comme projection d'un cercle. — Soit l'ellipse (E)

(58) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Au point $m(x, y)$, faisons correspondre le point $M(X, Y)$ défini par

(59) $$x = X, \qquad y = \frac{b}{a} Y.$$

Quand $m$ décrit (E), M décrit le cercle (C) défini par l'équation

$$X^2 + Y^2 = a^2.$$

Ce cercle, décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre, porte le nom de *cercle principal* ou *cercle homographique*.

Si l'on pose $\frac{b}{a} = \cos\theta$, on voit sans peine que la transformation définie par les formules (59) revient à faire tourner M de l'angle $\theta$ autour de $Ox$ pour le projeter ensuite en $m$ sur $xOy$ [1]. Donc *l'ellipse peut être considérée comme la projection orthogonale de son cercle homographique, celui-ci ayant, au préalable, subi une rotation de l'angle $\theta$ autour du diamètre AA'.*

On peut tirer de là une foule de propriétés et de constructions relatives à l'ellipse.

Tout d'abord, si l'on se reporte aux formules (4) et qu'on les compare avec (59), on obtient

$$X = a\cos\varphi, \qquad Y = a\sin\varphi.$$

Donc l'angle $\varphi$, anomalie excentrique du point $m$, n'est autre que l'angle $(\widehat{Ox, OM})$.

---

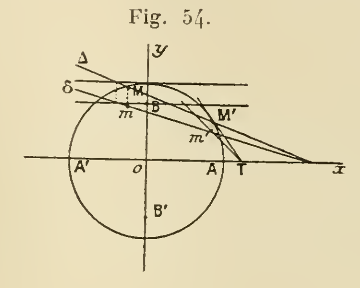
[1] Cette transformation est une transformation homographique particulière; c'est une homologie d'axe $Ox$ et qui a son pôle à l'infini sur $Oy$ (n° 405).

Ceci nous explique la formule (35), car deux diamètres conjugués de l'ellipse proviennent de la projection de deux diamètres conjugués du cercle, lesquels sont rectangulaires.

Tout problème relatif à l'ellipse a son homologue relativement au cercle homographique et peut être résolu par les procédés élémentaires de Géométrie descriptive connus sous le nom de *rabattement* et de *relèvement*. Voici quelques exemples :

I. *Intersection avec une droite.* — Soit à chercher les points de rencontre de l'ellipse de grand axe AA' et de petit axe BB' avec la droite $\delta$ (*fig.* 54).

Fig. 54.




Nous considérons cette droite comme la projection d'une droite $\Delta_1$ du plan $\Pi_1$ [1]. Nous rabattons celle-ci en $\Delta$ sur le plan de figure $\Pi$. Nous prenons les points de rencontre M et M' de $\Delta$ avec (C); puis nous les relevons en $m$ et $m'$ sur $\delta$.

Si nous voulons *la tangente en m à l'ellipse*, nous menons la tangente en M au cercle et nous la relevons, en nous servant, par exemple, de son point de rencontre T avec la charnière $Ox$.

II. *Tangentes issues d'un point donné.* — Soit $p$ ce point (*fig.* 55). Nous le considérons comme la projection d'un point $P_1$ de $\Pi_1$, que nous rabattons en P sur $\Pi$. Par P, nous menons les tangentes PMT et PM'T' au cercle ; nous les relevons ensuite en $pmt$ et $pm't$.

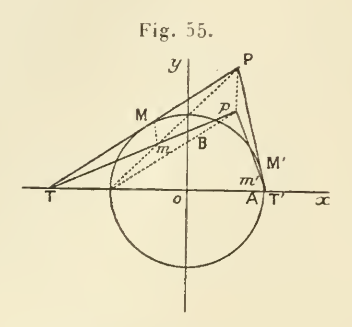
III. *Tangentes parallèles à une direction donnée.* — On consi-

---

[1] Nous appelons ainsi le plan, déduit de $xOy$ par rotation autour de $Ox$, dans lequel on doit amener le cercle homographique pour qu'il se projette suivant l'ellipse.

dère cette direction $\delta$ (*fig.* 56), comme la projection d'une direction $\Delta_1$ de $\Pi_1$, que l'on rabat ensuite en $\Delta$ sur $\Pi$. On mène les tangentes au cercle parallèle à $\Delta$ et on les relève.

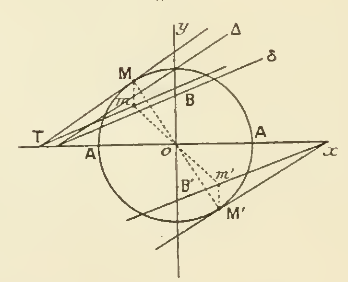
Fig. 55.




Signalons enfin une dernière application.

L'*aire de l'ellipse* est égale à l'aire du cercle homographique multipliée par $\cos\theta$ (n° 92), c'est-à-dire à $\pi a^2 \times \frac{b}{a} = \pi ab$. On retrouve ainsi une formule établie au Tome I (Chap. XIV, Exercice résolu n° 5).

Fig. 56.




On pourrait la généraliser en projetant des secteurs ou segments circulaires; on obtiendrait l'aire du secteur ou du segment elliptique en fonction des anomalies excentriques des extrémités de l'arc limite.

540. Description de l'ellipse au moyen d'un segment de droite de longueur constante. — Soit un segment de droite PQ, de longueur constante et dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires $Ox$ et $Oy$. Quel est le lieu décrit par un quelconque de ses points M (*fig.* 57)?

Posons $QM = a$, $PM = b$. Si nous appelons $\varphi$ l'angle de $Ox$

avec QP, les coordonnées du point M sont

$$x = a \cos\varphi, \qquad y = -b \sin\varphi.$$

Fig. 57.

Donc, le lieu demandé est une ellipse, d'axes $a$ suivant $Ox$ et $b$ suivant $Oy$. Au signe près, l'angle $\varphi$ est, à chaque instant, l'angle d'anomalie du point M.

Cette propriété est d'une application courante pour la *construction graphique des ellipses*. On marque les points P, Q, M sur le bord d'une bande de papier. Puis, on déplace celle-ci, de telle manière que P soit toujours sur $Ox$ et Q sur $Oy$. Dans chaque position, on marque le point M avec la pointe d'un crayon. On a ainsi très rapidement autant de points qu'on veut et il ne reste plus qu'à les joindre par un trait continu.

Il est facile d'avoir la tangente en M. En effet, la normale passe par le centre instantané de rotation (t. III et Chap. XXXIX, Exercice résolu n° 1) correspondant au mouvement de la figure invariable PMQ. Or, ce centre I se trouve aussi sur les perpendiculaires menées par P à $Ox$ et par Q à $Oy$. La construction est, dès lors, évidente (*cf.* n° 599).

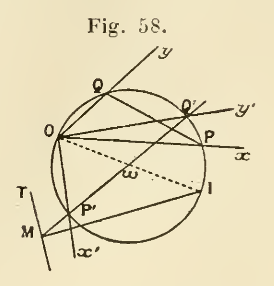
On peut généraliser la propriété précédente (*cf.* n° 599). D'abord, il est évident, sur la démonstration même, qu'elle subsiste quelle que soit la position du point M sur la droite indéfinie PQ, pourvu que les distances PM et QM demeurent constantes.

Cela posé, supposons que le point M ne soit plus assujetti à être sur PQ, mais simplement à former, avec ce segment, une figure invariable, qui sera généralement un triangle. Supposons, en outre, que les points P et Q soient simplement assujettis à décrire deux droites concourantes quelconques $Ox$ et $Oy$ (*fig.* 58). Je dis que *le lieu de* M *est encore une ellipse.*

Considérons, en effet, le cercle (C) circonscrit au triangle OPQ. Il a un diamètre constant égal à $\dfrac{PQ}{\sin \widehat{xOy}}$. Il constitue donc une figure invariable avec sa corde constante PQ et, par suite, aussi avec le triangle PQM. Joignons son centre $\omega$ au point M et considérons les extrémités P′, Q′ du diamètre ainsi obtenu. Ils font encore partie de la figure invariable. Les arcs PP′ et PQ′ sont donc cons-

tants et, par suite, aussi les angles inscrits POP′ et POQ′. Il en résulte que les droites OP′ et OQ′ sont fixes, soient $Ox'$ et $Oy'$. Elles sont d'ailleurs rectangu-

Fig. 58.




laires. Nous sommes donc ramenés au cas primitivement traité et le point M décrit une ellipse, dont les axes sont MQ′ suivant $Ox'$ et MP′ suivant $Oy'$.

La normale en M à cette ellipse passe par le point I, diamétralement opposé à O, sur (C).

**541. Propriétés spéciales de l'hyperbole relativement a ses asymptotes.** — Une hyperbole rapportée à ses asymptotes a une équation de la forme [1].

$$xy = K, \tag{60}$$

ce qui s'interprète géométriquement par le théorème suivant :

Théorème I. — *Le produit des distances d'un point quelconque d'une hyperbole à ses asymptotes est constant.*

Dans l'équation (60), la distance à chaque asymptote est comptée parallèlement à l'autre; mais on peut la compter parallèlement à une direction fixe quelconque; cela ne fait que modifier la valeur de la constante K. On peut, en particulier, prendre les distances orthogonales.

La réciproque du théorème est évidemment exacte, car toute équation de la forme (60) représente une hyperbole admettant les axes de coordonnées pour asymptotes.

Théorème II. — *Une hyperbole et ses asymptotes interceptent sur toute droite du plan deux cordes qui ont même milieu.*

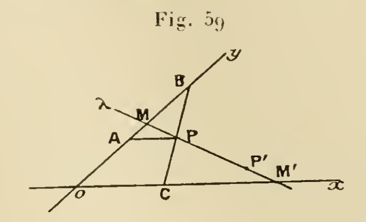
---

[1] Les axes sont directions asymptotiques et l'origine est centre.

Cela résulte immédiatement de ce que le diamètre conjugué de cette droite est le même par rapport à l'hyperbole et par rapport aux asymptotes.

Cette propriété est utilisée pour *construire l'hyperbole quand on en connaît les asymptotes et un point*. Il suffit de mener par le point donné P une droite quelconque P$\lambda$, qui coupe les asymptotes en M et M' (*fig.* 59). Puis, en porte $\overline{M'P'} = -\overline{MP}$. Le point P' appartient

Fig. 59




à l'hyperbole. En faisant varier P$\lambda$, on obtient autant de points qu'on veut. Lorsque P' se confond avec P, la droite P$\lambda$ est la tangente en P. Donc :

Théorème III. — *Toute tangente à l'hyperbole rencontre les asymptotes en deux points qui ont pour milieu le point de contact.*

Ce théorème, qui est évidemment un cas particulier du précédent, donne une *construction très simple de la tangente en un point donné* P (*fig.* 59). On mène PA parallèle à O$x$; on porte AB = OA et l'on joint PB. Le segment BC a évidemment pour milieu P; la droite PB est donc tangente en P.

Théorème IV. — *Si la droite* P$\lambda$ *se déplace parallèlement à elle-même, le produit* $\overline{PM}.\overline{PM'}$ *demeure constant.*

En effet, prenons pour axes de coordonnées le diamètre O$y$ parallèle à P$\lambda$ et le diamètre conjugué O$x$. Notre hyperbole a pour équation (n° 465)

$$(61)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \pm 1 = 0 \quad (^1).$$

---

(1) On a le signe + ou le signe — suivant que O$y$ coupe ou ne coupe pas l'hyperbole.

Soient $(\alpha, \beta)$ les coordonnées de P. Les ordonnées des points M et M' sont $\frac{b}{a}\alpha$ et $-\frac{b}{a}\alpha$. On a donc

$$\overline{PM}.\overline{PM'} = \left(\frac{b}{a}\alpha - \beta\right)\left(-\frac{b}{a}\alpha - \beta\right) = \beta^2 - \frac{b^2}{a^2}\alpha^2 = \pm b^2,$$

en se servant de ce que $\alpha$, $\beta$ vérifient (61).

Le produit est bien constant et égal au carré du demi-diamètre parallèle à $P\lambda$.

Une application immédiate de ce théorème est la *construction des points de rencontre de l'hyperbole avec une droite donnée* D.

Soient, en effet, M et M' les points de rencontre de cette droite avec les asymptotes. Si P est un point de rencontre avec l'hyperbole, on connaît [1] le produit $\overline{PM}.\overline{PM'}$ et la différence algébrique

$$\overline{PM'} - \overline{PM} = \overline{MM'}.$$

On est ramené à un problème élémentaire bien connu.

Cette solution est en défaut si la droite D est parallèle à une asymptote. Le point M', par exemple, est à l'infini et le produit et la différence ci-dessus sont tous deux infinis.

Fig. 60.

La solution est alors donnée très simplement par l'équation (60). Si l'on connaît déjà un point $P_0(x_0, y_0)$ et si la droite D est parallèle à $Oy$ et a pour abscisse $x$, l'ordonnée $y$ de l'unique point de rencontre P est donnée par la formule

$$y = \frac{x_0 y_0}{x},$$

---

[1] Pour avoir ce produit, il suffit de mener une parallèle $M_0M'_0$ à MM', par un point connu $P_0$ de l'hyperbole. On a alors $\overline{PM}.\overline{PM'} = \overline{P_0M_0}.\overline{P_0M'_0}$.

c'est-à-dire par une construction de quatrième proportionnelle, qui se fera, par exemple, comme il est indiqué sur la figure 60, en menant $M_0N$ parallèle à $MN_0$, puis NP parallèle à $Ox$.

## II. — PARABOLE.

542. Tangentes. — Nous prenons l'axe de la parabole pour axe des $x$ et la tangente au sommet pour axe des $y$. L'équation est alors

$$y^2 - 2px = 0. \tag{62}$$

La constante $p$ porte le nom de *paramètre* de la parabole.

Il est à remarquer que l'équation (62) est résoluble par rapport à $x$, de sorte que *$y$ peut jouer le rôle de paramètre rationnel*, si l'on veut considérer la parabole comme une courbe unicursale.

La tangente au point $M(x, y)$ a pour équation

$$Yy - p(X + x) = 0. \tag{63}$$

En identifiant avec

$$uX + vY - w = 0,$$

on trouve

$$x = \frac{w}{u}, \qquad y = -\frac{pv}{u}.$$

En portant dans (62), nous obtenons l'*équation tangentielle*

$$pv^2 - 2uw = 0. \tag{64}$$

Si l'on se donne le coefficient angulaire $m = -\frac{u}{v}$, on tire de (64)

$$\frac{w}{v} = -\frac{p}{2m}.$$

*Il y a donc une seule tangente de coefficient angulaire donné* [1]; elle a pour équation

$$y = mx + \frac{p}{2m}. \tag{65}$$

Si, dans cette équation, on considère $x$ et $y$ comme les coordon-

---

[1] Cela provient de ce que les deux tangentes issues d'un point à l'infini comprennent toujours la droite de l'infini, de sorte qu'il ne reste plus qu'une tangente à distance finie.

nées d'un point P donné, elle constitue *l'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues de ce point.*

On pourrait discuter leur réalité. Bornons-nous, comme au n° 530, à chercher leur condition d'orthogonalité. Il suffit d'écrire que le produit des racines en $m$ est égal à $-1$, ce qui donne

$$(66) \qquad x = -\frac{p}{2}.$$

Nous verrons (n° 546) que c'est là l'équation de la directrice. Donc :

Théorème. — *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une parabole est sa directrice.*

Cette propriété est quelquefois commode pour trouver la directrice d'une parabole qui a une position quelconque dans le plan.

543. Normales. — L'équation de la normale au point $M(x, y)$ est

$$(67) \qquad (X - x)y + (Y - y)p = 0.$$

Si l'on fait $Y = 0$, on obtient $X - x = p$. Donc, *la sous-normale* $\overline{M'N}$ *est constante et égale au paramètre.*

Si l'on remplace les coordonnées courantes X, Y par les coordonnées $(x_0, y_0)$ d'un point donné P, on obtient l'équation

$$(68) \qquad xy + y(p - x_0) - py_0 = 0.$$

qui, avec (62), détermine les pieds des *normales issues de* P.

Cette équation représente une hyperbole équilatère, passant par P, admettant $Ox$ pour asymptote et appelée *hyperbole d'Apollonius du point* P. Elle rencontre la parabole au point à l'infini sur $Ox$ et en trois points à distance finie. Ces derniers donnent seuls de véritables normales [1] et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Par tout point* P *du plan, on peut mener trois*

---

[1] Le point à l'infini donne comme normale la parallèle à $Ox$ : cela tient à ce que la perpendiculaire à la droite de l'infini est indéterminée (n° 73).

*normales à la parabole; leurs pieds sont à l'intersection de celle-ci avec l'hyperbole d'Apollonius de* P.

Discutons la *réalité de ces normales*. Pour cela, formons l'équation aux $y$ des pieds des normales. Il suffit de remplacer, dans (68), $x$ par $\frac{y^2}{2p}$, ce qui donne

$$y^3 + 2p(p - x_0)y - 2p^2 y_0 = 0, \tag{69}$$

équation du troisième degré de la forme canonique. La condition de réalité des trois racines est donc (t. I, n° 265)

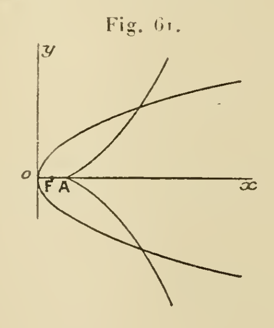
$$8(p - x_0)^3 + 27py_0^2 < 0. \tag{70}$$

Pour l'interpréter, construisons la courbe (D) définie par l'équation

$$8(p - x)^3 + 27py^2 = 0. \tag{71}$$

Cette courbe est une cubique, admettant le point $A(p, 0)$ pour point de rebroussement et une branche parabolique dans la direction $Oy$. Elle a la forme indiquée sur la figure 61 [1].

Fig. 61.




Si, dans (70), on suppose $x_0 = y_0 = 0$, l'inégalité n'est pas vérifiée. Donc :

Théorème. — *Si le point* P *se trouve dans la région limitée par* (D) *qui comprend* O, *il n'y a qu'une seule normale réelle issue de ce point; s'il se trouve dans l'autre région, il y en a trois.*

544. Développée; centre de courbure, rayon de courbure. — Comme au n° 532, *la courbe* (D) *n'est autre que la développée de la parabole.*

Cherchons les coordonnées du *centre de courbure* au point $M(x, y)$. A cet effet, nous écrivons l'équation (67) de la normale en

---

[1] Elle coupe la parabole aux deux points $(4p, \pm 2p\sqrt{2})$ et en quatre points imaginaires.

fonction du seul paramètre $y$ :

(72) $$\left(X - \frac{y^2}{2p}\right)y + (Y - y)p = 0.$$

Dérivons par rapport à $y$, pour avoir le point limite :

$$X - \frac{3y^2}{2p} - p = 0.$$

En portant X dans (72), nous obtenons Y. Finalement, *les coordonnées du centre de courbure sont*

(73) $$X = p + \frac{3y^2}{2p}, \qquad Y = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Si l'on éliminait entre elles $y$, on retrouverait l'équation (71) de la courbe (D).

Le rayon de courbure s'obtient en prenant la distance MC :

$$R^2 = \left(X - \frac{y^2}{2p}\right)^2 + (Y - y)^2 = \left(p + \frac{y^2}{p}\right)^2 + y^2\left(1 + \frac{y^2}{p^2}\right)^2 = \frac{(y^2 + p^2)^3}{p^4};$$

d'où

(74) $$R = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2},$$

formule qu'on peut aussi obtenir immédiatement au moyen de la formule (13) du n° 313.

*On voit que le rayon de courbure croît avec $y$, depuis $p$, rayon de courbure au sommet, jusqu'à l'infini, rayon de courbure à l'infini.*

La construction du cercle de courbure donnée au n° 532 s'applique sans aucune modification à la parabole.

545. Diamètres. — Le diamètre conjugué de la direction de coefficient angulaire $m$ a pour équation (n° 463)

(75) $$y = \frac{p}{m}.$$

Il coupe la parabole au point $O'\left(\frac{p}{2m^2}, \frac{p}{m}\right)$, qui n'est autre que le point de contact de la tangente (65).

Prenons cette tangente pour axe $O'y'$ et le diamètre pour axe $O'x'$.

Nous savons que la nouvelle équation de la parabole est de la forme

$$(76) \qquad y'^2 = 2p'x'.$$

Nous laissons au lecteur le soin de le vérifier, à titre d'exercice, en faisant le changement de coordonnées; il trouvera que la valeur de $p'$ est

$$(77) \qquad p' = \frac{p}{\sin^2 \alpha},$$

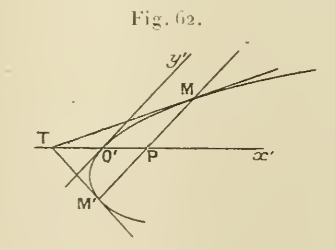
en appelant $\alpha$ l'angle de $Ox$ avec $O'y'$.

Si, avec ces nouveaux axes, nous écrivons l'équation de la tangente au point $M(x', y')$, nous retombons sur l'équation (63), avec des lettres accentuées. Si nous faisons ensuite $Y' = 0$, nous obtenons $X' = -x'$. D'où le théorème suivant :

Théorème. — *La sous-tangente* PT *a pour milieu le point* O'.

C'est une généralisation d'une propriété élémentaire bien connue. Elle résulte d'ailleurs de ce que le point T a pour polaire MP [1] et,

Fig. 62.




par suite, est conjugué harmonique de P par rapport au point O' et au point à l'infini sur $O'x'$ (*fig.* 62).

546. Foyer. — Écrivons que l'équation (65) se réduit à $m^2 + 1 = 0$. Nous obtenons de suite les deux conditions

$$(78) \qquad y = 0, \qquad x = \frac{p}{2},$$

qui nous donnent les *coordonnées du foyer* F. La *directrice*, qui

[1] En effet, T se trouve sur la tangente en M et sur la polaire $O'x'$ du point à l'infini de MP; il est donc bien le pôle de MP (n° 440).

en est la polaire, a pour équation

$$x = -\frac{p}{2}. \tag{79}$$

Cherchons *le lieu de la projection de* F *sur* MT. Il nous suffit d'éliminer $m$ entre l'équation (65) et la suivante :

$$my - x - \frac{p}{2} = 0, \tag{80}$$

ce qui donne, tous calculs faits,

$$2x\left[\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2\right] = 0.$$

On a la solution singulière constituée par les isotropes de F et *la solution véritable constituée par la tangente au sommet* et bien connue en Géométrie élémentaire.

547. Paraboles homofocales. — Cherchons les paraboles qui ont même axe et même foyer que la parabole (62). Si $\lambda$ désigne le paramètre de l'une d'elles, son sommet a pour abscisse $\frac{p}{2} - \frac{\lambda}{2}$. Son équation est donc

$$y^2 - 2\lambda\left[x - \left(\frac{p}{2} - \frac{\lambda}{2}\right)\right] = 0$$

ou

$$y^2 - 2\lambda x + \lambda(p - \lambda) = 0. \tag{81}$$

Si l'on cherche l'équation tangentielle correspondante (n° 441), on trouve

$$\lambda(u^2 + v^2) - 2u\left(w + u\frac{p}{2}\right) = 0, \tag{82}$$

ce qui représente bien un faisceau tangentiel défini par les points cycliques, d'une part et par le point F et le point à l'infini sur $Ox$, d'autre part.

Par tout point $P(x, y)$ du plan passent deux paraboles du faisceau, dont les $\lambda$ sont donnés par l'équation du second degré (81). Le produit des racines étant négatif, ces $\lambda$ sont toujours réels et de signes contraires. Donc, *les deux paraboles qui passent par* P *sont toujours réelles et ont leurs concavités tournées dans des sens opposés. Elles sont, en outre, orthogonales*, car, d'après la formule (75), cette propriété se traduit par la condition

$$\lambda_1\lambda_2 = -y^2,$$

qui est bien satisfaite par les racines de (81).

En prenant $\lambda_1$ et $\lambda_2$ comme coordonnées de P, on obtient un système de coordonnées curvilignes orthogonales analogue à celui du n° 537, mais moins intéressant. Il donne lieu aux formules

$$(83)\qquad x = \frac{p - \lambda_1 - \lambda_2}{2}, \qquad y = \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2}.$$

548. Cercles focaux. — Comme au n° 538, ce sont les cercles bitangents. Il n'y en a qu'une famille, dont les centres sont sur $Ox$ et qui ont pour équation générale

$$(84)\qquad y^2 - 2px + (x - \alpha)^2 = 0.$$

Ils donnent lieu à des propriétés analogues à celles du n° 538 et qui se démontrent de la même manière.

# CHAPITRE XXXVI.

## ÉTUDE DES QUADRIQUES SUR LEURS ÉQUATIONS RÉDUITES.

### I. — QUADRIQUES A CENTRE UNIQUE.

549. Forme de l'équation réduite. — L'équation d'une quadrique à centre *rapportée à ses plans principaux* est de la forme (476) :

$$(1) \qquad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0.$$

Laissant de côté l'ellipsoïde imaginaire, nous poserons :

$$A = a^2, \quad B = b^2, \quad C = c^2 \quad (a > b > c),$$

pour l'ellipsoïde;

$$A = a^2, \quad B = b^2, \quad C = -c^2 \quad (a > b),$$

pour l'hyperboloïde à une nappe :

$$A = -a^2, \quad B = -b^2, \quad C = c^2 \quad (a > b),$$

pour l'hyperboloïde à deux nappes.

Les formes de ces trois surfaces ont été étudiées aux nos 454 à 456; nous n'y reviendrons pas, le lecteur n'ayant qu'à supposer que les axes de coordonnées sont maintenant rectangulaires.

550. Plans tangents; normales. — L'équation du *plan tangent* au point $M(x, y, z)$ de la surface est (no 204)

$$(2) \qquad \frac{Xx}{A} + \frac{Yy}{B} + \frac{Zz}{C} - 1 = 0.$$

Si on l'identifie avec

$$(3) \qquad uX + vY + wZ - r = 0,$$

on a

$$x = -A\frac{u}{r}, \qquad y = -B\frac{v}{r}, \qquad z = -C\frac{w}{r};$$

portant dans (1), on obtient l'*équation tangentielle* de la surface :

$$(4) \qquad Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - r^2 = 0$$

Parmi les différents problèmes qu'on peut se poser relativement aux plans tangents, contentons-nous de résoudre le suivant, qui généralise celui du n° 530 :

Cherchons *le lieu des points d'où l'on peut mener trois plans tangents formant un trièdre trirectangle.*

Soient $(x, y, z)$ les coordonnées d'un tel point et soient trois plans tangents $(u, v, w, r)$, $(u', v', w', r')$, $(u'', v'', w'', r'')$ passant par ce point et deux à deux rectangulaires. Nous avons

$$(5) \qquad \begin{cases} ux + vy + wz = -r, \\ u'x + v'y + w'z = -r', \\ u''x + v''y + w''z = -r''. \end{cases}$$

Élevons au carré et ajoutons, en supposant que les $u$, $v$, $w$ sont des cosinus directeurs et appliquant les relations qui existent entre les neuf cosinus d'un trièdre trirectangle (n° 35). Il vient, en tenant compte de (4),

$$x^2 + y^2 + z^2 = A + B + C.$$

Donc *le lieu cherché est une sphère.* On l'appelle *sphère orthoptique* ou *sphère de Monge.*

Les équations de la normale au point M sont

$$(6) \qquad \frac{A(X - x)}{x} = \frac{B(Y - y)}{y} = \frac{C(Z - z)}{z}.$$

Cherchons les normales issues du point P $(x_0, y_0, z_0)$. Il suffit de remplacer, dans (6), X, Y, Z par $x_0$, $y_0$, $z_0$ ; si nous prenons pour inconnue auxiliaire la valeur commune $\lambda$ des trois rapports, les coordonnées des pieds des normales se calculent par les formules

$$(7) \qquad x = \frac{Ax_0}{A - \lambda}, \qquad y = \frac{By_0}{B - \lambda}, \qquad z = \frac{Cz_0}{C - \lambda},$$

$\lambda$ étant, d'autre part, donné par l'équation

$$(8) \qquad \frac{Ax_0^2}{(A - \lambda)^2} + \frac{By_0^2}{(B - \lambda)^2} + \frac{Cz_0^2}{(C - \lambda)^2} - 1 = 0$$

Cette équation est du sixième degré. D'autre part, si l'on y substitue $-\infty$, $-A$, $-B$, $-C$, $+\infty$, les résultats extrêmes sont négatifs et l'un au moins des résultats intermédiaires est positif. Il y a donc au moins deux racines réelles. Mais, nous ne pousserons pas plus loin la discussion et nous nous contenterons d'énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Par tout point P de l'espace, on peut abaisser six normales sur une quadrique à centre: deux au moins sont réelles.*

Si, dans les formules (7) on regarde $\lambda$ comme un paramètre variable, on a les équations paramétriques d'une cubique gauche, qui porte le nom de *cubique de Chasles* ou *cubique aux pieds des normales;* elle rencontre la quadrique aux pieds des six normales issues de P. Elle passe par P, par O et par les points à l'infini sur les axes. Elle joue le même rôle que l'hyperbole d'Apollonius en Géométrie plane (n° 531).

Le cône qui a pour sommet le point P et pour directrice la cubique de Chasles est du second degré (n° 378). Donc :

Théorème. — *Les six normales abaissées du point P sont sur un même cône du second degré.*

Ce cône est appelé *cône des normales* (*cf.* Chap. XXXIV, Exercice résolu n° 4).

551. Diamètres. — Soit un diamètre $O\lambda$, de cosinus directeurs $(\alpha, \beta, \gamma)$. Si $2\rho$ désigne sa longueur, les coordonnées d'une de ses extrémités sont $\rho\alpha$, $\rho\beta$, $\rho\gamma$. En écrivant qu'elles satisfont à l'équation (1), on a

$$(9) \qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} + \frac{\gamma^2}{C}.$$

Le diamètre est réel ou imaginaire, suivant que le second membre est positif ou négatif. En se reportant aux différentes hypothèses envisagées au n° 549, sur les signes de A, B, C, on voit facilement que tous les diamètres de l'ellipsoïde sont réels; ceux de l'$H_1$ sont réels quand ils sont extérieurs au cône asymptote; ceux de l'$H_2$ sont réels quand ils sont intérieurs au cône asymptote. Ces propriétés sont d'ailleurs évidentes, quand on se rappelle la forme de chaque surface.

Considérons trois diamètres $O\lambda$, $O\lambda'$, $O\lambda''$ formant un trièdre trirectangle. Soient $\rho$, $\rho'$, $\rho''$ leurs demi-longueurs. Écrivons les trois équations analogues à (9) et ajoutons. Nous obtenons, en tenant compte des relations entre les neuf cosinus (n° 35),

$$(10)\qquad \frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho'^2}+\frac{1}{\rho''^2}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}.$$

Donc, *la somme des carrés des inverses de trois diamètres deux à deux rectangulaires est constante.*

552. Soient trois diamètres conjugués OM, OM', OM'' d'un ellipsoïde. Appelons $(x, y, z)$, $(x', y', z')$, $(x'', y'', z'')$ les coordonnées de leurs extrémités M, M', M''. On a

$$(11)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$(12)\qquad \frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}+\frac{z'z''}{c^2}=0$$

et les relations qui s'en déduisent par permutations circulaires des accents.

Posons

$$(13)\qquad \alpha=\frac{x}{a},\qquad \beta=\frac{y}{b},\qquad \gamma=\frac{z}{c}$$

et les formules analogues accentuées. D'après (11) et (12), les neuf quantités $\alpha$, $\beta$, ..., $\gamma''$ peuvent être considérées comme les neuf cosinus d'un trièdre trirectangle (n° 35). Appliquons-leur les diverses relations qui existent entre ces neuf cosinus.

Nous avons d'abord

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1$$

ou, d'après (13),

$$(14)\qquad x^2+x'^2+x''^2=a^2.$$

On a des égalités analogues pour $y$ et pour $z$. En les ajoutant membre à membre, il vient

$$(15)\qquad \overline{OM}^2+\overline{OM'}^2+\overline{OM''}^2=a^2+b^2+c^2.$$

Écrivons ensuite que le déterminant des neuf cosinus est égal à 1. Cela nous donne

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=abc$$

ou, d'après le n° 93,

$$(17)\qquad \text{volume OMM'M''}=\frac{abc}{6}.$$

Nous savons enfin que chaque mineur du déterminant est égal à l'élément correspondant. Par exemple,

$$\alpha = \beta'\gamma'' - \gamma'\beta''$$

ou

$$(18) \qquad y'z'' - z'y'' = bc\frac{x}{a}.$$

Le premier membre est égal au double de l'aire de la projection $S_x$ du triangle OM'M'' sur $yOz$ (n° 82) : on a donc

$$S_x = \frac{bc}{2}\,\frac{x}{a}.$$

De même,

$$S'_x = \frac{bc}{2}\,\frac{x'}{a}, \qquad S''_x = \frac{bc}{2}\,\frac{x''}{a}.$$

Élevons au carré et ajoutons ; il vient, en tenant compte de (14),

$$S_x^2 + S'^2_x + S''^2_x = \frac{b^2c^2}{4}.$$

De même,

$$S_y^2 + S'^2_y + S''^2_y = \frac{c^2a^2}{4}, \qquad S_z^2 + S'^2_z + S''^2_z = \frac{a^2b^2}{4}.$$

Ajoutons ces trois égalités membre à membre, en tenant compte de la formule (42) du n° 92 ; il vient

$$(19) \quad \overline{\text{aire OM'M''}}^2 + \overline{\text{aire OM''M}}^2 + \overline{\text{aire OMM'}}^2 = \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{4}.$$

Les formules (15), (17) et (19) permettent d'énoncer le théorème suivant :

Théorème (*d'Apollonius*). — *Si l'on considère le parallélépipède construit sur trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde, la somme des carrés des arêtes, la somme des carrés des aires des faces et le volume sont trois quantités constantes.*

**553.** Plans cycliques ; ombilics. — Les plans cycliques réels sont donnés (n° 480) par l'équation

$$(20) \qquad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - S(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

où S désigne la racine moyenne de l'équation en S.

*Cas de l'ellipsoïde.* — D'après les conventions faites au n° 549,

la racine moyenne est $\frac{1}{B}$ et les plans cycliques sont

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0$$

ou

$$(21)\qquad \frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a}\pm\frac{z\sqrt{b^2-c^2}}{c}=0.$$

Géométriquement, il est évident que ce sont les plans passant par O$y$ et par les diamètres communs à l'ellipse du plan des $zx$ et au cercle concentrique de rayon $b$.

Il y a quatre plans tangents cycliques réels; leurs quatre points de contact sont *quatre ombilics*, en vertu du théorème II du n° 342.

*Cas des hyperboloïdes.* — La racine moyenne de l'équation en S est $\frac{1}{A}$; d'où l'équation

$$y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)=0$$

ou

$$(22)\qquad \frac{y\sqrt{a^2-b^2}}{b}\pm\frac{z\sqrt{a^2+c^2}}{c}=0.$$

Ils peuvent être définis géométriquement comme ci-dessus.

Il n'y a *pas d'ombilics réels*, dans le cas de l'*hyperboloïde à une nappe* [1]; il y en a *quatre* dans le cas de l'*hyperboloïde à deux nappes*.

554. Foyers. — Aux n^os^ 521 à 527, nous avons donné la définition et étudié géométriquement les propriétés générales des foyers des quadriques. On pourrait reprendre entièrement la question par le calcul, en partant de l'équation (1). Nous conseillons au lecteur de le faire, à titre d'exercice [2]. Nous nous contenterons ici de chercher les équations des focales de la quadrique (1), en nous appuyant sur ce qui a été vu au n° 522.

L'équation tangentielle du faisceau défini par cette quadrique et par le cercle de l'infini est

$$(23)\qquad Au^2+Bv^2+Cw^2-r^2+\lambda(u^2+v^2+w^2)=0.$$

---

[1] C'est évident *a priori*, car tout plan tangent coupe cette surface suivant deux droites réelles (n° 556).

[2] *Cf.* n° 582.

En annulant le discriminant, on voit que les trois focales sont obtenues pour

$$\lambda = -A, \qquad \lambda = -B \qquad \text{et} \qquad \lambda = -C.$$

Faisons, par exemple, $\lambda = -C$; l'équation (23) devient

$$(A - C)u^2 + (B - C)v^2 - r^2 = 0. \tag{24}$$

Elle représente une conique du plan des $xy$, qui a pour équation ponctuelle, dans ce plan,

$$\frac{x^2}{A - C} + \frac{y^2}{B - C} - 1 = 0. \tag{25}$$

Par permutations circulaires, on obtiendrait les deux autres focales et il serait facile de vérifier ensuite, par le calcul, toutes les propriétés établies géométriquement aux n$^{os}$ 522 à 525.

555. Quadriques homofocales. — Les quadriques qui admettent mêmes foyers que la quadrique (1) sont celles du faisceau tangentiel (23). Leur équation ponctuelle est

$$\frac{x^2}{A + \lambda} + \frac{y^2}{B + \lambda} + \frac{z^2}{C + \lambda} - 1 = 0. \tag{26}$$

Sur cette équation, on peut vérifier les propriétés générales établies au n° 525. C'est ainsi que, l'équation (26) étant du troisième degré en $\lambda$, *par tout point* $M(x, y, z)$ *de l'espace passent trois quadriques du faisceau.*

Elles sont d'ailleurs réelles. Supposons, en effet, pour fixer les idées, $A > B > C$. On a les résultats de substitution suivants :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $-A-\varepsilon$ | $-A+\varepsilon$ | $-B-\varepsilon$ | $-B+\varepsilon$ | $-C-\varepsilon$ | $-C+\varepsilon$ | $+\infty$ |
| $-1$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-1$ |

On a donc bien trois racines réelles $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, respectivement comprises entre $-A$ et $-B$, $-B$ et $-C$, $-C$ et $+\infty$, et auxquelles correspondent un hyperboloïde à deux nappes, d'axe transverse $Ox$, un hyperboloïde à une nappe, d'axe non transverse $Oz$ et un ellipsoïde réel.

En procédant comme au n° 536, on peut vérifier que ces surfaces sont deux à deux orthogonales.

On peut aussi prendre les trois nombres $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ comme coordonnées du point M; on obtient ainsi le système des *coordonnées elliptiques* dans l'espace. En identifiant la fraction rationnelle (26) en $\lambda$ avec

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)}{(A + \lambda)(B + \lambda)(C + \lambda)},$$

on obtient, comme au n° 537, les formules

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{(A+\lambda_1)(A+\lambda_2)(A+\lambda_3)}{(B-A)(C-A)}},\\ y &= \sqrt{\frac{(B+\lambda_1)(B+\lambda_2)(B+\lambda_3)}{(A-B)(C-B)}},\\ z &= \sqrt{\frac{(C+\lambda_1)(C+\lambda_2)(C+\lambda_3)}{(A-C)(B-C)}}.\end{aligned}\right.$$

556. Génératrices rectilignes. — L'ellipsoïde et l'hyperboloïde à deux nappes ont leurs génératrices imaginaires, car le premier membre de leur équation comprend trois carrés de même signe (*cf.* n° 448, Remarque II). On peut aussi le voir en remarquant que toutes les sections planes de l'ellipsoïde sont des ellipses; quant à celles de l'hyperboloïde à deux nappes, elles peuvent être des hyperboles; mais les sections par les plans tangents sont toujours du genre ellipse.

*Pour l'hyperboloïde à une nappe*, au contraire, *les génératrices sont réelles*. Pour cette surface, l'équation (1) peut, en effet, se mettre sous la forme (28) et, par suite, sous la forme (27) du n° 446. Développons les calculs :

$$(28)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

ou

$$(29)\qquad \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

D'où les deux systèmes [1] de génératrices :

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{a}-\frac{z}{c} &= u\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c} &= \frac{1}{u}\left(1+\frac{y}{b}\right);\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{a}-\frac{z}{c} &= v\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c} &= \frac{1}{v}\left(1-\frac{y}{b}\right).\end{aligned}\right.$$

---

[1] Ils sont symétriques l'un de l'autre par rapport à O, $Oxy$, $Oyz$, $Ozx$, comme on le voit en changeant $u$ en $-v$, en $\frac{1}{v}$, en $-\frac{1}{v}$, en $v$.

D'après le théorème IV du n° 447, nous savons que ces deux droites se rencontrent, quels que soient $u$ et $v$. Vérifions-le en calculant les coordonnées du point de rencontre.

En retranchant membre à membre l'une ou l'autre des équations (II) de l'équation (I) de même rang, on obtient la même valeur de $y$, à savoir

$$y = b\frac{u-v}{u+v}. \tag{30}$$

Ceci nous prouve déjà que les équations sont compatibles. Portons maintenant la valeur trouvée dans les équations (I) :

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{2uv}{u+v},$$
$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{2}{u+v}.$$

Par addition et soustraction, on en tire $x$ et $z$. On a finalement les formules

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a\,\frac{1+uv}{u+v}, \\ y &= b\,\frac{u-v}{u+v}, \\ z &= c\,\frac{1-uv}{u+v}. \end{aligned}\right.$$

Ce sont les *équations paramétriques de l'hyperboloïde à une nappe rapporté à ses deux systèmes de génératrices rectilignes* (1).

On peut aussi chercher l'équation du plan qui contient les deux génératrices. Elle est à la fois des deux formes suivantes (n° 90) :

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} + \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = u\left(1 - \frac{y}{b}\right) + \frac{\lambda}{u}\left(1 + \frac{y}{b}\right),$$
$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} + \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = v\left(1 - \frac{y}{b}\right) + \frac{\lambda}{v}\left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Les premiers membres étant identiques, les seconds doivent l'être

---

(1) On peut établir des équations analogues pour l'hyperboloïde à deux nappes et pour l'ellipsoïde ; mais, elles sont alors compliquées d'imaginaires. En particulier, on peut rapporter la sphère à ses génératrices isotropes : cela donne lieu à des propriétés très élégantes (*cf.* Exercices proposés nos 25 et 26).

aussi. En égalant les coefficients de $1 - \frac{y}{b}$ et de $1 - \frac{y}{b}$, on obtient la condition unique : $\lambda = uv$. Portant cette valeur dans l'une ou l'autre des équations, on obtient l'équation cherchée

$$(32) \qquad \frac{x}{a}(1 - uv) - \frac{y}{b}(u - v) - \frac{z}{c}(1 - uv) - (u + v) = 0.$$

En comparant avec l'équation (2), on reconnaît l'*équation du plan tangent au point* M ($u$, $v$), dont les coordonnées sont données par les formules (31).

Le point M($u$, $v$) va à l'*infini* pour $v = -u$. Dans ce cas, *les génératrices* (I) et (II) *sont parallèles*. On vérifie aisément qu'elles sont *symétriques par rapport à l'origine*.

L'équation (32) devient

$$(33) \qquad \frac{x}{a}(1 - u^2) + 2\frac{y}{b}u - \frac{z}{c}(1 + u^2) = 0$$

c'est l'équation *plan asymptote*.

## II. — PARABOLOÏDES.

**557.** Forme de l'équation réduite. — L'équation d'un paraboloïde *rapporté à ses plans principaux et à son plan tangent au sommet* est

$$(34) \qquad \frac{y^2}{p} + \varepsilon\frac{z^2}{q} - 2x = 0.$$

$p$ et $q$ désignant deux constantes positives et $\varepsilon$ le nombre $+1$ ou le nombre $-1$, suivant que le paraboloïde est elliptique ou hyperbolique. La forme de la surface a été étudiée aux n$^{os}$ 457 et 458 ; il suffit, dans le cas actuel, de supposer les axes rectangulaires.

**558.** Plans tangents ; normales. — Le plan tangent au point M($x$, $y$, $z$) a pour équation

$$(35) \qquad \frac{Yy}{p} + \varepsilon\frac{Zz}{q} - (X + x) = 0.$$

En identifiant avec le plan (3), on a

$$x = \frac{r}{u}, \qquad y = -p\,\frac{v}{u}, \qquad \varepsilon z = -q\,\frac{w}{u}.$$

Portant dans (34), on obtient l'*équation tangentielle*

$$(36) \qquad pv^2 + \varepsilon q w^2 - 2ru = 0.$$

Elle est satisfaite pour $u = v = w = 0$; on vérifie ainsi que le paraboloïde est tangent au plan de l'infini (n° 468).

Cherchons le *lieu des points d'où l'on peut mener trois plans tangents rectangulaires.* A cet effet, nous écrivons les équations (5); puis, nous multiplions la première par $u$, la seconde par $u'$, la troisième par $u''$ et nous ajoutons; il vient, en tenant compte de (36) et des relations entre les neuf cosinus,

$$(37) \qquad x = -\frac{p + \varepsilon q}{2}.$$

*Le lieu cherché est donc un plan perpendiculaire à l'axe;* on l'appelle *plan orthoptique* ou *plan de Monge*. Dans le cas particulier du paraboloïde équilatère ($p = q$, $\varepsilon = -1$), il se confond avec le plan tangent au sommet.

Les équations de la normale au point M sont

$$(38) \qquad \frac{X - x}{-1} = \frac{p(Y - y)}{y} = \frac{\varepsilon q(Z - z)}{z}.$$

Cherchons les normales issues du point $P(x_0, y_0, z_0)$. En remplaçant, dans les équations ci-dessus, X, Y, Z par $x_0$, $y_0$, $z_0$ et prenant pour inconnue auxiliaire $\lambda$ la valeur commune des trois rapports, on voit que les pieds des normales sont donnés par les formules

$$(39) \qquad x = x_0 + \lambda, \qquad y = \frac{p y_0}{p + \lambda}, \qquad z = \frac{q z_0}{q - \varepsilon\lambda},$$

$\lambda$ étant donné par l'équation du cinquième degré

$$(40) \qquad \frac{p y_0^2}{(p + \lambda)^2} + \frac{\varepsilon q z_0^2}{(q + \varepsilon\lambda)^2} - 2(x_0 + \lambda) = 0.$$

D'où le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Par tout point P de l'espace, on peut mener cinq normales à un paraboloïde, dont une au moins est réelle.*

Si, dans les équations (39), on regarde $\lambda$ comme un paramètre variable, on a les équations paramétriques d'une cubique gauche, qui passe par P et par les points à l'infini sur les axes, l'axe des $x$ étant, en outre, une asymptote. Elle coupe le paraboloïde aux cinq pieds des normales cherchées, le sixième point de rencontre étant le point à l'infini sur O$x$. Elle porte le nom de *cubique aux pieds des normales* ou *cubique de Chasles*.

Le cône qui a pour sommet P et pour directrice cette cubique est du second degré (n° 379); il contient les cinq normales issues de P et la parallèle à O$x$ menée par ce point; il porte le nom de *cône des normales*.

559. Plans cycliques; ombilics. — Les plans cycliques réels sont donnés (n° 480) par

$$(41) \qquad \frac{y^2}{p} + \varepsilon\frac{z^2}{q} - S(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

S désignant la racine moyenne de l'équation en S, dont les trois racines sont $\frac{1}{p}$, $\frac{\varepsilon}{q}$, 0.

Dans le cas du paraboloïde hyperbolique, la racine moyenne est zéro; les plans cycliques sont parallèles aux plans directeurs. Chacun d'eux coupe la surface suivant une droite à l'infini et une droite à distance finie. Une telle section peut être considérée comme un cercle, en ce sens qu'elle est du second degré et passe par les points cycliques. Mais, en réalité, *il n'y a pas de cercles sur le paraboloïde hyperbolique;* ce qui pouvait d'ailleurs être prévu, puisque toutes les sections planes de cette surface sont des paraboles ou des hyperboles (n° 460).

Passons au paraboloïde elliptique. La racine moyenne de l'équation en S est $\frac{1}{p}$, en supposant, pour fixer les idées, $p > q$. Les plans cycliques sont

$$(42) \qquad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - \frac{1}{p}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

ou

$$(43) \qquad z\sqrt{\frac{p}{q} - 1} \pm x = 0.$$

Il leur correspond *deux ombilics*, puisqu'il existe un seul plan tangent parallèle à un plan donné.

560. Sections planes du paraboloïde de révolution. — Les sections planes du paraboloïde de révolution jouissent d'une propriété remarquable que nous allons mettre en évidence.

Prenant l'axe de révolution pour axe des $z$ et le plan tangent au sommet pour plan des $xy$, l'équation du paraboloïde est

$$(44) \qquad x^2 + y^2 = 2pz.$$

Coupons par le plan

$$(45) \qquad ux + vy + wz + r = 0.$$

Nous supposerons le plan non parallèle à $Oz$, soit $w \neq 0$.

En éliminant $z$ entre ces deux équations, nous obtenons l'équation de la projection de la section sur le plan des $xy$ :

$$(46) \qquad x^2 + y^2 + 2p\left(\frac{ux + vy + r}{w}\right) = 0.$$

*Cette projection est donc un cercle* $\Gamma$.

Réciproquement, l'équation d'un cercle quelconque peut être identifiée avec (46), en choisissant convenablement $u$, $v$, $w$, $r$. Donc, *tout cercle du plan des $xy$ est la projection d'une section plane.*

Ces deux propriétés sont, du reste, faciles à établir géométriquement.

En effet, soit P le point à l'infini sur $Oz$. La section du paraboloïde par le plan de l'infini se compose des deux tangentes PI et PJ menées par P au cercle imaginaire de l'infini (nº 479).

Cela posé, le cylindre projetant une section plane quelconque coupe le plan de l'infini suivant PI, PJ (*cf.* Chap. XXIX, Exercice proposé nº 29). Il est donc de révolution autour d'un axe parallèle à $Oz$. Réciproquement, tout cylindre de révolution parallèle à $Oz$ passe par les droites PI, PJ et a, par conséquent, une conique commune avec le paraboloïde; il s'ensuit qu'il coupe celui-ci suivant une deuxième conique (nº 489). C. Q. F. D.

En introduisant le pôle du plan sécant, on établit, entre les cercles du plan des $xy$ et les points de l'espace, une correspondance qui jouit de propriétés fort élégantes (*cf.* Exercice proposé nº 34).

561. Foyers. — Le faisceau tangentiel défini par le paraboloïde (36) et par le cercle de l'infini a pour équation tangentielle

$$(47) \qquad pv^2 + 2qw^2 + 2ur - \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Annulant le discriminant, nous obtenons les $\lambda$ des focales

$$\lambda = -p, \qquad \lambda = 2q.$$

Pour $\lambda = -p$, l'équation (47) devient

$$(48) \qquad -pu^2 + (\varepsilon q - p)w^2 - 2ur = 0,$$

équation tangentielle d'une parabole du plan des $zx$, dont l'équation ponctuelle, dans ce plan, est

$$(49) \qquad z^2 - 2(p - \varepsilon q)\left(x - \frac{p}{2}\right) = 0.$$

En changeant $z$ en $y$ et $p$ en $\varepsilon q$, on a, de même, l'équation de la focale du plan des $xy$

$$(50) \qquad y^2 - 2(\varepsilon q - p)\left(x - \frac{\varepsilon q}{2}\right) = 0.$$

Sur ces équations, il est facile de vérifier les propriétés du n° 526.

L'équation (47) est l'équation tangentielle des *paraboloïdes homofocaux* au paraboloïde proposé. Leur équation ponctuelle s'en déduit,

$$(51) \qquad \frac{y^2}{p+\lambda} + \frac{z^2}{\varepsilon q + \lambda} - 2\left(x + \frac{\lambda}{2}\right) = 0.$$

Par tout point $P(x, y, z)$ passent trois paraboloïdes réels du faisceau, dont les $\lambda$ sont séparés par les deux nombres $-p$ et $-\varepsilon q$. Le premier ($\lambda_1 < -p$) est un paraboloïde elliptique concave vers les $x$ négatifs. Le second ($-p < \lambda_2 < -\varepsilon q$) est un paraboloïde hyperbolique. Le troisième ($\lambda_3 > -\varepsilon q$) est un paraboloïde elliptique concave vers les $x$ positifs.

On peut prendre les nombres $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ pour coordonnées du point P. On obtient le système des *coordonnées paraboliques*, moins usité que celui des coordonnées elliptiques. Il donne lieu aux formules suivantes, que le lecteur établira par une méthode analogue à celle employée au n° 537, et où nous avons remplacé $\varepsilon$ par $+1$ :

$$(52) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{p + q + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{2}, \\ y &= \sqrt{\frac{(\lambda_1 + p)(\lambda_2 + p)(\lambda_3 + p)}{q - p}}, \\ z &= \sqrt{\frac{(\lambda_1 + q)(\lambda_2 + q)(\lambda_3 + q)}{p - q}}. \end{aligned}\right.$$

**562.** GÉNÉRATRICES RECTILIGNES. — Elles ne sont réelles que sur le paraboloïde hyperbolique.

Écrivons l'équation de ce dernier sous la forme

$$(53)\qquad \left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}}\right) = 2x.$$

Les deux systèmes de génératrices ont pour équations respectives

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} &= 2u, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} &= \frac{x}{u}; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} &= 2v, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} &= \frac{x}{v}. \end{aligned}\right.$$

On voit qu'*elles sont respectivement parallèles aux deux plans de directions asymptotiques, lesquels sont appelés, pour cette raison, les plans directeurs*. Lorsque ces plans sont perpendiculaires, le paraboloïde est dit *équilatère*.

Le point de rencontre M de la génératrice $(u)$ et de la génératrice $(v)$ a pour coordonnées

$$(54)\qquad x = 2uv, \qquad y = \sqrt{p}(u + v), \qquad z = \sqrt{q}(u - v).$$

Leur plan, c'est-à-dire le plan tangent en M, a pour équation

$$(55)\qquad x - \frac{y}{\sqrt{p}}(u + v) + \frac{z}{\sqrt{q}}(u - v) + 2uv = 0.$$

Le *plan asymptote* de la génératrice $(u)$ est obtenu pour $v = \infty$, ce qui donne

$$(56)\qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 2u;$$

c'est le plan parallèle au plan directeur du système $(u)$.

# CHAPITRE XXXVII.

## LES CONIQUES CONSIDÉRÉES COMME COURBES UNICURSALES ; RAPPORT ANHARMONIQUE, HOMOGRAPHIE.

563. Équations paramétriques du second degré. — Nous savons (nº 265) que toute courbe du second degré est une courbe unicursale. Si $x$, $y$, $z$ sont les coordonnées homogènes d'un point quelconque, elles peuvent s'exprimer, en fonction du paramètre $t$, sous la forme

(1) $\lambda x = at^2 + 2bt + c, \qquad \lambda y = a't^2 + 2b't + c', \qquad \lambda z = a''t^2 + 2b''t + c''$,

où $\lambda$ désigne le facteur arbitraire de proportionnalité.

Réciproquement, des équations de cette forme définissent toujours une conique, sous la seule condition

(2) $$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

En effet, si nous coupons par la droite

(3) $$ux + vy + wz = 0,$$

nous obtenons l'équation du second degré

(4) $$At^2 + 2Bt + C = 0,$$

en posant

(5) $A = au + a'v + a''w, \qquad B = bu + b'v + b''w, \qquad C = cu + c'v + c''w$.

Il y a donc deux points d'intersection et la courbe est du second degré. Elle ne peut d'ailleurs pas dégénérer, car, si elle comprenait une droite, l'équation (4) serait, pour cette droite, vérifiée identiquement; autrement dit, A, B, C seraient nuls pour des valeurs non

nulles de $u$, $v$, $w$ et, par conséquent, $\Delta$ le serait aussi, contrairement à l'hypothèse (2).

Quand une conique est définie par des équations de la forme (1), il n'y a aucune difficulté à en faire l'étude complète. On peut calculer son équation ponctuelle en éliminant $t$ et $\lambda$ entre les équations (1). On obtient immédiatement son *équation tangentielle*

$$AC - B^2 = 0. \tag{6}$$

en écrivant que l'équation (4) a une racine double.

On a son genre (n° **460**), en la coupant par la droite de l'infini. On peut la construire, en appliquant la méthode générale des n$^{os}$ **242** à **246**. On peut déterminer ses éléments remarquables (centre, foyers, sommets, axes, etc.), soit en se servant de l'équation tangentielle (6), soit par des méthodes directes obtenues en exprimant les propriétés caractéristiques de ces éléments.

Enfin, on peut étudier la conique au point de vue spécial envisagé au n° **267** et découvrir, de la sorte, des propriétés intéressantes. C'est ce que nous allons faire d'une façon sommaire, mais sur des équations réduites.

**564. Équations paramétriques réduites.** — D'après (2), les trois points

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0$$

ne sont pas en ligne droite. Nous pouvons donc les prendre pour sommets du triangle de référence. Cela se traduit par les conditions

$$a' = a'' = b = b'' = c = c' = 0.$$

En choisissant convenablement le point unitaire, nous pouvons, en outre, supposer

$$a = b' = c'' = 1,$$

car aucun de ces coefficients ne peut être nul, d'après (2). Les équations (1) prennent alors la forme très simple

$$\lambda x = t^2, \qquad \lambda y = 2t, \qquad \lambda z = 1. \tag{7}$$

Nous les appellerons *équations paramétriques réduites*.

L'équation (6) devient

$$uw - v^2 = 0, \tag{8}$$

et l'équation ponctuelle s'écrit

$$y^2 - 4zx = 0. \tag{9}$$

Toutes deux montrent que la conique est tangente en A à BA et en C à BC (n° 507).

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que les points A et C peuvent être considérés comme deux points quelconques de la conique. Ils sont, en effet, caractérisés, dans la représentation paramétrique dont nous sommes partis, par les conditions $t_A = \infty$, $t_C = 0$. Or, si nous voulons prendre, pour points A et C, deux points quelconques A′ et C′ de paramètres actuels $t_1$ et $t_2$, il suffit de faire sur $t$ la substitution homographique

$$t' = \frac{t - t_2}{t - t_1}, \tag{10}$$

qui ne change pas la forme générale des équations (1) et donne $t' = \infty$, pour $t = t_1$ et $t' = 0$, pour $t = t_2$.

Avec les équations réduites (7), l'équation (4) devient

$$ut^2 + 2vt + w = 0.$$

Si l'on introduit les fonctions symétriques élémentaires des racines

$$t_1 + t_2 = -\frac{2v}{u}, \qquad t_1 t_2 = \frac{w}{u},$$

on voit que *la corde* $M_1M_2$ *a pour équation*

$$x - \frac{t_1 + t_2}{2} y + t_1 t_2 z = 0. \tag{11}$$

*La tangente en* M s'obtient en faisant $t_1 = t_2 = t$ :

$$x - ty + t^2 z = 0. \tag{12}$$

565. Rapport anharmonique. — *Nous appellerons rapport anharmonique de quatre points* $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ *de la conique le rapport anharmonique* $(t_1 t_2 t_3 t_4)$ *de leurs paramètres.*

Cette définition est indépendante du choix de la représentation paramétrique, pourvu qu'elle soit rationnelle et propre (n° 264), car on passe de l'une à l'autre par une substitution homographique telle que (10), ce qui ne change pas, comme on sait, le rapport anharmonique (t. I, n° 322).

Au reste, il est facile d'en donner une interprétation géométrique. Joignons un point M quelconque de la conique aux quatre points $M_i$.

La droite $MM_i$ a pour équation, d'après (11),

$$(13) \qquad x - \frac{ty}{2} + t_i\left(tz - \frac{y}{2}\right) = 0.$$

Elle est linéaire en $t_i$; donc, *le rapport anharmonique du faisceau* $M(M_1 M_2 M_3 M_4)$ *est égal, quel que soit* M, *au rapport anharmonique* $(t_1 t_2 t_3 t_4)$, *c'est-à-dire au rapport anharmonique des quatre points* $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$.

Le même rapport est aussi appelé *rapport anharmonique des quatre tangentes* $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$, aux points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$. On peut en donner une interprétation géométrique corrélative de la précédente, en *considérant les points de rencontre* $P_i$ *de ces tangentes avec une tangente* T *quelconque*. D'après l'équation (12), la droite $AP_i$ a pour équation, après suppression du facteur $t - t_i$,

$$y - (t + t_i)z = 0.$$

Elle est linéaire en $t_i$; donc

$$(t_1 t_2 t_3 t_4) = A(P_1 P_2 P_3 P_4) = (P_1 P_2 P_3 P_4).$$

566. Divisions homographiques. — Nous dirons que *deux points variables* M *et* M' *décrivent, sur la conique, des divisions homographiques, si leurs paramètres* $t$ *et* $t'$ *sont liés par une relation homographique*

$$(14) \qquad \alpha t t' + \beta t + \gamma t' + \delta = 0.$$

Cette définition est indépendante du choix de la représentation paramétrique, car la relation (14) ne change pas de forme, quand on fait une même substitution homographique sur $t$ et $t'$.

On dit aussi que *les tangentes* T *et* T' *en* M *et* M' *sont en correspondance homographique*.

Les propriétés établies aux n^os 136 et suivants s'appliquent encore à ces nouvelles définitions.

*Le rapport anharmonique de quatre points* M (*ou tangentes* T) *est égal au rapport anharmonique des quatre points* M' (*ou tangentes* T') *homologues.*

*Il existe deux points* (*ou tangentes*) *doubles dont les* $t$ *sont racines de l'équation*

$$(15) \qquad \alpha t^2 + (\beta + \gamma)t + \delta = 0.$$

Prenons ces points doubles pour points A et C. Autrement dit, faisons sur $t$ et $t'$ une substitution homographique telle que les racines de (15) deviennent $\infty$ et o. La relation (14) prend alors la forme [1]

$$(16) \qquad t' = kt.$$

Au théorème II du n° 139, correspond le suivant :

THÉORÈME I. — *Le rapport anharmonique* (ACMM') *est constant.*

Ce rapport est d'ailleurs égal à $(\infty, 0, t, kt) = k$.
On a évidemment le même théorème sur les tangentes.

THÉORÈME II. — *Étant donnés deux points quelconques* $M_1$, $M_2$ *et les deux points homologues* $M'_1$, $M'_2$, *les deux cordes* $M_1M'_2$ *et* $M_2M'_1$ *se coupent sur la corde des points doubles* AC.

En effet, les équations de ces cordes sont respectivement, d'après (11) et (16),

$$x - \frac{t_1 + kt_2}{2} y + kt_1t_2z = 0,$$
$$x - \frac{t_2 + kt_1}{2} y + kt_2t_1z = 0.$$

En les retranchant, on obtient $y = 0$, c'est-à-dire l'équation de AC. Cela démontre le théorème.

THÉORÈME III. — *Les droites* BM *et* BM' *décrivent deux faisceaux homographiques de rayons doubles* BA *et* BC.

En effet, la droite BM a pour équation

$$x = t^2 z.$$

D'autre part, on a $t'^2 = k^2t^2$, relation homographique entre $t^2$ et $t'^2$, dont les valeurs doubles sont $\infty$ et o. Cela démontre la proposition.

THÉORÈME IV. — *La droite* MM' *enveloppe une conique bitangente à la proposée aux points doubles* A *et* C.

En effet, d'après (11) et (16), l'équation de MM' est

$$(17) \qquad x - t\frac{1+k}{2} y + kt^2 z = 0.$$

---

[1] Ceci est en défaut si les points doubles sont confondus. Dans ce cas, si l'on prend le point double pour point A, la relation (14) devient $t' = t + k$. Nous laissons au lecteur le soin d'étudier à part ce cas particulier, qu'on peut d'ailleurs considérer comme cas limite du cas général, en supposant que les points A et C se rapprochent indéfiniment.

Son enveloppe a pour équation

$$\frac{(1+k)^2}{4}y^2 - 4kzx = 0.$$

C'est bien une conique tangente en A à BA et en C à BC.

567. Divisions en involution. — On dit que les divisions M et M' sont en involution, quand la relation (14) est involutive, c'est-à-dire symétrique par rapport à $t$, $t'$. Pour la relation (16), ceci se traduit par la condition $k = -1$.

Dans ce cas, l'équation (17) se réduit à

$$x - t^2 z = 0.$$

Donc :

Théorème V. — *Si les divisions* M *et* M' *sont en involution, la corde* MM' *passe par un point fixe, qui est le pôle* B *de la corde des points doubles.*

On dit que les points M et M' sont en *correspondance biquadratique et involutive*, si l'on a, entre $t$ et $t'$, une relation biquadratique et symétrique, c'est-à-dire de la forme

(18) $$A t^2 t'^2 + B t t'(t+t') + C(t^2+t'^2) + D t t' + E(t+t') + F = 0.$$

En introduisant les fonctions symétriques élémentaires $t + t' = p$ et $tt' = q$, elle s'écrit

(19) $$A q^2 + B qp + C p^2 + D q + E p + F = 0,$$

en changeant D en D − 2C.

D'autre part, d'après (11), l'équation de la corde MM' est

(20) $$x - \frac{p}{2}y + qz = 0.$$

Si $u$, $v$, $w$ désignent ses coordonnées homogènes, on a

$$p = -2\frac{v}{u}, \qquad q = \frac{w}{u}.$$

En portant dans (19), nous obtenons l'équation tangentielle de l'enveloppe

$$A w^2 - 2B vw + 4C v^2 + D uw - 2E uv + F u^2 = 0.$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème VI. — *Toute corde dont les extrémités sont en correspondance biquadratique et involutive enveloppe une conique.*

Si, dans (18), on fait $t = t'$, on obtient une équation du quatrième degré.

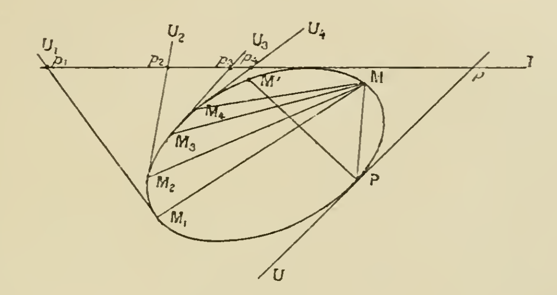
Il y a donc *quatre points doubles.* Les tangentes en ces points à la conique proposée sont évidemment des tangentes particulières de l'enveloppe. Ce sont les tangentes communes aux deux coniques.

Les théorèmes I à VI ont leurs corrélatifs; nous laissons au lecteur le soin de les énoncer et de les démontrer.

568. Théorie géométrique. — On peut exposer la théorie du rapport anharmonique et des divisions homographiques sur les coniques, d'une manière entièrement géométrique.

Considérons les quatre points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ et deux autres points M et M' (*fig.* 63), tous situés sur la conique. Si l'on joint M

Fig. 63.




et M' à un point variable P de la conique, les droites MP et M'P décrivent deux faisceaux homographiques. Dès lors, si l'on amène P successivement en $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ et si l'on applique le théorème fondamental du n° 142, on a

$$M(M_1 M_2 M_3 M_4) = M'(M_1 M_2 M_3 M_4).$$

Il résulte de là que le rapport anharmonique $M(M_1 M_2 M_3 M_4)$ reste constant, quelle que soit la position de M sur la conique; il ne dépend que des quatre points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$. On l'appelle *rapport anharmonique de ces quatre points.*

Considérons maintenant une tangente T quelconque et la tangente U au point variable P. Elles se rencontrent au point $p$ (*fig.* 63). Il est facile de voir qu'il existe une correspondance homographique entre ce point et la droite MP (n° 145). D'où il résulte que le rapport anharmonique des quatre points de rencontre de T avec les tangentes $U_1$, $U_2$, $U_3$, $U_4$ aux points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ est égal au rapport anharmonique du faisceau $M(M_1 M_2 M_3 M_4)$, c'est-à-dire des quatre

points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$. Il est donc constant, quand on fait varier T. On l'appelle *rapport anharmonique des quatre tangentes; il est égal au rapport anharmonique des quatre points de contact.*

Considérons maintenant deux faisceaux homographiques PM et PM′, ayant leur sommet P sur la conique ([1]). Ils découpent sur cette dernière *des divisions* M *et* M′ *dites homographiques.*

D'après le théorème du n° 142 et d'après les définitions ci-dessus, *le rapport anharmonique de quatre points* M *est égal au rapport anharmonique des quatre points homologues* M′. Cette propriété caractéristique peut aussi servir de définition et montre que la définition précédente est indépendante du choix du point P.

L'homographie est déterminée par le choix de *trois couples de points homologues.*

Il y a *deux points doubles* E, F, situés sur les rayons doubles des faisceaux PM, PM′.

D'après le théorème II du n° 139, on a

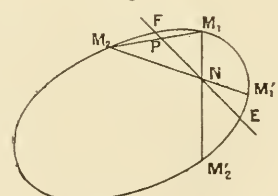
$$(EFMM') = \text{const.} \tag{21}$$

Théorème. — *Étant donnés deux couples de points homologues* $(M_1, M'_1)$ *et* $(M_2, M'_2)$ *les cordes* $M_1M'_2$ *et* $M_2M'_1$ *se coupent sur la ligne des points doubles* EF.

En effet, soient N, N′, P les points de rencontre respectifs de $M_1M'_2$, $M_2M'_1$, $M_1M_2$ avec EF (*fig.* 64). D'après (21), on a

$$(EFM_1M'_1) = (EFM_2M'_2);$$

Fig. 64.




d'où

$$M_2(EFM_1M'_1) = M_1(EFM_2M'_2)$$

et enfin, en coupant les deux faisceaux par la sécante EF,

$$(EFPN') = (EFPN).$$

([1]) Rien n'empêche de prendre des sommets différents P et P′ pour les deux faisceaux.

Ceci prouve que les points N et N′ sont confondus et, par conséquent, que $M_1M'_2$ et $M_2M'_1$ se coupent sur EF (¹). C. Q. F. D.

Application : Théorème de Pascal. — *Soit un hexagone inscrit dans une conique, dont les sommets sont numérotés* 1, 2, 3, 4, 5, 6. *Les côtés opposés* (12, 45), (23, 56), (34, 61) *se coupent en trois points* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *en ligne droite.*

En effet, considérons, sur la conique, l'homographie déterminée par les trois couples de points homologues (1, 4), (5, 2), (3, 6) et appliquons-lui le théorème ci-dessus. Le point de rencontre $\alpha$ des cordes 12, 45 se trouve sur la ligne des points doubles. Il en est de même des points $\beta$ et $\gamma$. Ces trois points sont donc bien en ligne droite. C. Q. F. D.

Toutes les propriétés ci-dessus ont leurs corrélatives, que nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et de démontrer. Bornons-nous à énoncer le théorème corrélatif du théorème de Pascal :

Théorème de Brianchon. — *Soit un hexagone circonscrit, dont les sommets consécutifs sont numérotés* 1, 2, 3, 4, 5, 6. *Les trois droites* 14, 25, 36 *qui joignent les sommets opposés sont concourantes.*

Il nous reste à chercher l'enveloppe de la corde MM′, dont les extrémités décrivent des divisions homographiques sur la conique. On pourrait étudier la question directement et démontrer, par exemple, que les points de rencontre de MM′ avec les tangentes aux points doubles décrivent, sur ces tangentes, des divisions homographiques. On serait alors ramené au théorème II du n° 147. Mais, la solution est loin d'être évidente. On arrive, au contraire, immédiatement au résultat, en faisant une transformation homographique envoyant E et F aux points cycliques. La conique devient un cercle. La corde MM′ est vue sous un angle constant d'un point P quelconque de ce cercle, ainsi qu'il résulte de la formule (21) et de la formule de Laguerre (n° 164). Elle a donc une longueur constante et enveloppe un cercle concentrique au cercle proposé. En revenant à la figure primitive, on voit que *l'enveloppe de* MM′ *est une conique bitangente à la proposée aux points doubles* E, F.

Dans le cas particulier où les divisions sont en involution, l'angle constant ci-dessus est droit et la corde MM′ passe par le centre du cercle. En revenant à la figure primitive, on voit que :

*Si les divisions* M *et* M′ *sont en involution, la corde* MM′ *passe par un point fixe, pôle de la ligne des points doubles.*

---

(¹) *Autre démonstration.* — Si l'on fait varier $M_2$, $M'_2$, en laissant fixes $M_1$, $M'_1$, le point de rencontre Q de $M_1M'_2$ et de $M'_1M_2$ décrit une droite D, car les faisceaux $M_1M'_2$ et $M'_1M_2$ sont homographiques et la ligne des sommets $M_1M'_1$ se correspond à elle-même. D'autre part, E et F sont des positions particulières de Q ; donc la droite D n'est autre que EF et le théorème est démontré.

Ceci est du reste facile à démontrer directement. Soit P le point de rencontre de deux cordes particulières $M_1M'_1$ et $M_2M'_2$. Si l'on mène par ce point une sécante variable $P\lambda$, elle rencontre la conique en deux points N et N', qui décrivent deux divisions en involution. Mais, cette involution a en commun avec la proposée deux couples de points homologues $M_1$, $M'_1$ et $M_2$, $M'_2$. Elle coïncide donc avec elle, ce qui démontre le théorème.

Citons l'application suivante :

Théorème de Frégier. — *Les cordes d'une conique vues d'un point fixe* Q *de cette conique sous un angle droit passent par un point fixe* P.

Ce point P est sur la normale en Q, car cette normale est une des cordes de l'énoncé. On l'appelle *le point de Frégier* relatif au point Q.

# CHAPITRE XXXVIII.

## COURBES ET SURFACES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ.

569. Propriétés générales des cubiques planes. — Le nombre des coefficients d'un polynome du troisième degré étant égal à 10, la cubique plane la plus générale dépend de 9 paramètres. *Une cubique plane est donc déterminée par* 9 *points*, à condition toutefois que le déterminant principal dont dépend la recherche des coefficients soit du 9[e] ordre, ce qui se traduit par certaines inégalités entre les coordonnées des 9 points.

Soient maintenant deux cubiques

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0. \tag{1}$$

Elles se coupent en 9 points. Ces 9 points ne determinent pas une cubique; ils appartiennent, au contraire, à tout le *faisceau*

$$f_1 + \lambda f_2 = 0, \tag{2}$$

où $\lambda$ désigne un paramètre arbitraire.

*Les cubiques qui passent par* 8 *points donnés* dépendent linéairement d'un paramètre arbitraire: elles constituent un faisceau de la forme (2), $f_1$ et $f_2$ désignant deux quelconques d'entre elles ([1]); elles *passent donc par un* 9[e] *point fixe*, qui est le 9[e] point de rencontre de $f_1$ et de $f_2$. On peut déduire de cette simple remarque un certain nombre de propriétés élégantes des cubiques planes.

Soit la cubique plane (C). Coupons-la par une conique quelconque (Γ). Il y a 6 points d'intersection : 1, 2, 3, 4, 5, 6. Les sécantes 12, 34, 56 rencontrent à nouveau la cubique aux points respectifs 7, 8, 9. Je dis que *ces trois points sont en ligne droite*.

En effet, considérons la cubique (C′) constituée par nos trois sécantes et la cubique (C″) constituée par la conique (Γ) et la droite 78. Ces trois cubiques ont en commun les points 1, 2, ..., 8. Elles ont donc un 9[e] point commun, qui n'est autre que le point 9, puisque celui-ci appartient à *(C)* et à *(C′)*.

([1]) Ceci peut être en défaut dans certains cas particuliers, qui seraient mis en évidence par la discussion complète du système linéaire dont dépendent les coefficients de la cubique. Nous ne nous occuperons pas, dans tout ce qui va suivre, des difficultés de ce genre.

Nous voyons donc que (C'') passe par 9. Comme (Γ) ne peut y passer, c'est nécessairement la droite 78 et la proposition est démontrée.

Comme conique (Γ), on peut prendre deux droites. Ces deux droites peuvent être supposées confondues; on a alors la propriété suivante :

*Étant donnés trois points* M, N, P *en ligne droite, les tangentes en ces points rencontrent à nouveau la cubique en trois nouveaux points* M', N', P', *qui sont également en ligne droite.*

Supposons enfin que deux des trois points précédents, par exemple M et N, soient des points d'inflexion. La tangente en chacun d'eux coupe la courbe en trois points confondus. Il s'ensuit que M' se confond avec M, N' avec N, M'N' avec MN, donc P' avec P. Autrement dit, le point P est aussi un point d'inflexion. D'où la proposition suivante :

*La droite qui joint deux points d'inflexion d'une cubique la coupe en un troisième point d'inflexion.*

D'après la formule de Plücker (n° 222), une cubique possède, en général, 9 *points d'inflexion*. Ces 9 points sont tels que la droite qui joint deux quelconques d'entre eux en contient un troisième et un seulement. Une telle configuration ne peut être obtenue avec des points réels ([1]). Donc, quelle que soit la cubique, les 9 points d'inflexion ne sauraient être tous réels. Si la cubique est réelle, elle a seulement trois points d'inflexion réels ([2]).

**570. Cubiques circulaires à point double.** — Une cubique C est circulaire, si *elle passe par les points cycliques*. Nous considérerons seulement ici celles qui admettent, en outre, un point double ([3]).

Prenons ce point double pour origine. Prenons l'axe $Oy$ parallèle à la direction asymptotique, nécessairement réelle, autre que les directions isotropes. L'axe $Ox$ sera, bien entendu, perpendiculaire à $Oy$.

L'équation de la cubique C est alors de la forme

$$x(x^2+y^2)+Ax^2-Bxy-Cy^2=0. \tag{3}$$

Son équation polaire est

$$\rho=-\frac{A\cos^2\omega+B\sin\omega\cos\omega+C\sin^2\omega}{\cos\omega} \tag{4}$$

---

([1]) *Cf.* Exercice proposé n° 5 du Chapitre IX.

([2]) *Cf.* Exercice proposé n° 4 du présent Chapitre.

([3]) Pour les cubiques circulaires quelconques, *voir* Exercice proposé n° 12.

ou, en remplaçant $\sin^2\omega$ par $1 - \cos^2\omega$,

$$(5) \qquad \rho = -\frac{C}{\cos\omega} + (C - A)\cos\omega - B\sin\omega.$$

Cette équation peut s'interpréter très simplement, si l'on observe que le second membre se compose de deux parties qui, égalées séparément au premier, représentent une droite et un cercle.

D'une façon plus précise, considérons le cercle $\Gamma$ défini par l'équation polaire

$$(6) \qquad \rho_1 = (A - C)\cos\omega + B\sin\omega$$

ou par l'équation cartésienne

$$(7) \qquad x^2 + y^2 + (C - A)x - By = 0$$

et la droite $\Delta$ définie par l'équation polaire

$$(8) \qquad \rho_2 = -\frac{C}{\cos\omega}$$

ou par l'équation cartérienne

$$(9) \qquad x + C = 0$$

et qui n'est autre que l'asymptote de la cubique (n° 237).

L'équation (5) s'écrit

$$\rho = \rho_2 - \rho_1 = \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = \overline{M_1M_2},$$

en appelant $M_1$ et $M_2$ les points de rencontre du rayon vecteur avec $\Gamma$ et $\Delta$ respectivement. On a donc le mode de génération suivant de la cubique :

*Menons, par le point* O, *une droite variable* $O\lambda$ (*fig.* 65). *Elle coupe le cercle* $\Gamma$ *en* $M_1$, *la droite* $\Delta$ *en* $M_2$. *Portons, sur* $O\lambda$, $\overline{OM} = \overline{M_1M_2}$. *La cubique est le lieu du point* M, *quand* $O\lambda$ *varie.*

La droite $\Delta$ et le cercle $\Gamma$ sont évidemment une droite quelconque parallèle à $Oy$ et un cercle quelconque passant par O, si l'on donne des valeurs quelconques aux coefficients A, B, C. Le mode de génération ci-dessus conduit donc toujours à une cubique circulaire à point double, quels que soient le cercle $\Gamma$ et la droite $\Delta$.

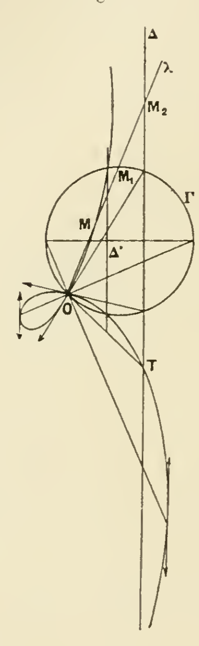
Les tangentes au point double ont pour équation quadratique

(n° 199)

$$(10) \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0.$$

On arrive à la même équation, en éliminant la variable d'homogénéité entre (7) et (9). Donc (n° 78), *les tangentes au point double*

Fig. 65.




*sont les droites joignant* O *aux deux points de rencontre de* Γ *et de* Δ. Ceci est d'ailleurs évident d'après le mode de génération ci-dessus, car M vient en O quand $M_1M_2 = 0$, c'est-à-dire quand Oλ coupe Γ et Δ au même point.

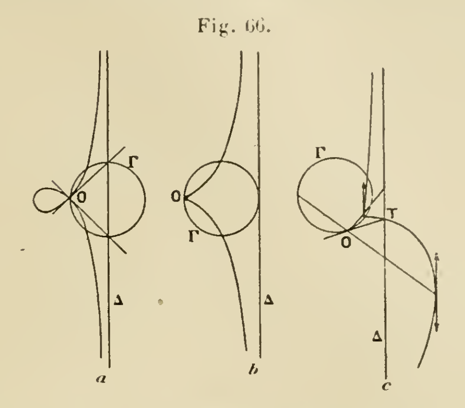
Les tangentes sont rectangulaires, quand Δ passe par le centre de Γ. La cubique est alors appelée *strophoïde*. Elles sont confondues, si Δ est tangente à Γ. Le point O est alors un point de rebroussement et la cubique porte le nom de *cissoïde*.

Lorsque le point O est sur le diamètre de Γ perpendiculaire à Δ, ce diamètre est axe de symétrie. La strophoïde et la cissoïde sont alors appelées *strophoïde et cissoïde droites* (*fig.* 66, *a* et *b*).

*Le point de rencontre de la cubique avec son asymptote* est le

point de rencontre T de cette dernière avec la tangente en O à Γ. Cela peut se voir par le calcul ou bien, géométriquement, en remarquant

Fig. 66.




que, si M vient sur Δ, on a $\overline{OM} = \overline{OM_2} = \overline{M_1 M_2}$; donc, $M_1$ vient en O; autrement dit, Oλ est tangente en O à Γ.

Lorsque $Ox$ est axe de symétrie, OT est parallèle à Δ, T est à l'infini.

*Les points de rencontre de la cubique avec le cercle* Γ sont à l'intersection de ce dernier avec la droite Δ' parallèle à Δ et équidistante de O et de Δ. Cela encore est facile à vérifier analytiquement ou bien géométriquement, en partant de $\overline{OM_1} = \overline{M_1 M_2}$.

Ajoutons enfin que la cubique possède *deux points où la tangente est parallèle à* Δ; ils sont obtenus en prenant $M_1$ successivement aux deux extrémités du diamètre de Γ perpendiculaire à Δ. On s'en rend aisément compte, en assimilant le cercle à sa tangente au voisinage du point $M_1$ considéré. On peut aussi le vérifier par le calcul.

Tous les renseignements qui précèdent suffisent amplement pour donner une idée précise des *différentes formes que peut affecter la courbe*. On peut, au surplus, la construire, par les procédés classiques, soit au moyen de l'équation (3), soit au moyen de l'équation (5). On peut enfin la construire par points au moyen du cercle Γ et de la droite Δ. Les figures 65 et 66 indiquent les formes principales qu'on peut obtenir, suivant la position relative de Γ, Δ, O.

571. Quartiques bicirculaires. — Parmi les courbes planes du quatrième degré, nous nous bornerons à étudier celles qui *admettent les points cycliques*

*pour points doubles* et qui portent, pour cette raison, le nom de *quartiques bicirculaires*. On les appelle aussi, en même temps que les cubiques circulaires, des *cycliques*.

Leur équation générale est de la forme [1]

$$(x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)(ax+by)+f(x,y)=0, \qquad (11)$$

$f(x, y)$ désignant un polynome du second degré quelconque.

On peut la simplifier un peu par un choix convenable des axes de coordonnées.

Transportons d'abord l'origine au point $\left(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}\right)$; les termes du troisième degré disparaissent. Faisons ensuite tourner les axes, de manière à les rendre parallèles aux directions principales de la conique $f=0$; nous faisons disparaître le terme en $xy$. Nous obtenons finalement l'*équation réduite :*

$$(x^2+y^2)^2+Ax^2+By^2+2Cx+2Dy+E=0. \qquad (12)$$

572. *Tout cercle* C *coupe la quartique suivant quatre points à distance finie*, car l'intersection totale, qui se compose de huit points, comprend les points cycliques, dont chacun compte pour deux, puisque ce sont des points doubles.

D'ailleurs, soit

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0 \qquad (13)$$

l'équation du cercle. Posons, pour abréger l'écriture,

$$P\equiv 2\alpha x+2\beta y-\gamma. \qquad (14)$$

Si nous remplaçons, dans (12), $x^2+y^2$ par P, nous obtenons l'équation du second degré

$$P^2+Ax^2+By^2+2Cx+2Dy+E=0, \qquad (15)$$

à laquelle doivent évidemment satisfaire les points d'intersection situés à distance finie. Ces points peuvent donc être considérés comme définis par l'intersection du cercle C avec la conique Γ représentée par l'équation (15). Ils sont donc bien au nombre de quatre.

573. On est conduit à des propriétés intéressantes des quartiques bicirculaires, en étudiant les *cercles* qui leur sont *bitangents*.

Pour que le cercle C ci-dessus soit bitangent à la quartique, il faut et il

---

[1] On le voit en exprimant que l'équation se réduit au second degré, quand on y suppose $x \pm yi$ constants; ou bien en écrivant que les trois dérivées partielles s'annulent pour les points cycliques (*cf.* Chap. XV, Exercice proposé n° 6).

suffit que les quatre points d'intersection soient deux à deux confondus et, par conséquent, que le cercle C soit bitangent à la conique $\Gamma$ (¹). Pour cela, nous savons qu'il faut et suffit que le faisceau (C, $\Gamma$) comprenne une droite double (n° 483, V). Nous allons donc écrire que, pour une valeur convenable de $\lambda$, l'équation

$$(16)\qquad P^2 + Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E + \lambda(x^2+y^2-P) = 0$$

représente une droite double, c'est-à-dire possède une ligne de points doubles (n° 431). Les trois équations du premier degré en $x$, $y$,

$$(17)\qquad 2P\alpha + Ax + C + \lambda(x-\alpha) = 0,$$

$$(18)\qquad 2P\beta + By + D + \lambda(y-\beta) = 0,$$

$$(19)\qquad -P\gamma + Cx + Dy + E + \lambda\frac{\gamma - P}{2} = 0,$$

doivent se réduire à une seule. Ou bien encore, si l'on introduit la variable auxiliaire P, les quatre équations (14), (17), (18), (19), linéaires en $x$, $y$, P, doivent se réduire à deux.

Or, si l'on suppose $\lambda \neq -A$ et de $-B$ (²), on peut tirer $x$ et $y$ de (17) et (18) respectivement :

$$(20)\qquad x = \frac{\lambda\alpha - C - 2P\alpha}{A+\lambda}, \qquad y = \frac{\lambda\beta - D - 2P\beta}{B+\lambda}.$$

En portant dans (19) et (14), on doit obtenir deux équations satisfaites quel que soit P : cela donne les quatre conditions :

$$(21)\qquad \gamma + \frac{2C\alpha}{A+\lambda} + \frac{2D\beta}{B+\lambda} + \frac{\lambda}{2} = 0.$$

$$(22)\qquad \frac{C(\lambda\alpha - C)}{A+\lambda} + \frac{D(\lambda\beta - D)}{B+\lambda} + E + \lambda\frac{\gamma}{2} = 0.$$

$$(23)\qquad 1 + \frac{4\alpha^2}{A+\lambda} + \frac{4\beta^2}{B+\lambda} = 0.$$

$$(24)\qquad \frac{2\alpha(\lambda\alpha - C)}{A+\lambda} + \frac{2\beta(\lambda\beta - D)}{B+\lambda} - \gamma = 0.$$

Les inconnues sont $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\lambda$. Comme nous avons quatre équations pour les déterminer, il semble, au premier abord, qu'il n'y ait qu'un nombre limité de cercles bitangents. Mais examinons nos équations de plus près et tâchons de les résoudre.

---

(¹) Il est d'ailleurs facile de vérifier que si le cercle C et la quartique sont tangents en M($x$, $y$), il en est de même de C et $\Gamma$ et réciproquement.

(²) Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les hypothèses contraires conduisent à une impossibilité, si les coefficients de la quartique sont quelconques.

Nous pouvons d'abord éliminer facilement $\gamma$, en le tirant, par exemple, de (21) et portant dans (22) et (24); nous obtenons ainsi l'équation

$$(25) \qquad \frac{C^2}{A+\lambda} + \frac{D^2}{B+\lambda} - E + \frac{\lambda^2}{4} = 0,$$

puis l'équation (23). Nous voyons donc que nos quatre équations ne sont pas distinctes et se réduisent à trois, qui sont, par exemple, (25), (23), (21).

De plus, dans ces dernières, les inconnues se séparent d'elles-mêmes et l'on aperçoit immédiatement la solution générale :

On détermine $\lambda$ par l'équation du quatrième degré (25). Puis, on choisit arbitrairement $\alpha$, $\beta$ satisfaisant à (23). Enfin, $\gamma$ est donné par (21). Ceci peut s'interpréter géométriquement.

D'abord, si, dans (23), on regarde $\lambda$ comme constant et $\alpha$, $\beta$ comme les coordonnées courantes, cette équation représente une conique $D_\lambda$. Lorsqu'on a choisi la racine $\lambda$ de (25), le centre I de C peut être pris arbitrairement sur cette conique.

Ce centre étant choisi, le cercle est déterminé par $\gamma$, qu'on tire de (21). Or, l'équation (21) est une relation linéaire entre $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Tous les cercles qui la vérifient sont donc orthogonaux à un cercle fixe $\Gamma_\lambda$ (n° 170), dont l'équation est

$$(26) \qquad x^2 + y^2 + \frac{2Cx}{A+\lambda} + \frac{2Dy}{B+\lambda} + \frac{\lambda}{2} = 0.$$

Nous avons finalement la proposition suivante :

Théorème. — *Il y a quatre familles de cercles C bitangents, qui correspondent aux quatre racines de l'équation (25) en $\lambda$. Les cercles de chaque famille ont leurs centres sur la conique $D_\lambda$, appelée déférente et sont orthogonaux au cercle fixe $\Gamma_\lambda$, appelé cercle directeur.*

Lorsque $\lambda$ varie, l'équation (23) représente un faisceau de coniques homofocales (n° 536). Donc, *les quatre déférentes sont homofocales.*

Je dis que *chaque cercle directeur est orthogonal aux trois autres.* En effet, la condition d'orthogonalité des cercles $\Gamma_{\lambda_1}$ et $\Gamma_{\lambda_2}$ est (n° 170)

$$\frac{4C^2}{(A+\lambda_1)(A+\lambda_2)} + \frac{4D^2}{(B+\lambda_1)(B+\lambda_2)} = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Elle est bien vérifiée par les racines $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de (25), comme on le voit en remplaçant successivement, dans cette équation, $\lambda$ par $\lambda_1$ et $\lambda_2$, puis retranchant membre à membre et divisant par $\lambda_1 - \lambda_2$ [1].

**574.** Si l'on se reporte au n° 420, on voit qu'*une quartique bicirculaire*

[1] *Cf.* n° 536.

*est anallagmatique de quatre manières différentes.* Les quatre cercles d'anallagmatie sont les quatre cercles directeurs $\Gamma$.

*Réciproquement,* toute courbe anallagmatique dont la déférente est une conique à centre est une quartique bicirculaire (¹).

575. Il est aisé de trouver les foyers de la quartique. Il suffit, en effet, de chercher les cercles C dont le rayon est nul (n° 514). Pour cela, il suffit de prendre, dans chaque famille, les points d'intersection de la déférente et du cercle directeur. Donc, *toute quartique bicirculaire possède* 16 *foyers, qui sont les points de rencontre des quatre déférentes avec les cercles directeurs correspondants.*

576. Quartiques bicirculaires a point double. — Si la quartique a un point double P, les cercles passant par P et tangents à la quartique en un point variable M doivent être considérés comme bitangents. Donc, un des cercles directeurs se réduit au point P.

Réciproquement, si un cercle directeur se réduit au point P, les cercles bitangents correspondants passent tous par ce point; leur enveloppe admet P pour point double, les tangentes en ce point étant perpendiculaires aux tangentes à la déférente issues de P (n° 277 et Chap. XIII, Exercice résolu n° 2).

Donc, *pour que la quartique ait un point double, il faut et il suffit qu'un cercle directeur ait son rayon nul.*

La condition pour que le cercle $\Gamma_\lambda$, représenté par l'équation (26), ait son rayon nul est

$$\frac{C^2}{(A+\lambda)^2}+\frac{D^2}{(B+\lambda)^2}-\frac{\lambda}{2}=0.$$

Or, le premier membre n'est autre que la dérivée de (25). Donc, *pour que la quartique ait un point double, il faut et il suffit que son équation en* $\lambda$ *ait une racine double; le cercle directeur correspondant à cette racine se réduit au point double; la quartique est homothétique, dans le rapport* 2, *de la podaire de la déférente par rapport à ce point* (n° 277).

Aux deux autres racines correspondent *deux familles de cercles véritablement bitangents.* Les cercles directeurs correspondants passent par le point double P, puisqu'ils sont orthogonaux au cercle de rayon nul de centre P (n° 573). Il en est de même des déférentes, dont *chacune est tangente en* P *au cercle directeur correspondant*, la tangente commune étant bissectrice des tangentes à la quartique, ainsi qu'on le voit en réduisant, au voisinage du point P, la quartique à ces tangentes.

577. Si nous prenons le point double pour origine, l'équation de la quar-

(¹) *Cf.* Chap. XXVIII, Exercice proposé n° 8.

tique est de la forme

$$(27)\quad (x^2+y^2)^2+2(x^2+y^2)(ax+by)+Ax^2+2Bxy+Cy^2=0.$$

Vérifions que, conformément à une conséquence du numéro précédent, *cette courbe est la podaire d'une conique à centre.* A cet effet, nous allons chercher l'équation tangentielle de l'antipodaire.

Les coordonnées de la projection de l'origine sur la droite $(u, v, w)$ sont

$$x=-\frac{wu}{u^2+v^2},\qquad y=-\frac{wv}{u^2+v^2}.$$

Portant dans (27) et supprimant le facteur $w^2$, nous obtenons l'équation cherchée

$$(28)\qquad w^2-2w(au+bv)+Au^2+2Buv+Cv^2=0.$$

C'est l'équation de la conique à centre $\Delta$ la plus générale. C. Q. F. D.

Les tangentes à cette conique menées par l'origine sont obtenues en annulant $w$ dans (28), ce qui donne

$$Au^2+2Buv+Cv^2=0.$$

On vérifie qu'elles sont perpendiculaires aux tangentes à la quartique (*cf.* Chap. XIII, Exercice résolu n° 2), définies par l'équation ponctuelle

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0.$$

Le point O est un *point de rebroussement* lorsque ces tangentes sont confondues, c'est-à-dire *lorsque* O *est sur la conique* $\Delta$.

*Si* O *est le centre de* $\Delta$ et si, de plus, les axes de coordonnées sont les axes de la conique, on a $a=b=B=0$; l'équation (27) se réduit à

$$(x^2+y^2)^2+Ax^2+Cy^2=0.$$

Si, en outre, *la conique est une hyperbole équilatère*, on a $C=-A$ et l'équation devient

$$(29)\qquad (x^2+y^2)^2+A(x^2-y^2)=0.$$

Cette courbe est connue sous le nom de *lemniscate de Bernoulli.*

578. Limaçon de Pascal. — Lorsque la conique $\Delta$ est un cercle, sa podaire porte le nom de *limaçon de Pascal.*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'équation (28) puisse se mettre sous la forme

$$(30)\qquad (w+\alpha u+\beta v)^2+\rho(u^2+v^2)=0.$$

Or, elle s'écrit

$$(w - au - bv)^2 + Au^2 + 2Buv + Cv^2 - (au + bv)^2 = 0.$$

Pour qu'elle soit de la forme (30), il faut et il suffit qu'on ait

$$(31) \qquad A - a^2 = C - b^2, \qquad B = ab.$$

On arrive aux mêmes conditions en exprimant que les points cycliques sont des points de rebroussement de la quartique. En effet, si l'on coupe celle-ci par la droite $y = ix + \delta$ et si l'on annule le coefficient de $x^2$ dans l'équation aux $x$ des points d'intersection, on obtient l'équation aux $\delta$ des asymptotes (n° 236) :

$$4\delta^2 - 4i\delta(a + bi) - A - 2Bi + C = 0.$$

La condition pour que cette équation ait une racine double est

$$-(a + bi)^2 + A + 2Bi - C = 0.$$

Si l'on écrit qu'elle est satisfaite pour les deux points cycliques, c'est-à-dire quand on change $i$ en $-i$, on retombe sur (31).

Donc, *le limaçon de Pascal est une quartique bicirculaire à point double caractérisée par la condition que les points cycliques sont des points de rebroussement.*

Si le centre A du cercle $\Delta$ est pris sur $Ox$, avec l'abscisse $\alpha$ et si R désigne le rayon de ce cercle, l'équation (28) doit être identique à

$$(w + \alpha u)^2 - R^2(u^2 + v^2) = 0.$$

Cela nous donne les conditions

$$a = -\alpha, \qquad b = 0, \qquad A = \alpha^2 - R^2, \qquad B = 0, \qquad C = -R^2.$$

*L'équation réduite du limaçon est donc*

$$(32) \qquad (x^2 + y^2)^2 - 2\alpha x(x^2 + y^2) + (\alpha^2 - R^2)x^2 - R^2y^2 = 0.$$

Lorsque $\alpha = R$, c'est-à-dire quand O est sur $\Delta$, le limaçon admet O pour point de rebroussement et porte le nom de *cardioïde*, eu égard à sa forme.

579. L'équation polaire de la courbe (27) est

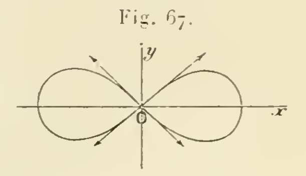
$$(33) \quad \rho^2 + 2\rho(a\cos\omega + b\sin\omega) + A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega = 0.$$

*Dans le cas particulier de la lemniscate*, elle se réduit, en supposant, par exemple, $A = -1$, à

$$(34) \qquad \rho = \sqrt{\cos 2\omega}.$$

Cette équation permet de construire très simplement la courbe, qui a la forme ci-contre (*fig.* 67).

Fig. 67.




*Dans le cas du limaçon* (32), l'équation (33), résolue par rapport à $\rho$, devient

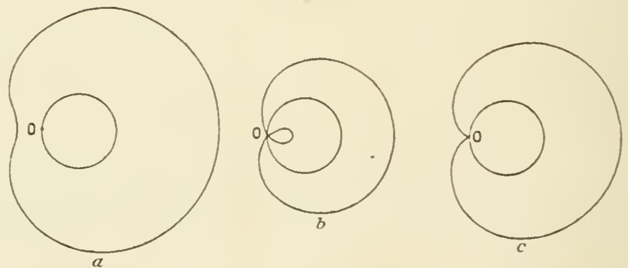
(35) $$\rho = \alpha \cos\omega \pm R.$$

Cette équation montre que *le limaçon de Pascal est aussi une conchoïde de cercle*, à savoir la conchoïde du cercle $\rho = \alpha \cos\omega$, qui est décrit sur OA comme diamètre ([1]).

On peut, dans l'équation (35), se borner à prendre le signe $+$ devant R, comme on le voit en changeant $\omega$ en $\omega + \pi$ et $\rho$ en $-\rho$ (nº 40).

La construction de la courbe au moyen de cette équation est immédiate. En cherchant les valeurs de $\omega$ qui annulent $\rho$, on est conduit à distinguer trois cas suivant que $R > \alpha$, $R < \alpha$, $R = \alpha$. Ces trois cas donnent lieu aux tableaux et formes de courbes ci-dessous :

Fig. 68.




*Premier cas : point double isolé* (*fig.* 68, *a*)

| $\omega$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | $R + \alpha$ | ↘ | $R$ | ↘ | $R - \alpha$ |

([1]) Le lecteur trouvera sans peine une démonstration élémentaire de cette propriété.

*Deuxième cas : point double nodal (fig. 68, b)*

| $\omega$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\omega_1$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | $R+\alpha$ | ↘ | $R$ | ↘ | $0$ | ↘ | $R-\alpha$ |

*Troisième cas : point de rebroussement (cardioïde) (fig. 68, c)*

| $\omega$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | $2R$ | ↘ | $R$ | ↘ | $0$ |

580. *Toute quartique bicirculaire à point double est une courbe unicursale*, puisqu'elle possède trois points doubles (n° 266). Pour trouver ses équations paramétriques rationnelles, il suffit, conformément à la méthode générale (n° 266), de la couper par un cercle variable passant par le point double et par un autre point fixe choisi arbitrairement sur la courbe.

Dans le cas particulier du limaçon de Pascal, on arrive immédiatement au résultat, en posant $\tan \frac{\omega}{2} = t$.

581. Conoïde de Plücker. — Une surface du troisième degré n'est pas réglée en général; on démontre qu'elle possède 27 droites (*cf.* Exercice résolu n° 3). Toutefois il y a des surfaces réglées du troisième ordre. Nous allons étudier la suivante :

$$z = a \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \tag{36}$$

Cette surface est un conoïde droit, d'axe $Oz$ (n° 383), qui porte le nom de *conoïde de Plücker*.

Tout plan passant par $Oz$ coupe le conoïde suivant une seule droite ([1]) autre que $Oz$. Tout plan $\Pi$ perpendiculaire à $Oz$ le coupe suivant deux génératrices $G$ et $G'$, admettant pour plans bissecteurs $zOx$ et $zOy$. Ces deux génératrices ne sont réelles que si le plan $\Pi$ est compris entre les plans $\Pi_1$ et $\Pi_2$, d'équations respectives $z = +a$ et $z = -a$. Pour le plan $\Pi_1$, $G$ et $G'$ se confondent avec une droite $G_1$ du plan des $zx$, le long de laquelle $\Pi_1$ est tangent à la surface. De même, $\Pi_2$ est tangent à la surface le long d'une

([1]) L'axe $Oz$ est une ligne double; tous ses points sont des points doubles.

droite $G_2$ du plan des $zy$. Le conoïde est tout entier compris entre ces deux plans $H_1$ et $H_2$.

On satisfait identiquement à l'équation (36), en posant

$$(37) \qquad x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = a\cos 2v.$$

Ces équations constituent donc un *système d'équations paramétriques* de la surface ([1]).

Les paramètres $u$ et $v$ ont une signification géométrique évidente; ce sont les coordonnées polaires de la projection du point $M(u, v)$ sur $xOy$.

Les lignes $v =$ const. sont les génératrices. Lorsque $v$ croît de o à $\Pi$, la génératrice $(v)$ part de $G_1$, coïncide avec la première bissectrice de $xOy$ pour $v = \frac{\pi}{4}$, atteint $G_2$ pour $v = \frac{\pi}{2}$, puis remonte jusqu'à $G_1$, en prenant les positions symétriques des précédentes par rapport à $zOx$ et coïncidant, en particulier, avec la seconde bissectrice de $xOy$, pour $v = \frac{3\pi}{4}$. On se rend compte ainsi de la forme de la surface, autant, du moins, que cela est possible.

*Le conoïde de Plücker contient une double infinité d'ellipses* E, qui sont ses sections par ses plans tangents ou, si l'on veut, par les plans passant par une quelconque de ses génératrices. Coupons, par exemple, par le plan

$$(38) \qquad x\sin v - y\cos v - \lambda(z - a\cos 2v) = 0.$$

En éliminant $z$ entre (36) et (38), nous obtenons la projection de la section sur $xOy$ :

$$(x\sin v - y\cos v)(x^2 + y^2) - \lambda a[x^2 - y^2 - (x^2 - y^2)\cos 2v] = 0.$$

Le crochet est égal à $2(x^2\sin^2 v - y^2\cos^2 v)$. Il est divisible par $x\sin v - y\cos v$ et, par suite, aussi toute l'équation. Supprimons ce facteur, qui correspond à la projection de la génératrice $(v)$. Il reste

$$(39) \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda a(x\sin v + y\cos v) = 0,$$

c'est-à-dire l'équation d'un cercle passant à l'origine. Donc, *les ellipses se projettent sur $xOy$ suivant des cercles passant par* O.

---

([1]) Si l'on substituait à $v$ la variable $v' = \tang\frac{v}{2}$, on obtiendrait des formules rationnelles en $u$ et $v'$. *La surface est donc unicursale* (*cf.* Exercice proposé n° 28).

L'équation (39) peut être identifiée, si l'on choisit convenablement $\lambda$ et $\nu$, avec l'équation d'un cercle quelconque passant à l'origine. Donc, *tout cylindre de révolution contenant* $Oz$ *coupe le conoïde suivant une ellipse* E.

On déduit de là le mode de génération suivant :

*Le conoïde de Plücker est le lieu des droites qui coupent à angle droit une génératrice d'un cylindre de révolution et s'appuient, en outre, sur une section plane de ce cylindre.*

Le conoïde de Plücker jouit encore de beaucoup d'autres propriétés et se rencontre dans un assez grand nombre de questions de Géométrie et de Cinématique.

582. Cyclides. — On appelle *cyclides* les surfaces de quatrième degré qui admettent le cercle imaginaire de l'infini comme cercle double et les surfaces du troisième degré qui l'admettent comme cercle simple. Nous nous bornerons à étudier les premières, en suivant la même marche que pour les quartiques bicirculaires, dont les cyclides du quatrième degré sont l'extension à l'espace.

Par un choix convenable des axes de coordonnées, une telle surface a pour équation (n° 571)

$$(x^2+y^2+z^2)^2+Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bx+2B'y+2B''z+C=0. \quad (40)$$

Toute sphère S la coupe suivant le cercle de l'infini, compté deux fois et suivant une biquadratique Γ. Soit

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\delta=0 \quad (41)$$

l'équation de cette sphère. Si nous posons

$$P\equiv 2\alpha x+2\beta y+2\gamma z-\delta. \quad (42)$$

la biquadratique Γ est définie par l'équation (41) et la suivante :

$$P^2+Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bx+2B'y+2B''z+C=0. \quad (43)$$

Comme au n° 573, cherchons *les sphères bitangentes*. Pour que la sphère S soit bitangente à la cyclide, il faut et il suffit que Γ ait deux points doubles, et, par suite, que S soit bitangente à la quadrique (43). Autrement dit, on doit pouvoir déterminer $\lambda$ de manière que l'équation

$$\begin{aligned}(44)\quad & P^2+Ax^2+A'y^2+A''z^2\\ & +2Bx+2B'y+2B''z+C+\lambda(x^2+y^2+z^2-P)=0\end{aligned}$$

représente un faisceau de deux plans, c'est-à-dire admette une ligne de points

doubles. Les quatre équations

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} 2P\alpha + Ax + B + \lambda(x-\alpha) &= 0, \\ 2P\beta + A'y + B' + \lambda(y-\beta) &= 0, \\ 2P\gamma + A''z + B'' + \lambda(z-\gamma) &= 0, \\ -P\delta + Bx + B'y + B''z + C + \lambda\left(\frac{\delta - P}{2}\right) &= 0 \end{aligned}\right.$$

doivent se réduire à deux. Ou bien encore, ces quatre équations et l'équation (42) doivent se réduire à trois, si l'on y regarde $x, y, z$, P, comme les variables.

En tirant $x, y, z$ des trois premières équations (45), puis portant dans la quatrième, ainsi que dans (42), on obtient deux équations en P, qui doivent être vérifiées identiquement. Par un calcul analogue à celui du n° 573, on obtient ainsi quatre conditions, qui, en réalité, se réduisent aux trois suivantes :

$$(46)\qquad \frac{B^2}{A+\lambda} + \frac{B'^2}{A'+\lambda} + \frac{B''^2}{A''+\lambda} - C + \frac{\lambda^2}{4} = 0,$$

$$(47)\qquad \frac{4\alpha^2}{A+\lambda} + \frac{4\beta^2}{A'+\lambda} + \frac{4\gamma^2}{A''+\lambda} + 1 = 0.$$

$$(47)\qquad \delta + \frac{2B\alpha}{A+\lambda} + \frac{2B'\beta}{A'+\lambda} + \frac{2B''\gamma}{A''+\lambda} + \frac{\lambda}{2} = 0.$$

Elles s'interprètent comme au n° 573. La première donne $\lambda$; elle est du cinquième degré. La seconde représente une quadrique à centre, lieu du centre de S. Enfin, la troisième exprime que S est orthogonale à la sphère

$$(49)\qquad x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2Bx}{A+\lambda} + \frac{2B'y}{A'+\lambda} + \frac{2B''z}{A''+\lambda} - \frac{\lambda}{2} = 0.$$

On a finalement l'énoncé suivant :

Théorème. — *Il y a cinq familles de sphères* S *bitangentes à la cyclide. Pour chaque famille, le lieu des centres est une quadrique* D, *appelée déférente; les sphères de la famille sont toutes orthogonales à une sphère fixe* $\Sigma$, *appelée sphère directrice.*

*Les cinq déférentes sont homofocales. Les cinq sphères directrices sont deux à deux orthogonales.*

La cyclide est *anallagmatique de cinq manières différentes* (n° 425), les cinq sphères d'anallagmatie étant les sphères directrices $\Sigma$.

La cyclide possède *cinq focales*, qui sont les biquadratiques fournies par l'intersection de chaque déférente avec la sphère directrice correspondante.

583. Tout ce qui a été dit aux n$^{os}$ 576 et 577 pour les quartiques bicirculaires à point double s'étend aussi aux cyclides à point double.

*Pour qu'une cyclide ait un point double* P, *il faut et il suffit qu'une des sphères directrices soit une sphère de rayon nul de centre* P. La racine correspondante de l'équation (46) en $\lambda$ est une racine double. La cyclide est homothétique de la podaire de la déférente par rapport à P [1].

Aux trois autres racines de l'équation en $\lambda$, correspondent *trois familles de sphères véritablement bitangentes.* Pour chaque famille, la sphère directrice passe par P, ainsi que la déférente, le plan tangent commun en P à ces deux surfaces étant un plan principal du cône des tangentes.

584. Cyclide de Dupin. — Une cyclide particulièrement intéressante et qui se rencontre dans une foule de problèmes de Géométrie est la *cyclide de Dupin.* Elle peut être définie de bien des manières, car elle possède beaucoup de propriétés caractéristiques. Une des définitions les plus simples est la suivante :

*La cyclide de Dupin est l'enveloppe d'une sphère* S *dont le centre* $\omega$ *décrit une ellipse* E *et qui reste orthogonale à un cercle focal* C *de cette ellipse.*

Prenons pour axes des $x$ et des $y$ les axes de l'ellipse E et soient, comme d'habitude, $2a$ et $2b$ les longueurs de ces axes. Supposons, pour fixer les idées, que le cercle C ait son centre P sur O$x$ et soit $\overline{\text{OP}} = \xi$. On trouve aisément (n° 538) que l'équation de cercle est alors

$$x^2 + y^2 - 2\xi x + \frac{a^2\xi^2}{c^2} - b^2 = 0, \tag{50}$$

en posant, comme d'habitude, $c^2 = a^2 - b^2$.

L'équation d'une sphère S est de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax\cos\varphi - 2by\sin\varphi + \delta = 0,$$

$\delta$ étant déterminé par la condition d'orthogonalité avec le cercle (50) :

$$2\xi a\cos\varphi = \frac{a^2\xi^2}{c^2} - b^2 + \delta.$$

De là, on tire $\delta$ et portant dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a(x - \xi)\cos\varphi - 2by\sin\varphi + b^2 - \frac{a^2\xi^2}{c^2} = 0. \tag{51}$$

---

(1) On en conclut, comme au n° 577, que les cyclides à point double sont des podaires de quadriques. Le cône des tangentes au point double P est supplémentaire du cône circonscrit à la quadrique à partir du point P. Tout cela peut se vérifier analytiquement, en formant l'équation tangentielle de l'antipodaire de la cyclide (*cf.* n° 577).

L'enveloppe de cette sphère a pour équation (n° 272)

$$(52)\qquad \left(x^2+y^2+z^2+b^2-\frac{a^2\xi^2}{c^2}\right)^2 = 4a^2(x-\xi)^2+4b^2y^2$$

ou, en ordonnant et posant $m=\frac{a\xi}{c}$,

$$(53)\quad (x^2+y^2+z^2)^2-2(m^2+a^2+c^2)x^2-2(m^2+b^2)y^2 \\ -2(m^2-b^2)z^2+8macx-m^4-2m^2(a^2+c^2)+b^4=0.$$

Telle est *l'équation de la cyclide de Dupin*. Elle est bien de la forme (40).

585. Indiquons maintenant quelques propriétés.

D'abord, la sphère (51) passe par deux points fixes $a$ et $b$, dont les coordonnées sont $\xi$, o, $\zeta=\pm b\sqrt{\frac{\xi^2}{c^2}-1}$. Ces deux points sont sur l'hyperbole H focale de E (n° 523). Chaque cercle caractéristique Γ passe par ces deux points (n° 280). La tangente $at$ en $a$ à Γ est la caractéristique du plan tangent en $a$ à S [1]. Ce plan tangent est perpendiculaire à $a\omega$: il enveloppe donc le cône supplémentaire du cône de sommet $a$ et de base E. Or, celui-ci est de révolution, puisque $a$ est sur la focale de E (n° 524); donc, aussi le cône engendré par $at$. L'axe commun des deux cônes est la tangente $a$T à H. Nous avons finalement la proposition suivante :

Théorème. — *La cyclide peut être engendrée par un cercle* Γ, *qui passe par deux points fixes a et b de la focale de* E *et coupe cette focale sous un angle constant.*

Ces points $a$ et $b$ sont des *points doubles de la cyclide.*

586. L'équation (53) ne change pas, si l'on y change $y$ en $z$, $z$ en $y$, $a$ en $c$, $c$ en $a$ et $b$ en $ib$. On en conclut que la cyclide est susceptible d'un deuxième mode de génération, se déduisant du premier par les changements ci-dessus.

Il est aisé de voir que l'ellipse E devient l'hyperbole H. Quant aux points $a$ et $b$, ils deviennent les points $a'$, $b'$ de E, dont l'abscisse commune est $\xi'=m\frac{a}{c}$.

Le cercle C devient un cercle C', focal de H et dont le centre P' est la projection de $a'$ et $b'$ sur O$x$. D'où :

Théorème. — *La cyclide précédente est aussi l'enveloppe d'une sphère* S', *dont le centre* ω' *décrit l'hyperbole* H *et qui reste orthogonale à un cercle focal* C' *de cette hyperbole. Elle peut également être engendrée par un*

---

[1] Γ est l'intersection de deux sphères S infiniment voisines; donc, *at* est l'intersection des plans tangents à ces sphères.

*cercle* Γ′, *qui passe par deux points fixes* $a'$ *et* $b'$ *de* E *et qui coupe* E *sous un angle constant.*

587. La cyclide est tangente à la sphère S le long du cercle Γ. Les normales en tous les points de ce cercle passent donc par le centre ω et engendrent un cône (de révolution). Il s'ensuit que Γ *est une ligne de courbure* (nº 346). De même, les cercles Γ′ constituent l'autre famille de lignes de courbure. *Ils coupent donc orthogonalement les cercles* Γ.

Soit M un point de rencontre de Γ et Γ′. *La normale en* M *à la cyclide* passe par les centres ω et ω′ de S et de S′. Donc, elle *s'appuie à la fois sur* E *et sur* H. Les points ω et ω′ sont les *centres de courbure principaux* relatifs au point M. Les sphères S et S′ sont tangentes entre elles. Donc, *chaque sphère* S *est tangente à toutes les sphères* S′ *et vice versa.*

On démontre que toutes ces propriétés sont caractéristiques de la cyclide de Dupin : c'est *la seule surface à lignes de courbure circulaires* ou *dont les normales s'appuient sur deux courbes;* enfin, elle peut être définie comme *enveloppe des sphères tangentes à trois sphères fixes.*

588. Appliquons à la cyclide (53) les résultats du nº 582. L'équation (46) se réduit à

$$\frac{B^2}{A+\lambda} - C + \frac{\lambda^2}{4} = 0. \tag{54}$$

Le lecteur vérifiera qu'elle admet les racines $-A'$ et $-A''$, auxquelles correspondent la famille des sphères S′ et la famille des sphères S.

La somme des trois racines étant $-A$, la troisième racine est

$$\lambda = A' + A'' - A = 2(a^2 + c^2 - m^2).$$

Il lui correspond *une famille de sphères* S″ *bitangentes*, dont le lieu des centres est la quadrique

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{m^2 - c^2} + \frac{z^2}{m^2 - a^2} - 1 = 0. \tag{55}$$

qui admet E et H pour focales. Les sphères S″ sont orthogonales à la sphère Σ dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\frac{ac}{m}x + a^2 + c^2 - m^2 = 0 \tag{56}$$

et qui passe par les quatre points doubles $a$, $b$, $a'$, $b'$.

589. Tore. — On appelle *tore la surface de révolution engendrée par un cercle* Γ *qui tourne autour d'une droite située dans son plan.*

On peut aussi le considérer comme étant l'*enveloppe de la sphère* S *décrite sur* Γ *comme grand cercle.*

Le centre ω de S et Γ décrit un cercle E. En outre, cette sphère et ce cercle rencontrent l'axe de révolution $Oz$ en deux points fixes $a$ et $b$. On peut donc *considérer le tore comme une cyclide de Dupin;* il correspond au cas où l'ellipse E des numéros précédents est un cercle. L'hyperbole H est alors la droite $Oz$; les cercles Γ' sont les parallèles et les points $a'$, $b'$ sont leurs points cycliques communs. Les *sphères bitangentes* S'' ont leurs centres sur une quadrique Q de révolution, admettant le cercle E pour focale, c'est-à-dire le centre ω de Γ comme foyer de sa méridienne. Elles sont orthogonales à la sphère Σ décrite sur $ab$ comme diamètre; autrement dit, elles admettent $a$ et $b$ comme points conjugués; ou bien encore, le centre O de la surface a même puissance par rapport à chaque sphère S'' et par rapport au cercle générateur.

Parmi les sphères S'', il y a *les plans bitangents*, qui sont les plans perpendiculaires à chaque plan méridien menés par les tangentes issues de O au cercle générateur de ce plan. Comme chaque sphère S'', *chaque plan bitangent coupe le tore suivant deux cercles* (¹). Cette propriété est ordinairement connue sous le nom de *théorème d'Yvon Villarceau.*

Si l'on prend pour axe des $z$ l'axe du tore et pour plan des $xy$ le plan du cercle E, si l'on appelle, d'autre part, $a$ le rayon de E et R le rayon de Γ, l'équation d'un cercle méridien du plan des $zx$ est

$$x^2 + z^2 - 2ax + a^2 - R^2 = 0.$$

En y remplaçant $x$ par $\sqrt{x^2 + y^2}$ (n° 360), nous obtenons l'*équation du tore* (*cf.* Chap. XXV, Exercice résolu n° 2) :

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0$$

ou

$$(57)\qquad (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(a^2 + R^2)(x^2 + y^2) + 2(a^2 - R^2)z^2 + (a^2 - R^2)^2 = 0.$$

(¹) Un plan quelconque de l'espace coupe suivant une quartique bicirculaire. Un plan tangent coupe suivant une quartique à trois points doubles, donc unicursale. Un plan bitangent coupe suivant une quartique à quatre points doubles, donc décomposée en deux coniques se rencontrant en ces quatre points, c'est-à-dire en deux cercles passant par les deux points de contact.

# CHAPITRE XXXIX.

## COURBES CYCLOÏDALES.

590. Étude géométrique préliminaire. — On appelle *courbe cycloïdale* la courbe Γ engendrée par un point quelconque P du plan d'un cercle C′, appelé *cercle roulette*, qui roule sans glisser sur un cercle fixe C appelé *cercle base*.

Ces courbes ont une certaine importance en Cinématique, particulièrement dans la théorie des engrenages. Elles intéressent aussi les géomètres par leurs nombreuses et élégantes propriétés.

Nous allons commencer par en faire une étude géométrique sommaire, qui simplifiera l'étude analytique plus complète que nous entreprendrons ensuite.

591. Appelons R le rayon du cercle C et R′ celui du cercle C′. Le premier sera supposé essentiellement positif. Quant au second, nous conviendrons de lui donner le signe + ou le signe —, suivant que les deux cercles sont tangents intérieurement ou extérieurement [1]. Il revient au même de poser $R' = \overline{O'M}$ (*fig.* 69), la ligne des centres OO′ étant orientée par la demi-droite OX qui va de O au point de contact M. Nous poserons, en outre,

$$m = \frac{R'}{R}. \tag{1}$$

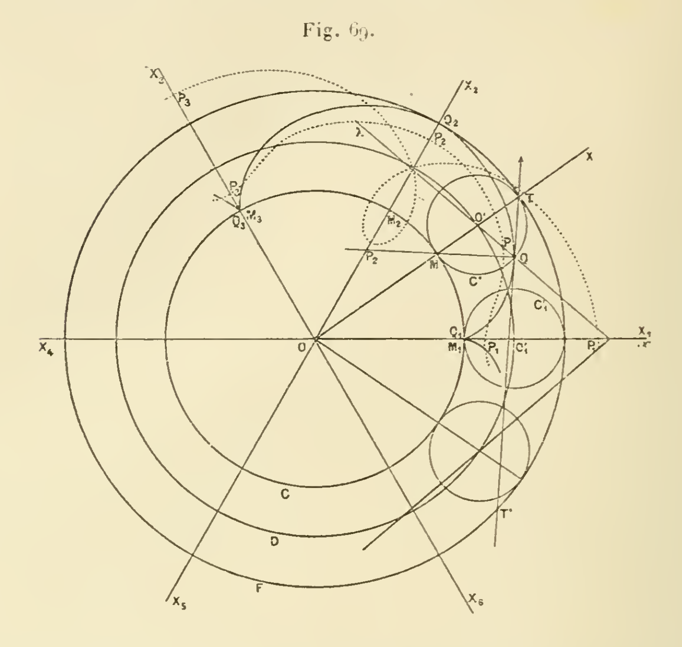
Appelons θ l'angle dont a tourné OX à partir d'une position initiale quelconque $Ox$, le plan étant supposé orienté dans un sens choisi une fois pour toutes. Considérons les mouvements des deux cercles par rapport à un plan qui serait entraîné par OX ou, comme nous dirons, pour abréger le langage, *les mouvements par rapport*

---

[1] Si l'on considère les cercles comme des cycles (n° 168), ils doivent toujours être tangents et non semi-tangents.

*à* OX. Ces mouvements sont des rotations des cercles autour de leurs centres respectifs, c'est-à-dire des glissements des cercles sur eux-

Fig. 69.




mêmes. La longueur d'arc qui passe en M doit toujours être la même pour les deux cercles, le passage se faisant en outre dans le même sens ([1]). Il s'ensuit que les angles dont tournent les deux cercles sont en raison inverse de leurs rayons; de plus, les rotations ont lieu dans le même sens ou dans des sens opposés, suivant que les cercles sont tangents intérieurement ou extérieurement. Dès lors, si le cercle C tourne de l'angle algébrique $\alpha$, le cercle C' tourne de l'angle algébrique $\frac{\alpha}{m}$. En particulier, si l'on compte les rotations à partir de la position initiale envisagée plus haut, on a $\alpha = -\theta$ et l'angle dont a tourné une demi-droite $O'\lambda$ entraînée par C' est $-\frac{\theta}{m}$. Si l'angle de OX avec $O'\lambda$ était primitivement $\omega$, il est devenu

$$(2) \qquad (\widehat{OX, O'\lambda}) = \omega - \frac{\theta}{m}.$$

---

([1]) Le lecteur n'a qu'à se figurer que les deux cercles sont des roues dentées engrenant en M.

En particulier, pour $\theta = 2m\pi$, il devient $\omega - 2\pi$; donc $O'\lambda$ reprend la même position par rapport à OX, ainsi que tous les points P entraînés par le cercle C'.

Si le roulement continue, les nouvelles positions du cercle C' dans le plan de C se déduisent évidemment des précédentes par une rotation de l'angle $2m\pi$ autour du point O. Toutes les courbes cycloïdales se superposent donc à elles-mêmes quand on les soumet à une telle rotation. Nous dirons qu'*elles admettent la période angulaire* $2m\pi$. La portion de courbe décrite pendant une période, c'est-à-dire quand $\theta$ croît de $2m\pi$, sera appelée une *boucle*.

Si le roulement se poursuit indéfiniment, le point P décrit indéfiniment des boucles. *Pour que la courbe se ferme, il faut et il suffit* que la période $2m\pi$ soit commensurable avec la circonférence $2\pi$, c'est-à-dire *que m soit commensurable*. Si $m$ est égal à la fraction irréductible $\frac{p}{q}$, la fermeture se produit au bout de $q$ boucles ou $p$ tours complets autour de O. Si $m$ est incommensurable, au bout d'un grand nombre de tours, la courbe remplit pratiquement tout une couronne, si son trait a une épaisseur finie. Elle est évidemment transcendante, car elle coupe en une infinité de points tous les cercles de cette couronne.

592. Considérons une deuxième demi-droite $O'\lambda'$ faisant avec $O'\lambda$ un certain angle $\varphi$. Soient OX et OX' deux positions de OX dont les angles $\theta$ diffèrent de $m\varphi$. D'une façon précise, si $(\widehat{O'\lambda, O'\lambda'}) = \varphi$, nous prenons $\theta' = \theta + m\varphi$. La formule (2) nous donne alors

$$(\widehat{OX', O'\lambda'}) = \omega + \varphi - \frac{\theta + m\varphi}{m} = \omega - \frac{\theta}{m} = (\widehat{OX, O'\lambda}).$$

Donc, la position de $O'\lambda'$ par rapport à OX' est identique à la position de $O'\lambda$ par rapport à OX. Il résulte de là que les courbes décrites par les points de $O'\lambda'$ se déduisent des courbes décrites par les points homologues de $O'\lambda$ par la rotation qui amène OX sur OX', c'est-à-dire par la rotation $m\varphi$. Autrement dit, *deux courbes cycloïdales sont égales quand elles sont décrites par des points situés à la même distance du centre du cercle roulette.*

On peut donc se borner à étudier les courbes décrites par les points P d'une seule demi-droite $O'\lambda$, déterminée, par exemple, par

a condition $\omega = 0$. Nous poserons ([1])

$$(3) \qquad \overline{O'P} = a, \qquad \frac{a}{R'} = e.$$

Si le nombre $e$, que nous supposerons positif, est égal à 1, le point P est sur C'; la courbe est appelée *épicycloïde* ou *hypocycloïde*, suivant que le cercle C' est extérieur ou intérieur à C, c'est-à-dire suivant que O' est extérieur ou intérieur au segment OM, ou enfin suivant que $m$ est extérieur ou intérieur à l'intervalle $(0, -1)$.

Si $e < 1$, P est intérieur à C', la courbe est appelée *épicycloïde* ou *hypocycloïde raccourcie*. Si $e > 1$, P est extérieur à C', la courbe est appelée *épicycloïde* ou *hypocycloïde allongée*.

Une courbe cycloïdale est entièrement définie, à un déplacement près, par les trois nombres

$$(4) \qquad R, \quad m, \quad e.$$

593. Appelons *droites principales* d'une courbe cycloïdale Γ les positions de OX pour lesquelles le point P se trouve sur cette droite. D'après (2), elles sont données par

$$\omega - \frac{\theta}{m} = k\pi$$

ou

$$(5) \qquad \theta = m\omega - km\pi,$$

$k$ étant un entier quelconque. Deux droites principales consécutives font un angle égal à une demi-période ([2]).

*Les droites principales sont des axes de symétrie.* En effet, considérons une position $C'_1$ du cercle C', pour laquelle P se trouve en $P_1$ sur la droite principale $OX_1$. Faisons rouler C' successivement dans les deux sens et sur une même longueur d'arc: nous aboutissons en deux positions du point P, qui sont évidemment symétriques par

([1]) Le nombre $a$ devrait être supposé positif, si l'on prenait effectivement P sur O'λ. Mais, il peut être commode de ne pas s'astreindre à cette restriction et d'introduire, comme nous l'avons fait, la mesure algébrique $\overline{O'P}$. Le changement de signe de $a$ équivaut au remplacement de O'λ par la demi-droite opposée, c'est-à-dire à une rotation de $m\pi$.

([2]) Si $m$ est commensurable, le nombre des droites principales est égal au nombre des boucles, si ce nombre est pair. Il en est le double, si ce nombre est impair.

rapport à $OX_1$ (*fig.* 69). Comme ces deux positions appartiennent à Γ, $OX_1$ est bien un axe de symétrie de cette courbe.

Les points tels que $P_1$ sont les *sommets* de la courbe. Ce sont les points les plus éloignés du cercle D décrit par O'. Ils correspondent aux maxima et minima du rayon vecteur $\overline{OP}$; par exemple, $\overline{OP_1}$ est un minimum et $\overline{OP_2}$ un maximum (*fig.* 69).

D'après la théorie du centre instantané de rotation (t. III), la normale en un point quelconque P de Γ est MP (*cf.* n° 595). En particulier, les normales en $P_1$ et $P_2$ sont $M_1P_1$ et $M_2P_2$, c'est-à-dire les droites principales. Toutefois, dans le cas d'une hypocycloïde ou épicycloïde, l'un de ces deux sommets, par exemple $P_1$, se trouve sur C et, par suite, confondu avec $M_1$ : la normale $M_1P_1$ est alors indéterminée. Nous verrons que la droite principale $OP_1$ est non plus la normale, mais la tangente (n° 595).

Pour connaître la forme de la courbe Γ, il suffit de construire la demi-boucle $P_1P_2$ et d'achever la boucle par symétrie. Cette forme peut varier beaucoup, suivant les valeurs de $m$ et surtout de $e$. Elle est étudiée en détail dans les Exercices proposés nos 8 à 11.

594. Autre mode de génération. — L'angle polaire $t$ de O'λ par rapport à $Ox$ est donné par la formule de Chasles et la formule (2). En supposant $\omega = 0$, nous avons

$$t = \theta - \frac{\theta}{m} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\theta = n\theta, \tag{6}$$

en posant

$$n = 1 - \frac{1}{m}. \tag{7}$$

On déduit de là que toute courbe cycloïdale peut être engendrée de la manière suivante :

*Un point* P *décrit un cercle* E *d'un mouvement uniforme* [1]; *en même temps, ce cercle* E *est animé d'une translation telle que son centre* O' *décrive uniformément un cercle fixe* D, *de centre* O. *La courbe décrite par* P *dans le plan fixe du cercle* D *est une courbe cycloïdale.*

Avec les notations précédentes, le rayon du cercle E est

$$a = emR. \tag{8}$$

---

[1] Nous employons ces expressions cinématiques pour faciliter le langage. Mais, il est bien évident que la notion de *temps* n'a rien à voir dans la question.

et celui du cercle D est

$$(9) \qquad b = R - R' = R(1 - m).$$

En outre, quand O' tourne de $\theta$ sur D, P tourne de $n\theta$ sur E; le rapport des vitesses angulaires sur E et sur D est $n$.

On remonte de ce nouveau mode de génération à l'ancien par les formules inverses des formules (7), (8) et (9), soit

$$(10) \qquad m = \frac{1}{1-n}, \qquad R = b\left(1 - \frac{1}{n}\right), \qquad e = -\frac{an}{b}.$$

*On peut, sans changer la courbe, intervertir les rôles des deux cercles* D et E. En effet, si l'on achève le parallélogramme OO'PO'', le point O'' décrit un cercle D' égal à E et de centre O, comme P décrit E et P décrit un cercle E' égal à D et de centre O'', comme O' décrit D.

Ceci nous prouve que *toute courbe cycloïdale peut être engendrée de deux manières différentes* au moyen de ce nouveau mode de génération et, par suite, aussi avec l'ancien. Les nombres caractéristiques $R_1$, $m_1$, $e_1$ de la seconde manière sont obtenus en changeant $a$ en $b$, $b$ en $a$ et $n$ en $\frac{1}{n}$ dans (10); on trouve ainsi, entre les nouveaux nombres et les anciens, les relations

$$(11) \qquad m + m_1 = 1, \qquad R_1 = eR, \qquad ee_1 = 1.$$

Si l'on change $m$ en $1 - m$ et $e$ en $\frac{1}{e}$, mais sans changer R, on obtient une nouvelle courbe $\Gamma_1$ homothétique de $\Gamma$ dans le rapport $\frac{1}{e}$. Ceci s'interprète géométriquement de la manière suivante : Prenons $O'_1$ symétrique de O' par rapport au milieu I de OM (*fig.* 70), puis $P_1$ tel que $\frac{\overline{O'_1P_1}}{\overline{O'_1M}} = \frac{\overline{O'M}}{\overline{O'P}}$.

Fig. 70.



Considérons enfin les cercles C' et $C'_1$ passant par M et de centres respectifs O' et $O'_1$. Si on les fait rouler sur C, *les points* P *et* $P_1$ *décrivent des courbes homothétiques*, le rapport d'homothétie étant $\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{O'M}}{\overline{O'P}} = \frac{\overline{O'_1P_1}}{\overline{O'_1M}}$.

Dans le cas particulier où $e = 1$, on a aussi $e_1 = 1$, P et $P_1$ coïncident avec M et décrivent *la même épicycloïde ou hypocycloïde*.

On peut conclure de là qu'on obtiendra, à coup sûr, toutes les courbes cycloïdales, en *ne considérant que les valeurs de m inférieures à* $\frac{1}{2}$ ou, si

l'on veut, en *assujettissant le cercle roulette à ne jamais contenir le centre du cercle base* (¹).

595. Étude analytique. — Prenons pour axes de coordonnées deux diamètres rectangulaires du cercle base, l'axe $Ox$ étant le même qu'au n° 591. En projetant le contour OO′P sur les axes, on a, d'après (6), (8) et (9),

$$(12)\qquad \begin{cases} x = R[(1-m)\cos\theta + em\cos n\theta], \\ y = R[(1-m)\sin\theta + em\sin n\theta]. \end{cases}$$

Telles sont les *équations paramétriques de la courbe* Γ.

Cherchons la tangente en P. A cet effet, différentions les équations ci-dessus :

$$(13)\qquad \begin{cases} dx = -R(1-m)(\sin\theta - e\sin n\theta)\,d\theta, \\ dy = \phantom{-}R(1-m)(\cos\theta - e\cos n\theta)\,d\theta. \end{cases}$$

Vérifions que *la normale passe par le point* M (R cos θ, R sin θ), c'est-à-dire que l'on a

$$(14)\qquad (x - R\cos\theta)\,dx + (y - R\sin\theta)\,dy = 0.$$

En utilisant les formules (12), on trouve

$$(14')\qquad x - R\cos\theta = \frac{m}{m-1}\,\frac{dy}{d\theta}, \qquad y - R\sin\theta = -\frac{m}{m-1}\,\frac{dx}{d\theta}.$$

En portant dans (14), on obtient une identité.

Étudions plus particulièrement le cas des *épicycloïdes et hypocycloïdes, caractérisé par* $e = 1$.

Les formules (13) s'écrivent

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = 2R(m-1)\sin\dfrac{\theta}{2m}\cos\left(1 - \dfrac{1}{2m}\right)\theta, \\ \dfrac{dy}{d\theta} = 2R(m-1)\sin\dfrac{\theta}{2m}\sin\left(1 - \dfrac{1}{2m}\right)\theta. \end{cases}$$

---

(¹) C'est seulement dans cette hypothèse que nous emploierons les qualificatifs *allongée* et *raccourcie* pour caractériser les inégalités $e > 1$ et $e < 1$.

Si l'on ne fait aucune restriction, la troisième formule (11) nous montre qu'une courbe cycloïdale peut être considérée à la fois comme allongée et raccourcie.

On voit que l'angle polaire de la tangente est

$$(16)\qquad \alpha = \left(1 - \frac{1}{2m}\right)\theta.$$

Il est égal à la demi-somme des angles polaires de OX et O'λ; donc, la tangente QT est parallèle à la bissectrice de l'angle $\widehat{\lambda O'X}$. On en conclut qu'elle passe toujours par le point T diamétralement opposé à M sur C' (*fig.* 69), conformément à la propriété de la normale vérifiée plus haut. En particulier, au point $Q_1$, la tangente est $OX_1$. Comme, en ce point, le rayon vecteur OQ est maximum (hypocycloïde) ou minimum (épicycloïde), on a nécessairement un rebroussement.

Lorsque θ varie de o à $m\pi$, α varie de o à $\theta - \frac{\pi}{2}$. On vérifie qu'au sommet $Q_2$, la courbe est normale à la droite principale $OX_2$ (*cf.* n° 593). En outre, on en sait assez pour avoir une idée de la forme de la demi-boucle $Q_1Q_2$. La figure 69 montre une boucle complète d'épicycloïde en trait plein et deux boucles d'épicycloïdes allongée et raccourcie en trait pointillé.

596. La tangente QT rencontre le cercle F (*fig.* 69) au point T. Le deuxième point de rencontre T' est en relation très simple avec le premier.

Soit φ l'angle polaire de l'un ou de l'autre. On doit pouvoir déterminer λ de manière à avoir les égalités

$$x + \lambda\cos\alpha = R(1 - 2m)\cos\varphi, \qquad y + \lambda\sin\alpha = R(1 - 2m)\sin\varphi$$

ou, en remplaçant x, y et α par leurs valeurs et divisant par R,

$$(17)\quad \begin{cases} (1-m)\cos\theta + m\cos\left(1 - \dfrac{1}{m}\right)\theta + \dfrac{\lambda}{R}\cos\left(1 - \dfrac{1}{2m}\right)\theta = (1-2m)\cos\varphi, \\ (1-m)\sin\theta + m\sin\left(1 - \dfrac{1}{m}\right)\theta - \dfrac{\lambda}{R}\sin\left(1 - \dfrac{1}{2m}\right)\theta = (1-2m)\sin\varphi. \end{cases}$$

Éliminons λ, en multipliant la première équation par $\sin\left(1 - \frac{1}{2m}\right)\theta$, la seconde par $\cos\left(1 - \frac{1}{2m}\right)\theta$ et retranchant; il vient, tous calculs faits,

$$\sin\left[\theta\left(1 - \frac{1}{2m}\right) - \varphi\right] = -\sin\frac{\theta}{2m};$$

d'où

$$\theta\left(1-\frac{1}{2m}\right)-\varphi=\begin{cases}-\dfrac{\theta}{2m},\\[2mm] \dfrac{\theta}{2m}+\pi.\end{cases}$$

Les angles polaires des deux points T et T' sont finalement

(18) $$\varphi=\theta;\qquad \varphi'=\theta\left(1-\frac{1}{m}\right)-\pi.$$

Il sont liés par la relation linéaire

(19) $$(m-1)\varphi-m\varphi'=m\pi.$$

Réciproquement, *si les angles au centre de deux points* T *et* T' *d'un même cercle* F *sont liés par une relation linéaire, la corde* TT' *enveloppe une épicycloïde ou une hypocycloïde.*

Car, en changeant au besoin l'origine des angles et choisissant convenablement $m$, on peut toujours identifier une telle relation avec la relation (19).

Cette propriété est en corrélation étroite avec la double génération signalée au n° 594 (*cf.* Exercice proposé au n° 14).

**597.** Arc, courbure, développée. — La courbe étant orientée [1] par l'angle polaire $\alpha$ de sa demi-tangente positive, l'abscisse curviligne $s$ du point Q est donnée, d'après (15), par la formule

(20) $$\frac{ds}{d\theta}=2\mathrm{R}(m-1)\sin\frac{\theta}{2m}.$$

Intégrons, en choisissant $Q_1$ pour origine des arcs :

(21) $$s=4\mathrm{R}m(m-1)\left(1-\cos\frac{\theta}{2m}\right)=8\mathrm{R}m(m-1)\sin^2\frac{\theta}{4m}.$$

La *longueur d'une boucle* est obtenue en faisant $\theta=2m\pi$, ce qui donne $8\mathrm{R}m(m-1)$.

Le *rayon de courbure* $\rho$ est, d'après (20) et (16),

(22) $$\rho=\frac{ds}{d\alpha}=4\mathrm{R}\frac{m(m-1)}{2m-1}\sin\frac{\theta}{2m}.$$

Comparons-le avec $\overline{\mathrm{QM}}$. On a

$$\overline{\mathrm{QM}}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{R}\cos\theta-x$$

---

[1] Sur la figure 69, la boucle $Q_1Q_2Q_3$ est orientée de $Q_1$ vers $Q_3$, dans le cas de l'épicycloïde et de $Q_3$ vers $Q_1$, dans le cas de l'hypocycloïde.

ou, en utilisant (14'),

$$-\overline{QM}\sin\alpha = -\frac{m}{m-1}\frac{dy}{d\theta} = -\frac{m}{m-1}\cdot\rho\sin\alpha.\left(1-\frac{1}{2m}\right);$$

d'où

$$\frac{\rho}{\overline{QM}} = \frac{2(m-1)}{2m-1}. \tag{23}$$

Donc, *le centre de courbure divise le segment* QM *dans un rapport constant* (*cf.* Exercice proposé n° 7).

Les coordonnées $(x_1, y_1)$ du centre de courbure sont données par les formules

$$x_1 = x - \rho\sin\alpha, \qquad y_1 = y + \rho\cos\alpha. \tag{24}$$

On trouve, tous calculs faits [1],

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{R}{2m-1}\left[(m-1)\cos\theta + m\cos\left(1-\frac{1}{m}\right)\theta\right],\\ y_1 &= \frac{R}{2m-1}\left[(m-1)\sin\theta + m\sin\left(1-\frac{1}{m}\right)\theta\right].\end{aligned}\right. \tag{25}$$

On remarque tout de suite l'analogie de ces formules avec les formules (12), où l'on a fait $e=1$. Les crochets sont les mêmes, au signe près de l'un des termes. On peut penser, dès lors, qu'il existe une relation géométrique simple entre les deux courbes représentées par les deux groupes de formules.

Effectivement, si l'on change, dans (25), $\theta$ en $\theta + m\pi$, on obtient, tous calculs faits,

$$x_1 = \frac{x\cos\pi m - y\sin\pi m}{1-2m}, \qquad y_1 = \frac{x\sin\pi m - y\cos\pi m}{1-2m}.$$

Ces formules montrent que *le point* $(x_1, y_1)$ *se déduit du point* $(x, y)$ *par une rotation de l'angle* $\pi m$ *suivie d'une homothétie de rapport* $\frac{1}{1-2m}$. On conclut de là que *toute hypocycloïde*

---

(1) Dans ce calcul, on remplace les produits

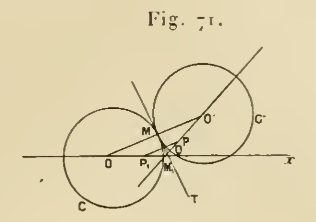
$$2\sin\frac{\theta}{2m}\sin\left(1-\frac{1}{2m}\right)\theta \qquad \text{et} \qquad 2\sin\frac{\theta}{2m}\cos\left(1-\frac{1}{2m}\right)\theta$$

par des différences de cosinus ou de sinus, selon les formules élémentaires classiques.

*ou épicycloïde est semblable à sa développée* (*cf.* Exercice proposé n° 7 du présent Chapitre et Exercice résolu n° 6 du Chapitre XXI).

598. Cas particuliers divers. — I : $m = -1$; limaçon de Pascal. — Si $m = -1$, *le cercle* C′ *est égal au cercle* C, sur lequel il roule extérieurement (*fig.* 71). A chaque instant, les deux cercles sont

Fig. 71.

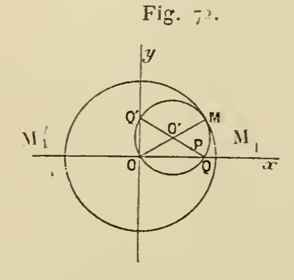



symétriques l'un de l'autre par rapport à leur tangente commune, Q étant symétrique de $M_1$, O′ de O et P du point fixe $P_1$ de $OM_1$. Il s'ensuit que le lieu du point P est homothétique, dans le rapport 2, de la podaire de C par rapport à $P_1$. *C'est donc un limaçon de Pascal* (n° 578). En particulier, *l'épicycloïde à un rebroussement* engendrée par le point Q n'est autre que la *cardioïde*.

Si l'on applique au cas particulier actuel les propriétés générales établies précédemment, on obtient des propriétés nouvelles du limaçon de Pascal et surtout de la cardioïde. Nous laissons au lecteur le soin de les énoncer.

599. II : $m = \frac{1}{2}$; ellipse. — Si $m = \frac{1}{2}$, le cercle C′ a pour rayon

Fig. 72.




la moitié du rayon de C. Le roulement est, en outre, intérieur, de sorte que C′ *passe constamment par* O (*fig.* 72).

Les équations (12) deviennent

$$x = \frac{R}{2}(1+e)\cos\theta, \qquad y = \frac{R}{2}(1-e)\sin\theta.$$

*Les courbes* Γ *sont donc des ellipses.*

*L'hypocycloïde à deux rebroussements*, obtenue pour $\alpha = \frac{R}{2}$, *est le diamètre* $M_1M_1'$ du cercle C.

Tout cela est évident géométriquement. En effet, l'angle au centre $\widehat{MO'Q}$ est double de $\widehat{MOM_1}$, puisque les arcs MQ et $MM_1$ sont égaux et que le rayon de C' est la moitié du rayon de C. D'autre part, l'angle inscrit $\widehat{MOQ}$ est la moitié de l'angle au centre $\widehat{MO'Q}$. Il est donc égal à $\widehat{MOM_1}$ et, par suite, Q se trouve sur $OM_1$.

Le point Q' décrit $Oy$, car l'angle $\widehat{QOQ'}$ est droit.

Quant au point P, il décrit une ellipse d'axes $Ox$ et $Oy$, en vertu du n° 540.

Si l'on prend le point P n'importe où dans le plan de C', on obtient encore des ellipses, conformément à la généralisation du n° 540.

En appliquant la propriété générale du n° 595, on obtient une construction très simple de la normale PM à l'ellipse décrite par le point P (*cf.* n° 540).

600. III : $m = \frac{1}{4}$; HYPOCYCLOÏDE A QUATRE REBROUSSEMENTS. — Le cercle C' est le $\frac{1}{4}$ du cercle C, sur lequel il roule intérieurement. Occupons-nous seulement de l'hypocycloïde et faisons $m = \frac{1}{4}$ et $e = 1$ dans les équations (12). Il vient, en exprimant $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$ (t. III),

$$x = R\cos^3\theta, \qquad y = R\sin^3\theta. \tag{26}$$

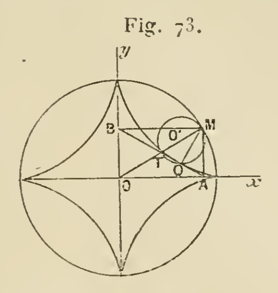
On en déduit immédiatement *l'équation ponctuelle de la courbe*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}. \tag{27}$$

La formule (16) nous donne $\varphi = -\theta$; d'autre part, nous savons que la tangente en Q passe par le point T, qui est milieu de OM. On

conclut manifestement de là que cette tangente est la deuxième diagonale du rectangle qui admet OM pour première diagonale et dont

Fig. 73.




les côtés sont parallèles à $Ox$ et à $Oy$. Cette diagonale a pour longueur R ; donc, *l'hypocycloïde à quatre rebroussements est l'enveloppe d'une droite de longueur constante qui s'appuie sur deux droites rectangulaires fixes.*

601. IV : $m = \frac{1}{3}$ ; HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS. — Le cercle C' est le $\frac{1}{3}$ du cercle C, sur lequel il roule intérieurement.

En faisant $m = \frac{1}{3}$ et $e = 1$ dans (12), on a

$$(28)\qquad x = \frac{R}{3}(2\cos\theta + \cos 2\theta), \qquad y = \frac{R}{3}(2\sin\theta - \sin 2\theta).$$

En posant $\tan\frac{\theta}{2} = t$, on constate que la courbe est unicursale et du *quatrième degré*. En appliquant la formule de Plücker (n° 212), on en conclut qu'elle doit être de *troisième classe*. C'est ce que nous allons vérifier, en formant son équation tangentielle.

Cherchons, au préalable, l'équation de la tangente au point P, de paramètre $\theta$. La formule (16) nous donne $\varphi = -\frac{\theta}{2}$. L'équation de la tangente peut, dès lors, s'écrire

$$\frac{(X - x)}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{Y - y}{-\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Chassant les dénominateurs et remplaçant $x$, $y$ par (28), on trouve, après un calcul facile,

$$(29)\qquad X\sin\frac{\theta}{2} + Y\cos\frac{\theta}{2} - \frac{R}{3}\sin\frac{3\theta}{2} = 0.$$

L'équation tangentielle cherchée s'obtiendra en éliminant $\theta$ entre

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{u} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{v} = \frac{\frac{R}{3}\sin\frac{3\theta}{2}}{-w}.$$

En s'appuyant sur la formule

$$\sin\frac{3\theta}{2} = \sin\frac{\theta}{2}\left(3\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

l'élimination est immédiate et donne

$$(30)\qquad w(u^2+v^2) - Ru\left(v^2 - \frac{u^2}{3}\right) = 0.$$

L'hypocycloïde à trois rebroussements est donc bien une courbe de la troisième classe.

L'équation (30) n'a pas de terme en $w^3$, ni en $w^2$. *La droite de l'infini est donc une tangente double. Les deux points de contact* s'obtiennent en annulant le coefficient de $w$ (nº 299), ce qui donne

$$u^2+v^2=0,$$

équation tangentielle des *points cycliques*.

602. Nous allons démontrer que, réciproquement, *toute courbe de troisième classe bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques est une hypocycloïde à trois rebroussements.*

Une telle courbe a une équation tangentielle de la forme

$$(31)\qquad w(u^2+v^2)+f(u, v)=0,$$

$f$ désignant un polynome quelconque homogène et du troisième degré en $u$, $v$, soit

$$(32)\qquad f(u, v) = Au^3+Bu^2v+Cuv^2+Dv^3.$$

Il s'agit de montrer qu'en choisissant convenablement les axes de coordonnées, l'équation (31) peut se mettre sous la forme (30). Or, si nous portons l'origine au point $(x_0, y_0)$ et si nous faisons tourner les axes de l'angle $\varphi$, les formules du changement de coordonnées en tangentielles sont (Chap. IX, Exercice proposé nº 9),

$$u' = u\cos\varphi + v\sin\varphi,\qquad v' = -u\sin\varphi + v\cos\varphi,\qquad w' = w + ux_0 + vy_0.$$

En remplaçant $u$, $v$, $w$ par ces expressions dans (30), nous devons obtenir

l'équation (31). En faisant le calcul et identifiant, on obtient, pour déterminer les quatre inconnues $x_0$, $y_0$, $\varphi$, R, les quatre équations

$$\begin{aligned}
A &= x_0 + \frac{R}{3}\cos\varphi(3\sin^2\varphi - \cos^2\varphi),\\
B &= y_0 + R\sin\varphi(\sin^2\varphi - 3\cos^2\varphi),\\
C &= x_0 + R\cos\varphi(\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi),\\
D &= y_0 + \frac{R}{3}\sin\varphi(3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).
\end{aligned}$$

En multipliant la première par 3 et ajoutant à la troisième, il vient

$$(33)\qquad x_0 = \frac{3A + C}{4}.$$

En combinant de même la deuxième et la quatrième, on a

$$(34)\qquad y_0 = \frac{3D + B}{4}.$$

Si nous retranchons maintenant la troisième de la première et la deuxième de la quatrième, nous obtenons

$$(35)\qquad \begin{cases} A - C = \dfrac{4}{3}R\cos\varphi(3\sin^2\varphi - \cos^2\varphi),\\[2mm] D - B = \dfrac{4}{3}R\sin\varphi(3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),\end{cases}$$

qui doivent nous donner R et $\varphi$.

En éliminant R, on a l'équation en $\varphi$ :

$$(36)\qquad (A - C)\sin\varphi(3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - (D - B)\cos\varphi(3\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = 0.$$

Elle est homogène et du troisième degré en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ et donne trois valeurs pour $\tan g\varphi$, qui correspondent évidemment aux trois tangentes de rebroussement de l'hypocycloïde [1].

Élevons au carré les deux équations (35) et ajoutons, il vient, après un calcul facile,

$$(37)\qquad (A - C)^2 + (D - B)^2 = \frac{16}{9}R^2.$$

En définitive, l'identification projetée est possible et l'équation (31) représente bien une hypocycloïde à trois rebroussements, dont les coordonnées du centre et le rayon du cercle base sont donnés par les formules (33), (34) et (37), les trois tangentes de rebroussement étant données par (36).

---

[1] Ces trois tangentes doivent former un *faisceau régulier*. L'équation (36) doit donc être de la forme $\operatorname{tang} 3\varphi = k$. Effectivement, elle peut s'écrire $\operatorname{tang} 3\varphi = \dfrac{B - D}{A - C}$.

**603.** La tangente à la courbe (31) qui a pour coefficient angulaire $m$ a pour équation

$$y = mx + \frac{f(m, -1)}{1 + m^2}.$$

Elle est de la forme générale

$$(38) \qquad y = mx + \frac{\varphi(m)}{1 + m^2},$$

$\varphi(m)$ désignant un polynome quelconque du troisième degré en $m$.

*L'enveloppe d'une droite dont l'équation est de cette forme est donc toujours une hypocycloïde à trois rebroussements.* Ceci est un moyen commode de reconnaître de telles enveloppes.

**604.** Dans le cas de l'équation (30), l'équation (38) s'écrit

$$(39) \qquad y = mx + \frac{R\,m\left(\frac{m^2}{3} - 1\right)}{m^2 + 1}$$

ou encore

$$(40) \qquad \left(x + \frac{R}{3}\right)m^3 - m^2 y - m(R - x) - y = 0.$$

Cette équation du troisième degré en $m$ donne les tangentes issues du point $P(x, y)$. En écrivant qu'elle a une racine double, on obtiendrait l'équation ponctuelle de l'hypocycloïde. En écrivant qu'elle a une racine triple, on obtiendrait ses trois points de rebroussement [1].

Cherchons le lieu des sommets des angles droits circonscrits. A cet effet, nous écrirons que l'équation (40) a deux racines de produit $-1$. Le produit des trois racines étant $\frac{y}{x + \frac{R}{3}}$, la troisième racine est $-\frac{y}{x + \frac{R}{3}}$. Portant cette valeur dans (40), il vient, tous calculs faits,

$$(41) \qquad x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{3}\right)^2.$$

---

[1] En faisant le même calcul pour l'équation générale (38), on a un procédé pour trouver la position de l'hypocycloïde définie par cette équation.

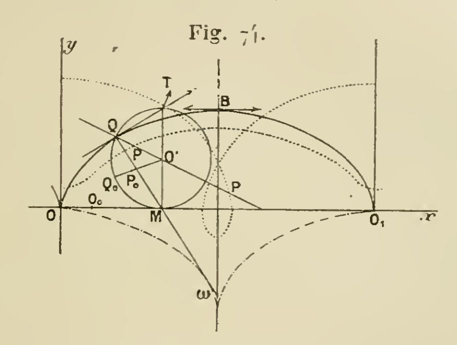
C'est l'équation du cercle tritangent. Donc :

THÉORÈME. — *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une hypocycloïde à trois rebroussements est son cercle tritangent* ([1]).

L'hypocycloïde à trois rebroussements possède encore beaucoup d'autres propriétés élégantes, mais dont le développement nous entraînerait trop loin ([2]).

605. CYCLOÏDE. — Étudions maintenant le cas particulier où la courbe roulette est un cercle C et la courbe base une droite, que nous prendrons pour axe des $x$ (*fig.* 74).

Fig. 74.




Soit Q le point du cercle C, qui se trouve primitivement en O. Appelons $\theta$ l'angle $(\widehat{O'Q, O'M})$. On a, en grandeur et en signe,

$$\overline{OM} = R\theta.$$

Soit, d'autre part, $O'P = a$.

Pour avoir les coordonnées du point P, projetons le contour OMO'P sur les axes; il vient, en remarquant que l'angle polaire de la demi-droite O'Q est, d'après la formule de Chasles, $-\frac{\pi}{2} - \theta$,

$$(42) \qquad x = R\theta - a\sin\theta, \qquad y = R - a\cos\theta.$$

606. Tous les points P situés à la même distance $a$ de O' engendrent des courbes se déduisant de l'une d'elles par des translations

([1]) En cherchant ce lieu à partir de l'équation (38), on a un autre procédé pour identifier l'hypocycloïde.

([2]) *Cf.* Exercice résolu n° 3 et Exercices proposés n^os 27 à 31.

parallèles à $Ox$. Car, remplacer P par $P_0$ (*fig.* 74) revient à remplacer O par $O_0$ tel que $\overline{OO_0} = \widehat{QQ_0}$; de sorte que la courbe décrite par $P_0$ se déduit de la courbe décrite par P par la translation $\overrightarrow{OO_0}$.

La courbe entière décrite par P dans un roulement indéfini se déduit de la boucle (A) engendrée pendant un tour complet par des translations parallèles à $Ox$ et d'amplitudes égales à tous les multiples entiers de $2\pi R$. Cela est évident géométriquement et on le vérifie analytiquement en changeant $\theta$ en $\theta + 2\pi$ dans (42).

On voit également, soit géométriquement, soit en changeant $\theta$ en $2\pi - \theta$, que la droite $x = \pi R$ est un axe de symétrie de (A), de sorte que la construction de la courbe totale se ramène à celle de l'arc (A') engendré par une demi-rotation, c'est-à-dire en faisant varier $\theta$ de 0 à $\pi$.

Lorsque $\theta$ croît de 0 à $\pi$, $y$ croît de $R - a$ à $R + a$.

Pour avoir les variations de $x$, il nous faut prendre la dérivée

$$\frac{dx}{d\theta} = R - a\cos\theta.$$

*Si* $a < R$, cette dérivée est toujours positive; donc, $x$ croît constamment, depuis 0 jusqu'à $R\pi$. La courbe a la forme indiquée en trait pointillé par la figure 74.

On l'appelle *cycloïde raccourcie*.

*Si* $a > R$, la dérivée $\frac{dx}{d\theta}$ s'annule pour une valeur $\theta_1$ donnée par

$$\cos\theta_1 = \frac{R}{a}.$$

On a le Tableau ci-dessous

| $\theta$ | 0 | | $\theta_1$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | $\searrow$ | $x_1$ | $\nearrow$ | $R\pi$ |
| $y$ | $R - a$ | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ | $R + a$ |

D'où la courbe en trait pointillé de la figure 74; elle est appelée *cycloïde allongée* (¹).

*Si* $a = R$, la dérivée $\frac{dx}{d\theta}$ est constamment positive, sauf pour $\theta = 0$,

(¹) En réalité, elle a subi, par erreur, une translation $R\pi$ suivant $Ox$.

qui l'annule, en même temps, d'ailleurs, que $\frac{dy}{d\theta}$. Le point O est *un point de rebroussement*, dont la tangente est $Oy$, ainsi qu'on le voit en cherchant la limite de $\frac{y}{x}$ ou en se reportant au n° 607. La courbe a la forme indiquée en trait plein sur la figure 74; elle porte le nom de *cycloïde*.

607. Différentions les formules (42) :

$$(43) \qquad \frac{dx}{d\theta} = \mathrm{R} - a\cos\theta = y, \qquad \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta = \mathrm{R}\theta - x.$$

On a l'identité

$$\frac{dx}{d\theta}(x - \mathrm{R}\theta) + \frac{dy}{d\theta}y = 0,$$

qui exprime que la tangente est perpendiculaire à PM, conformément à la propriété du centre instantané de rotation.

Dans le cas particulier de la cycloïde, les formules (43) s'écrivent

$$(44) \qquad \frac{dx}{d\theta} = 2\mathrm{R}\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad \frac{dy}{d\theta} = 2\mathrm{R}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

On en conclut que la tangente a pour angle polaire

$$(45) \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}.$$

L'arc $s$ est ensuite donné par

$$(46) \qquad \frac{ds}{d\theta} = 2\mathrm{R}\sin\frac{\theta}{2};$$

d'où, en prenant O pour origine,

$$(47) \qquad s = 4\mathrm{R}\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) = 8\mathrm{R}\sin^2\frac{\theta}{4}.$$

La longueur d'une boucle, donnée par $\theta = 2\pi$, est $8\mathrm{R}$.

*Le rayon de courbure* $\rho$ se déduit de (46) et de (45) :

$$(48) \qquad \rho = \frac{ds}{d\alpha} = -4\mathrm{R}\sin\frac{\theta}{2}.$$

On en déduit les *coordonnées du centre de courbure*

$$(49) \qquad \begin{cases} x_1 = x - \rho\cos\frac{\theta}{2} = \mathrm{R}(\theta + \sin\theta) = -x + 2\mathrm{R}\theta, \\ y_1 = y - \rho\sin\frac{\theta}{2} = -\mathrm{R}(1 - \cos\theta) = -y. \end{cases}$$

Ces formules nous montrent que *le milieu du rayon de courbure est le point* M.

On remarque aussi que les expressions de $x_1$, $y_1$ en fonction de $\theta$ ressemblent beaucoup à celles de $x$, $y$ et l'on peut chercher à les ramener les unes aux autres. Effectivement, si, dans (49), on change $\theta$ en $\theta + \pi$, on obtient

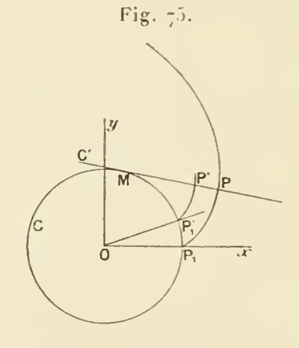
$$x_1 = R\pi + R(\theta - \sin\theta) = R\pi + x,$$
$$y_1 = -R - R\cos\theta = -2R + y.$$

On en conclut que *la développée de la cycloïde est une cycloïde égale, se déduisant de la première par la translation* $\overrightarrow{BO_1}$.

Elle est tracée en trait mixte sur la figure 74.

608. Développante de cercle. — Considérons enfin le cas où c'est le cercle roulette qui a un rayon infini. Tout point P de C', c'est-à-dire de la tangente MT (*fig.* 75), engendre une développante du

Fig. 75.




cercle C (n° 317). Deux points différents P et P' engendrent deux développantes, qui se déduisent l'une de l'autre par une rotation de l'angle $\widehat{P_1OP'_1} = \frac{PP'}{R}$.

Si l'on prend $OP_1$ pour axe des $x$ et un diamètre perpendiculaire pour axe des $y$, les équations paramétriques de la développante décrite par P sont

$$(50) \qquad x = R(\cos\theta - \theta\sin\theta), \qquad y = R(\sin\theta - \theta\cos\theta),$$

car $\overline{MP} = R\theta$, si MT est orientée par l'angle polaire $\theta - \frac{\pi}{2}$.

# CHAPITRE XL.

## COURBES ET SURFACES DIVERSES.

Dans ce Chapitre, nous allons étudier quelques courbes et surfaces classiques, qui n'ont pas encore été rencontrées dans les Chapitres précédents et qu'il est néanmoins utile de connaître.

609. Chaînette. — La chaînette est une courbe plane définie par l'équation ([1])

(1) $$y = \operatorname{ch} x.$$

Sa construction est immédiate, puisque nous connaissons les variations de la fonction $\operatorname{ch} x$ (t. I, n° 109). Elle a la forme indiquée sur la figure 76. L'axe $Oy$ est *un axe de symétrie* et le point A (0, 1) est

Fig. 76.

un *sommet*. L'axe des $x$ est appelé *la base* de la chaînette.

([1]) Cette équation n'est pas homogène et implique une unité de longueur particulière (n° 3), qui n'est autre que l'ordonnée OA du sommet de la chaînette. Si l'on veut une équation homogène, il suffit d'écrire

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

$a$ étant une longueur constante quelconque.

Calculons *l'arc* $\widehat{AM} = s$. Nous avons

$$ds^2 = dx^2(1 + \text{sh}^2 x) = \text{ch}^2 x . dx^2;$$

d'où, en supposant la courbe orientée dans le sens des $x$ croissants,

$$(2) \qquad ds = \text{ch}\, x . dx$$

et, en intégrant,

$$(3) \qquad s = \text{sh}\, x.$$

L'angle polaire $\alpha$ de *la demi-tangente positive* MT est donné par

$$(4) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\text{ch}\, x}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \text{th}\, x.$$

Cherchons *le rayon de courbure* $\rho = \dfrac{ds}{d\alpha}$. Pour cela, il nous faut $d\alpha$. En différentiant la première formule (4) et tenant compte de la seconde, nous avons

$$-\text{th}\, x . d\alpha = -\frac{\text{sh}\, x\, dx}{\text{ch}^2 x};$$

d'où

$$d\alpha = \frac{dx}{\text{ch}\, x}.$$

En tenant compte de (2) nous avons finalement

$$(5) \qquad \rho = \text{ch}^2 x.$$

Les *coordonnées du centre de courbure* sont ensuite

$$(6) \qquad x_1 = x - \text{sh}\, x\, \text{ch}\, x, \qquad y_1 = 2\,\text{ch}\, x = 2y.$$

La seconde formule nous montre que *le centre de courbure* C *est symétrique de l'extrémité* N *de la normale par rapport à* M.

La *développée* est aisée à construire, d'après les formules (6). Elle a la forme indiquée en pointillé sur la figure 76.

610. Tractrice. — On appelle ainsi la *développante de la chaînette* qui a pour point de départ le sommet A. Ses équations paramétriques sont, dès lors, en appelant maintenant $t$ l'abscisse $x$ du

numéro précédent,

$$(7)\qquad \begin{cases} x = t - s\cos\alpha = t - \operatorname{th} t, \\ y = \operatorname{ch} t - s\sin\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}. \end{cases}$$

La courbe se construit sans difficulté et a la forme indiquée, en trait mixte, sur la figure 76.

La tangente en P a pour équations paramétriques

$$(8)\qquad \begin{cases} x = t - \operatorname{th} t + \lambda \sin\alpha = t - \operatorname{th} t + \lambda \operatorname{th} t, \\ y = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} - \lambda\cos\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} - \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch} t} = \dfrac{1-\lambda}{\operatorname{ch} t}. \end{cases}$$

On remarque immédiatement que $y$ s'annule pour $\lambda = 1$. On conclut de là la propriété suivante :

*La tangente* PT' *limitée à la base* O$x$ *a une longueur constante.*

Pour cette raison, la tractrice est appelée quelquefois la *courbe aux tangentes égales.*

Si l'on fait $\lambda = 1$ dans la première formule (8), on obtient $x = t$. Donc, *le point* T' *est la projection du centre de courbure* M *sur* O$x$.

Le triangle rectangle MT'T nous donne ensuite

$$\overline{\mathrm{PM}}.\overline{\mathrm{PT}} = -\overline{\mathrm{PT'}}^2 = -1 ;$$

donc, *le produit du rayon de courbure par la normale limitée à la base est constant* (*cf.* Chap. XXI, Exercice résolu n° 2).

611. Caténoïde. — On appelle *caténoïde* ou encore *alysséide* la *surface de révolution engendrée par la rotation d'une chaînette autour de sa base.*

En vertu du n° 363 et de la propriété signalée plus haut pour le centre de courbure de la chaînette, on voit que *les deux rayons de courbure principaux de cette surface sont symétriques;* donc, la caténoïde est une *surface minima* (n° 337). C'est même la seule surface minima qui soit de révolution, en vertu de la réciproque établie à l'Exercice proposé n° 25 du Chapitre XXIV.

Si l'on prend l'axe de révolution pour axe des $z$, les équations paramétriques de la caténoïde peuvent s'écrire (n° 360)

$$(9)\qquad x = \operatorname{ch} u \cos v, \qquad y = \operatorname{ch} u \sin v, \qquad z = u.$$

*L'élément linéaire* ou distance $ds$ des deux points infiniment voisins $(u, v)$ et $(u+du, v+dv)$ est donné par (n° 365)

$$ds^2 = r^2 dv^2 + d\sigma^2, \tag{10}$$

en appelant $r$ le rayon $\operatorname{ch} u$ du parallèle et $d\sigma$ l'arc élémentaire de chaînette donné par la formule (2), soit $d\sigma = \operatorname{ch} u \, du$. Portant dans (10), on obtient

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 u (dv^2 + du^2). \tag{11}$$

On peut faire *une carte de la surface* en considérant $u$, $v$ comme des coordonnées cartésiennes rectangulaires dans un plan (n° 400). Il s'ensuit, par exemple, que les *loxodromies* (n° 365), qui correspondent aux droites de la carte, ont pour équation générale

$$v = k(u - u_0). \tag{12}$$

Ce *sont les intersections de la surface par tous les hélicoïdes gauches à plan directeur d'axe* $Oz$ (n° 619).

En particulier, *les lignes asymptotiques*, qui doivent couper à 45° les lignes de courbure, puisque la surface est minima, ont pour équation générale

$$u \pm v = \text{const.} \tag{13}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'elles satisfont bien à l'équation générale (14) du n° 364.

612. Pseudosphère. — On appelle ainsi la *surface de révolution engendrée par une tractrice en tournant autour de sa base.*

En vertu de la propriété énoncée à la fin du n° 610, le produit des deux rayons de courbure principaux est constant et d'ailleurs négatif. Autrement dit, *la pseudosphère est une surface de révolution à courbure totale constante et négative.*

On sait que la sphère est une surface de révolution à courbure totale constante positive. C'est l'analogie de ces deux propriétés qui a valu son nom à la pseudosphère. Mais, bien entendu, aucune analogie de forme n'existe entre les deux surfaces.

Signalons encore la propriété suivante :

*Les sphères orthogonales à la pseudosphère sont égales.* Cela résulte de ce que la méridienne a ses tangentes égales.

613. Spirale logarithmique. — Elle est définie en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho = e^{m\omega}, \qquad m = \text{const.} \tag{14}$$

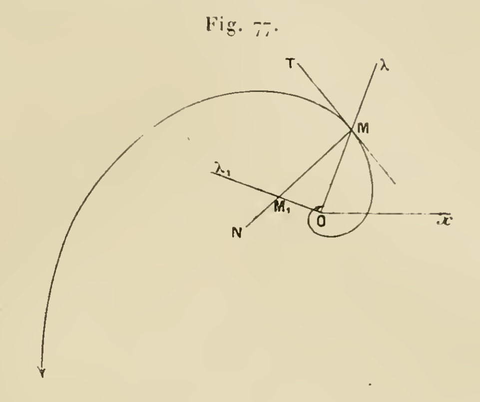
ou

$$(15) \qquad m\omega = \log \rho,$$

cette seconde forme expliquant l'origine du nom donné à la courbe.

Sa construction est immédiate (*fig.* 77) [1]. Si l'on suppose, pour

Fig. 77.




fixer les idées, $m > 0$, $\rho$ tend vers zéro, pour $\omega = -\infty$. *Le pôle est donc un point asymptote.*

*Si l'on fait tourner la spirale de l'angle* $\omega_0$ *autour de son pôle,* son équation devient

$$(16) \qquad \rho = e^{m(\omega+\omega_0)} = e^{m\omega_0} \cdot e^{m\omega}.$$

Tous les rayons vecteurs sont multipliés par $e^{m\omega_0}$; *la nouvelle courbe est donc homothétique de la première* [2] *dans le rapport* $e^{m\omega_0}$.

La tangente MT au point M est donnée commodément par la formule (n° 252)

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{m}.$$

La spirale *fait donc un angle constant avec le rayon vecteur* [3]. En la faisant tourner autour de son pôle, on obtient les trajectoires sous l'angle V des droites issues de ce point [4].

---

[1] Sur la figure 77, on a pris $m = \frac{1}{2}$, $V = 63°30'$.

[2] Cette propriété est caractéristique (*cf.* Chap. XXIV).

[3] Cette propriété est également caractéristique.

[4] *Cf.* Exercice proposé n° 11 du Chapitre XXIV.

Calculons maintenant *l'arc de spirale*. On a

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = e^{2m\omega}(m^2 + 1)\,d\omega^2;$$

d'où, en introduisant l'angle constant V, pour éviter les radicaux,

(17) $$ds = \frac{e^{m\omega}\,d\omega}{\sin V};$$

puis, en intégrant,

(18) $$s = \frac{e^{m\omega}}{\cos V} = \frac{\rho}{\cos V}.$$

Donc, *l'arc de spirale est proportionnel au rayon vecteur* [1].

Il est à remarquer toutefois que ceci suppose que *l'origine des arcs a été prise au pôle* et cela nous prouve du même coup que la longueur d'arc comprise entre un point quelconque et le pôle est finie, bien que ce dernier point soit un point asymptote.

Calculons *le rayon de courbure* R.

La courbe étant orientée par l'arc $s$, c'est-à-dire, en somme, dans le sens des $\omega$ croissants, si nous adoptons pour V la détermination comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, conformément à l'hypothèse $m > 0$, l'angle polaire de la demi-tangente positive est

(19) $$\alpha = \omega + V.$$

On a donc

(20) $$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\omega} = \frac{e^{m\omega}}{\sin V} = \frac{\rho}{\sin V}.$$

*Le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur* [2].

Projetons le rayon de courbure $\overrightarrow{MM_1}$ sur le rayon vecteur $O\lambda$. L'angle de $O\lambda$ avec la demi-normale positive MN étant $V + \frac{\pi}{2}$, la projection cherchée a pour mesure algébrique sur $O\lambda$

$$R\cos\left(V + \frac{\pi}{2}\right) = -R\sin V = -\rho = \overline{MO}.$$

Le point $M_1$ se projette donc en O et l'on peut dire que *le centre de courbure est l'extrémité de la sous-normale polaire* [3].

---

(1) Propriété caractéristique.

(2) Propriété caractéristique. *Cf.* Exercice proposé n° 29 du Chapitre XXIV.

(3) Propriété caractéristique. *Cf.* Exercice proposé n° 28 du Chapitre XXIV.

L'angle $\widehat{M_1MO}$ étant constant et égal à $\frac{\pi}{2} - V$, le triangle rectangle $M_1OM$ demeure semblable à lui-même, quand M décrit la spirale. Il s'ensuit que $M_1$ décrit une courbe déduite de celle-ci par une rotation et une homothétie et qui est, par suite, une spirale égale à la proposée. Donc, *la développée d'une spirale logarithmique est une spirale égale.*

Pour préciser davantage, cherchons l'équation polaire de cette développée. L'angle polaire $\omega_1$ de $M_1$ peut être pris égal à $\omega + \frac{\pi}{2}$. L'angle de $O\lambda_1$ avec MN est $V + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = V$. Donc, la projection de $\overrightarrow{MM_1}$ sur $O\lambda_1$, c'est-à-dire $\overline{OM_1} = \rho_1$, est

$$\rho_1 = R\cos V = \rho\cot V = m\rho = me^{m\left(\omega_1 - \frac{\pi}{2}\right)};$$

de sorte que l'équation polaire cherchée est

$$(21) \qquad \rho_1 = \frac{m}{e^{m\frac{\pi}{2}}} \cdot e^{m\omega_1}.$$

On en conclut, en comparant avec (16), que *la développée se déduit de la spirale par une rotation de l'angle $\omega_0$ défini par l'équation*

$$e^{m\omega_0} = me^{-m\frac{\pi}{2}} \qquad \text{ou} \qquad \omega_0 = \frac{\log m}{m} - \frac{\pi}{2}.$$

614. Spirales d'Archimède et hyperbolique. — *La spirale d'Archimède est définie par une équation polaire du premier degré :*

$$(22) \qquad \rho = m\omega + n.$$

Par une rotation convenable [1], on peut supposer $n = 0$, c'est-à-dire prendre l'équation

$$(23) \qquad \rho = m\omega.$$

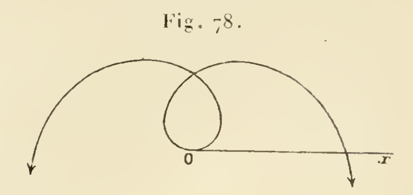
La spirale est alors symétrique par rapport à $Oy$. Elle a la forme indiquée sur la figure 78.

---

[1] Cette rotation nous montre que *la spirale d'Archimède est égale à ses conchoïdes.*

Pour construire la tangente en M, il y a avantage à calculer *la sous-normale* : $\rho' = m$. Elle *est constante* [1].

Fig. 78.



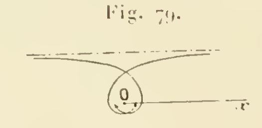

*La spirale hyperbolique* est définie par l'équation polaire [2]

$$\rho\omega = m, \tag{24}$$

$m$ étant une constante, que nous supposerons positive. Elle admet $Oy$ pour axe de symétrie.

Si $\omega$ croît de 0 à $+\infty$, $\rho$ décroît de $+\infty$ à 0. Le pôle est donc un point asymptote et il y a une branche infinie dans la direction $Ox$. Pour avoir l'asymptote de cette branche, nous remarquons que *la sous-tangente en un point quelconque est constante* [3] et égale à $m$, en vertu de la formule (6) du n° 252. La sous-asymptote est donc aussi égale à $m$. La courbe a la forme indiquée sur la figure 79.

Fig. 79.




615. Hélices. — On appelle *hélice la courbe que devient une droite* D *d'un plan* P *quand on enroule ce plan sur un cylindre quelconque* C, qui est appelé *cylindre rectifiant* de l'hélice. Il y a deux cas particuliers, dont nous allons d'abord nous débarrasser.

Si, pendant l'enroulement, la droite D est parallèle aux génératrices du cylindre, il est clair qu'elle vient s'appliquer suivant une de ces génératrices.

Si, au contraire, D est perpendiculaire aux génératrices, elle vient

---

[1] Propriété caractéristique.

[2] Elle ressemble à l'équation cartésienne d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes. D'où le nom de la courbe.

[3] Propriété caractéristique.

s'appliquer suivant une section droite. Ce n'est que dans l'hypothèse intermédiaire qu'on obtient véritablement une hélice H.

Prenons pour axe des $z$ une parallèle aux génératrices et pour plan des $xy$ le plan d'une section droite $\gamma$. Soient $\omega$X la droite du plan P qui s'enroule suivant cette section, $\omega$ son point de rencontre avec D et $\omega$Y la parallèle à O$z$. Nous supposerons $\omega$X orientée de telle manière que D passe dans l'angle où X et Y sont positifs. L'équation de la droite D par rapport aux axes $\omega$XY est alors de la forme

$$Y = mX, \tag{25}$$

$m$ étant une constante *positive*.

Dans l'enroulement, le point P(X, Y) de la droite D devient un point M de l'hélice, dont la cote $z = Y$ et dont la projection $m$ sur $\gamma$ a pour abscisse curviligne $\sigma = X$, si l'on prend pour origine des arcs sur cette courbe le point A où vient s'appliquer $\omega$ et pour sens positif un sens tel que la demi-tangente positive en A soit $\omega$X, quand $\omega$ vient en A.

Dès lors, si nous savons exprimer les coordonnées $x$, $y$ du point $m$ en fonction de $\sigma$, comme on a, d'après (25),

$$z = m\sigma, \tag{26}$$

on aura finalement les trois coordonnées $x$, $y$, $z$ du point M en fonction de $\sigma$ et, par conséquent, les *équations paramétriques de l'hélice* H.

616. Orientons H dans le sens des $\sigma$ croissants et prenons-y A pour origine des arcs.

*L'arc* $\widehat{AM} = s$ est égal à $\overline{\omega P}$ sur la droite D, supposée orientée dans le sens des X croissants. On a donc

$$s = \sqrt{m^2+1}\,.\,\sigma = \frac{\sigma}{\sin V} = \frac{z}{\cos V}, \tag{27}$$

en introduisant l'angle aigu $V = D\omega Z$, dont $m$ est la cotangente.

*La tangente* MT *en* M *à* H est, à chaque instant, la partie non enroulée de D. Elle *fait donc l'angle constant* V *avec les génératrices* du cylindre [1].

---

[1] Pour la réciproque, cf. Exercice résolu n° 9 du Chapitre XXIV.

Soit $\alpha$ l'angle polaire, dans $xOy$, de la demi-tangente positive $mt$ à $\gamma$. Cet angle et V sont la longitude et la colatitude (n° 30) de la demi-tangente positive MT. Les cosinus directeurs de cette demi-droite sont donc

$$(28)\qquad a = \sin V \cos\alpha, \qquad b = \sin V \sin\alpha, \qquad c = \cos V.$$

Ces différentes propriétés, qui sont à peu près évidentes par la considération de l'enroulement de la droite D, sont aussi très faciles à établir, d'une façon d'ailleurs plus rigoureuse, par le calcul. On a, en effet,

$$(29)\qquad dx = d\sigma \cos\alpha, \qquad dy = d\sigma \sin\alpha, \qquad dz = m\, d\sigma;$$

d'où

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + m^2)\, d\sigma^2;$$

d'où la formule (27). Si l'on combine ensuite cette formule avec (29), on a (n° 193)

$$a = \frac{dx}{ds} = \sin V \cos\alpha, \qquad b = \frac{dy}{ds} = \sin V \sin\alpha, \qquad c = \frac{dz}{ds} = \cos V.$$

On retrouve les formules (28).

*L'indicatrice sphérique (i) des tangentes* est un petit cercle, de centre I sur $Oz$, de plan parallèle à $xOy$ et de rayon $\sin V$. Orientons-le en prenant $\alpha + \frac{\pi}{2}$ pour angle polaire de sa demi-tangente positive $\mu\theta$. Les cosinus directeurs de cette demi-tangente et, par conséquent, de la normale principale MN à H sont

$$(30)\qquad a' = -\sin\alpha, \qquad b' = \cos\alpha, \qquad c' = 0.$$

*Cette normale principale n'est autre que la normale au cylindre* C. Il s'ensuit que *le plan osculateur* TMN est, en chaque point de l'hélice, *normal audit cylindre*. On vérifie ainsi, dans ce cas particulier, une propriété générale des lignes géodésiques [1] (note de la page 360).

L'abscisse curviligne $s'$ du point $\mu$ sur l'indicatrice est $\alpha \sin V$. *Le rayon de*

---

[1] L'hélice H est évidemment une géodésique pour le cylindre C, car elle constitue le plus court chemin entre deux quelconques de ses points M, M', puisque, dans le plan (P), la droite D est le plus court chemin entre les points homologues P, P'. *Voir* la réciproque dans l'Exercice résolu n° 9 du Chapitre XXIV.

*courbure de l'hélice* est donc

$$(31)\qquad \rho = \frac{ds}{ds'} = \frac{ds}{\sin V . d\alpha} = \frac{1}{\sin^2 V} \cdot \frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{R}{\sin^2 V},$$

en appelant R le rayon de courbure de la section droite $\gamma$.

*La binormale* MB a pour cosinus directeurs, en vertu des formules (39) du n° 35.

$$(32)\qquad a'' = -\cos V \cos\alpha, \qquad b'' = -\cos V \sin\alpha, \qquad c'' = \sin V.$$

On peut en déduire, ce qui est du reste évident géométriquement, que la seconde indicatrice est un petit cercle $(i')$, supplémentaire [1] du petit cercle $(i)$.

On pourrait ensuite calculer, d'après cela, *le rayon de torsion* $\tau$ (n° 325). Pour varier, appliquons plutôt la formule de Frenet (n° 326)

$$\frac{da''}{ds} = \frac{a'}{\tau};$$

nous avons, d'après (32) et (30),

$$\cos V \sin\alpha \frac{d\alpha}{ds} = -\frac{\sin\alpha}{\tau};$$

d'où

$$(33)\qquad \tau = \frac{-1}{\cos V} \cdot \frac{ds}{d\alpha} = \frac{-R}{\sin V \cos V} = -\rho \operatorname{tang} V.$$

On voit que *le rayon de torsion et le rayon de courbure d'une hélice sont dans un rapport constant* [2]. En appliquant la formule $\frac{da}{ds} = \frac{a'}{\rho}$, on retrouverait de même la formule (31).

**617. Hélice circulaire.** — Une hélice particulièrement intéressante est l'*hélice circulaire* [3], provenant de l'enroulement d'une droite sur un *cylindre de révolution*.

Voyons ce que deviennent les résultats généraux précédents dans ce cas particulier.

Prenons pour axe des $z$ l'axe du cylindre C, pour axe des $x$ la normale à ce cylindre au point A et un axe des $y$ perpendiculaire à $zOx$.

Si l'on appelle $t$ l'angle polaire du point $m$, nous avons $\sigma = Rt$, R designant le rayon du cylindre. Les équations paramétriques de l'hélice s'écrivent dès lors

$$(34)\qquad x = R\cos t, \qquad y = R\sin t, \qquad z = kt.$$

---

(1) C'est-à-dire que les cônes de sommet O et de base $(i)$ et $(i')$ sont supplémentaires.

(2) Pour la réciproque, *cf.* Exercice précité.

(3) Il arrive souvent qu'on l'appelle simplement *hélice*.

en posant

$$(35) \qquad k = m\mathrm{R}.$$

Lorsque le point M décrit l'hélice, *son déplacement suivant* $Oz$ *est constamment proportionnel à sa rotation autour de* $Oz$.

Pendant un tour complet, le déplacement suivant $Oz$ est égal à $2k\pi$. Cette quantité s'appelle *le pas de l'hélice*. L'arc décrit $MM'$ est *une spire*.

Pour avoir l'hélice complète, il suffit évidemment d'en construire une spire particulière $AA'$ et d'imprimer ensuite à cette spire des translations parallèles à $Oz$ et d'amplitudes égales à tous les multiples entiers du pas [1].

Il nous paraît inutile d'insister sur la forme de l'hélice circulaire, qui est celle de l'arête d'un *filet de vis* et, par conséquent, est bien connue de tout le monde. Il nous faut toutefois dire un mot du *sens de l'hélice*. La constante $k$ (qui est quelquefois appelée le *pas réduit* ou simplement le *pas*) étant supposée positive, on dit qu'on a une *hélice à droite*, si le trièdre $Oxyz$ est un trièdre à droite (n° 28) et une *hélice à gauche* dans le cas contraire.

Deux hélices de même rayon et de même pas, mais de sens différents *ne sont pas superposables ;* elles sont *symétriques par rapport à un plan*, de même que deux trièdres trirectangles de sens opposés.

*Si une hélice est à droite*, un observateur couché le long de son axe [2] voit le point M décrire l'hélice *en montant*, en tournant *de droite à gauche*. Tel est le cas d'un *tire-bouchon* et de *la plupart des vis*, qui sont appelées, dans cette hypothèse, des *vis à droite* [3].

---

[1] Deux spires consécutives sont, en effet, superposables par translation. Plus généralement, deux arcs quelconques $MM'$ et $NN'$ de même longueur peuvent être superposés par une rotation et une translation convenables. *L'hélice glisse sur elle-même*, dans tout déplacement hélicoïdal de pas $2k\pi$ et d'axe $Oz$, un tel déplacement étant défini comme résultant d'une rotation autour de $Oz$ combinée avec une translation suivant $Oz$ (*cf.* n° 366).

[2] On se rend compte aisément que le sens suivant lequel se couche l'observateur est sans importance.

[3] En artillerie, les rayures des canons dits *rayés à droite* sont également des hélices à droite. Si l'on regarde l'intérieur du tube, on voit les rayures s'enfoncer en tournant de gauche à droite en passant par le haut, c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre.

Quelques vis, dites *vis à gauche*, ont pour filet une hélice à gauche [1].

618. Toutes les propriétés et formules établies au n° 616 s'appliquent sans modification au cas actuel.

L'angle constant V sous lequel l'hélice coupe les génératrices est donné par la formule

$$\text{(36)} \qquad \operatorname{tang} V = \frac{1}{m} = \frac{R}{k} = \frac{2\pi R}{p},$$

en appelant $p$ le pas.

Les formules (31) et (33) nous montrent que *l'hélice circulaire est une ligne à courbure et à torsion constantes* [2], puisque le rayon de courbure R de la section droite est constant.

*Le rayon de torsion est négatif.* On en conclut (n° 325) que le plan osculateur tourne dans le sens positif défini par les axes autour de la demi-tangente positive, quand M décrit l'hélice dans le sens positif. Autrement dit, *pour une hélice à droite, par exemple, la rotation du plan osculateur a lieu de droite à gauche.* Nous laissons au lecteur le soin de le vérifier directement en s'appuyant sur ce que le plan osculateur est normal au cylindre C.

619. Hélicoïde gauche a plan directeur ou surface de vis a filet carré [3]. — C'est l'hélicoïde (n° 366) engendré par le déplacement hélicoïdal d'une droite G autour d'un axe $Oz$ qui la rencontre et lui est perpendiculaire.

On peut dire aussi que c'est un *conoïde droit admettant pour directrice une hélice circulaire coaxiale au conoïde.*

Ou bien encore, d'après ce qui a été vu au n° 616, c'est la *surface engendrée par les normales principales d'une hélice circulaire.*

Si l'on adopte les notations du n° 366, l'équation de cette surface en coordonnées semi-polaires est

$$\text{(37)} \qquad z = k\omega.$$

Ses équations paramétriques cartésiennes sont

$$\text{(38)} \qquad x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = kv.$$

---

(1) De même, quelques canons sont *rayés à gauche.*

(2) Pour la réciproque, *voir* Exercice précité.

(3) Elle est ainsi nommée, parce que les flancs du filet d'une telle vis en offrent un exemple concret. Un autre exemple est fourni par les escaliers dits *en colimaçon.*

Toutes les lignes $u =$ const. sont *des hélices de même pas.*

*Le plan tangent en* M contient la génératrice MG et la tangente MT à l'hélice ($u$) qui passe par ce point. D'après ce qui a été vu au n° 616, *c'est le plan osculateur de ladite hélice.* Donc, les hélices ($u$) sont *lignes asymptotiques* de la surface (n° 345). Les autres lignes asymptotiques sont, comme on sait (n° 374), les génératrices G. Elles coupent les premières à angle droit. Il s'ensuit que les tangentes asymptotiques en chaque point sont rectangulaires et, par conséquent, que *la surface est minima* (n° 337).

En s'appuyant sur la formule (15) du n° 365, on trouve que l'*élément linéaire* ou distance des points ($u$, $v$) et ($u+du$, $v+dv$) est donné par

$$ds^2 = du^2 + (u^2+k^2)\,dv^2 = (u^2+k^2)\left(\frac{du^2}{u^2+k^2} + dv^2\right).$$

Faisons le changement de variable

$$u' = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+k^2}} = \log(u + \sqrt{u^2+k^2}).$$

En supposant [1], pour simplifier, $k = 1$, on a (*cf.* t. I, Chap. VII, Exercice proposé n° 17)

$$u = \operatorname{sh} u', \qquad u^2 + k^2 = \operatorname{sh}^2 u' + 1 = \operatorname{ch}^2 u';$$

d'où

$$(39) \qquad ds^2 = \operatorname{ch}^2 u'(du'^2 + dv^2).$$

On retrouve la formule (11), c'est-à-dire l'*élément linéaire de la caténoïde.* On en conclut que si l'on établit, entre les deux surfaces, une correspondance telle que deux points homologues aient les mêmes coordonnées [2] ($u$, $v$), *deux lignes homologues quelconques ont même longueur. Les deux surfaces sont applicables* l'une sur l'autre (n° 400).

En répétant le raisonnement fait au n° 611, on voit que *les lignes de courbure*, qui coupent les lignes asymptotiques à 45°, ont pour équation générale

$$(40) \qquad u' \pm v = \text{const.}$$

Dans la correspondance ci-dessus, elles sont *homologues des lignes asymptotiques de la caténoïde* et *vice versa.*

---

[1] Cela revient à choisir convenablement l'unité de longueur ou bien à faire une homothétie.

[2] Bien entendu, pour l'hélicoïde, $u$ est la nouvelle variable $u'$.

## *ERRATA DU TOME I (COURS).*

---

Page 17, ligne 3 en remontant, *au lieu de* des $m$ lettres, *lire* des $m - 1$ lettres.
Page 28, ligne 23, *au lieu de* $b = -a'$, *lire* $b = -b'$.
Page 50, ligne 5 en remontant, *au lieu de* convergente, *lire* divergente.
Page 51, ligne 23, *au lieu de* $v_n = \frac{1}{\frac{np}{q}}$, *lire* $v_n = \frac{1}{n^{\frac{p}{q}}}$.
Page 68, ligne 11, dans le crochet, *au lieu de* $-\infty$, *lire* $+\infty$.
Page 96, ligne 3 en remontant, *au lieu de* entre $0$ et $\pi$, *lire* entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.
Page 173, ligne 7, *au lieu de* $x$, *lire* $x, y, z$.
Page 184, ligne 21, *au lieu de* comme, *lire* connue.
Page 206, ligne 9, *au lieu de* $\int x^m x$, *lire* $\int x^m dx$.
Page 350, équation (8), *au lieu de* $A_p^n$, *lire* $A_p^q$.

# TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE II.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME II.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.
61418-21